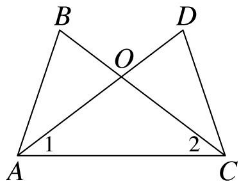
第三章：幾何與證明 第一節：證明與推理

一、選擇

1.（ ）如圖，已知 $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\angle 1=\angle 2$，則下列推論何者錯誤？



(A) $\overline{AB}=\overline{CD}$

(B) $\overline{AO}=\overline{OC}$

(C) $\angle B=\angle D=45°$

(D) $\triangle BAC\cong\triangle DCA$

《答案》C

2.（ ）老師問：「在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，如果要證明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 應該要加上哪一個條件？」

甲生說：「$\overline{AB}=\overline{DE}$。」

乙生說：「$\angle C=\angle F$。」

丙生說：「$\angle A=\angle D$。」

丁生說：「$\angle B=\angle E=90°$。」

請問哪一位說的條件無法證明？

(A)甲生 (B)乙生 (C)丙生 (D)丁生

《答案》C

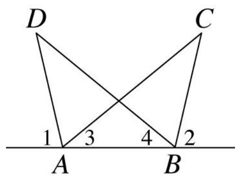
3.（ ）若 a 爲奇數，則下列敘述何者正確？

(A) $7a+2$ 爲奇數 (B) $a+5$ 爲奇數

(C) $2a-3$ 爲偶數 (D) a^2 爲偶數

《答案》A

4.（ ）已知：如圖，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。



求證：$\overline{AC}=\overline{BD}$。

證明的過程有下列四個步驟：

(1) $\overline{AC}=\overline{BD}$

(2) $\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle DAB=\angle CBA$

(3) $\triangle ABD\cong\triangle BAC$（$ASA$ 全等性質）

(4) $\because \angle 3=\angle 4$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，$\angle CBA=\angle DAB$

請問證明的順序應爲下列何者？

(A)(2)→(4)→(3)→(1)

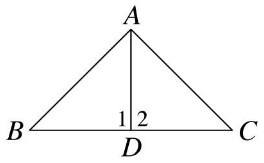
(B)(4)→(2)→(3)→(1)

(C)(1)→(3)→(2)→(4)

(D)(3)→(4)→(1)→(2)

《答案》A

5.（ ）已知：如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。



求證：$\overline{AD} \perp \overline{BC}$。

證明：(1) $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

(2)$\triangle ABD \cong \triangle ACD$($SSS$ 全等性質)

(3)____(甲)____

(4)故 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

請問甲應填入下列何者，可得完整的證明？

(A) $\angle 1=\angle 2$

(B) $\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$，$\therefore \angle 1=\angle 2=90°$

(C) $\because \angle B=\angle C$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

(D) $\because \angle 1=\angle 2$，又 $\angle 1+\angle 2=180°$，$\therefore \angle 1=\angle 2=90°$

《答案》D

6. (　) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$，且交 $\overline{BC}$ 於 D，則下列哪些敘述是正確的？

甲：$\triangle ABC$ 是正三角形　　乙：$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$

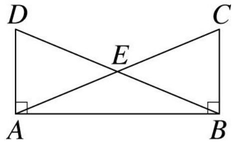
丙：$\triangle ABD \cong \triangle ACD$　　丁：$\angle B=\angle C$

(A)全部正確　(B)乙、丙、丁

(C)甲、乙、丙　(D)甲、丙、丁

《答案》B

7. (　) 如圖，已知 $\overline{BC} \perp \overline{AB}$，$\overline{AD} \perp \overline{AB}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$，則下列推論何者錯誤？



(A) $\overline{DE}=\overline{CE}$

(B) $\overline{AD}=\overline{BC}$

(C) $\angle ABD=\angle BAC$

(D) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 是根據 SAS 全等性質

《答案》D

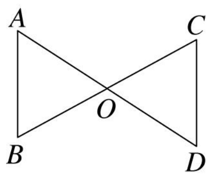
8. (　) 如圖，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 O 點，若 $\overline{OA}=\overline{OD}$，$\overline{OB}=\overline{OC}$，則下列敘述哪些是正確的：

甲：$\triangle AOB \cong \triangle DOC$

乙：$\angle B=\angle C$

丙：$\overline{AB}=\overline{CD}$

丁：$\overline{AB} // \overline{CD}$



(A)甲

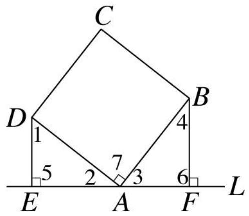
(B)乙、丙

(C)甲、丙、丁

(D)甲、乙、丙、丁

《答案》D

9. (　)已知：如圖，$ABCD$ 是正方形，A 在 L 上，$\overline{DE} \perp L$，$\overline{BF} \perp L$，垂足分別為 E、F($\overline{AE} \neq \overline{AF}$)。



求證：$\triangle ADE \cong \triangle BAF$。

證明：(1)∵$ABCD$ 是正方形，∴$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle 7=90°$

(2)∵$\overline{DE}\perp L$，$\overline{BF}\perp L$，∴$\angle 5=\angle 6=90°$

(3)____(甲)____

(4)∴$\triangle ADE \cong \triangle BAF$($AAS$ 全等性質)

從下列選項中，選出可填入(甲)中的正確證明過程：

(A)∵$\overline{DE}\perp L$，$\overline{BF}\perp L$，$\angle 7=90°$，∴$\overline{DE}=\overline{BF}$

(B)∵$\overline{DE}\perp L$，$\overline{BF}\perp L$，$\angle 7=90°$，∴$\angle 1=\angle 4$

(C)∵$\angle 7=90°$，$\angle 5=\angle 6=90°$，∴$\angle 2=\angle 3$

(D)∵$\angle 7=\angle 5=90°$，∴$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3 \Rightarrow \angle 1=\angle 3$

《答案》D

10. (　)已知直角三角形的三邊長爲 6、a、b(a、b 爲正整數)，且 b 爲斜邊，則$(a+b)$必爲下列哪一個數的因數？

(A)36　(B)60　(C)72　(D)96

《答案》A

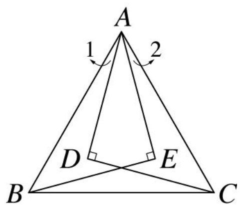
11. (　)如圖，在$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，$\overline{AE}\perp\overline{BE}$，若$\angle 1=\angle 2$，則欲證明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$ 時，可使用下列哪幾項條件來證明？

(1)$\overline{AB}=\overline{AC}$　(2)$\overline{AD}=\overline{AE}$

(3)$\angle ABE=\angle ACD$　(4)$\angle BAE=\angle CAD$

(5)$\angle ABC=\angle ACB$　(6)$\angle 1=\angle 2$

(7)$\angle ADC=90°=\angle AEB$



(A)(1)(2)(3)(4)，是根據 AAS 性質

(B)(1)(4)(6)(7)，是根據 AAS 性質

(C)(1)(2)(5)(6)，是根據 ASA 性質

(D)(1)(3)(5)(7)，是根據 RHS 性質

《答案》B

12. (　)下列對於連續正整數的敘述，何者錯誤？

(A)連續正偶數 2、4、6、┌┌中，第 n 項的數爲 $2n$

(B)連續正偶數總和 $2+4+6+$┌┌中，到第 n 項的總和爲 n^2

(C)連續正奇數 1、3、5、┌┌中，第 n 項的數爲 $2n-1$

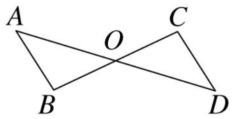
(D)連續正奇數總和 $1+3+5+$┌┌中，到第 n 項的總和爲 n^2

《答案》B

13. (　)如圖，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$相交於 O 點，且$\overline{OA}=\overline{OD}$，$\overline{OB}=\overline{OC}$，則下列哪些敘述是正確的？

甲：$\triangle AOB\cong\triangle DOC$　乙：$\angle B=\angle C$　丙：$\angle A=\angle C$

丁：$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$　戊：$\overline{AB}=\overline{CD}$



(A)甲、乙

(B)甲、乙、戊

(C)甲、乙、丙、戊

(D)甲、乙、丁、戊

《答案》D

14. (　　) 下列敘述，何者錯誤？

(A)若 a 為奇數，則 $(a+1)^2-a^2$ 必為奇數

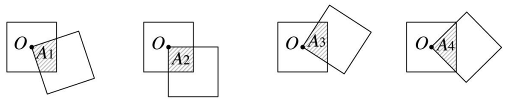
(B)若 a 為偶數，則 $(a+1)^2$ 必為奇數

(C)若 a 為偶數，則 a^2 必為 4 的倍數

(D)若 a 為奇數，則 $3(a+1)^2$ 必為 24 的倍數

《答案》D

15. (　　) 如圖，鋪色區域 A_1、A_2、A_3、A_4 為兩個相同的正方形之重疊部分，其中 O 為正方形兩對角線之交點，則下列敘述何者正確？



(A)$A_1>A_2$　(B)$A_2>A_3$　(C)$A_3>A_1$　(D)$A_1=A_4$

《答案》D

16. (　　) 已知 a、b 兩整數的乘積為偶數，b、c 兩整數的和為奇數，如果 c 為奇數，則下列敘述何者正確？

(A)a 為偶數，b 為奇數

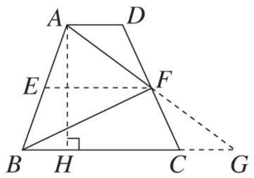
(B)a 可能是奇數或偶數

(C)a、b 兩整數必定都是偶數

(D)a、b 兩整數必定都是奇數

《答案》B

17. (　　) 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於 H 點，E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的中點，直線 AF 與直線 BC 交於 G，請問可根據下列哪一種全等性質得到△ADF≅△GCF？



(A)SSS　(B)SAS　(C)AAS　(D)ASS

《答案》C

18. (　　) 小明欲將 11^2 表示成連續奇數的和，則下列何者正確？

(A)$11^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17$

(B)$11^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

(C)$11^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

(D)$11^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23$

《答案》C

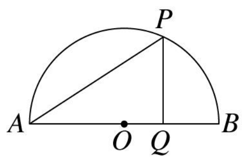
19. (　　) 若 a 為正整數，則下列哪一個式子所表示的數一定為 8 的倍數？

(A)$(a+1)^2-a^2$　(B)$(a+2)^2-a^2$

(C)$(a+3)^2-a^2$　(D)$(a+4)^2-a^2$

《答案》D

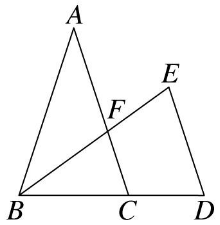
20. (　　) 如圖，半圓 O 中，$\overline{AB}$ 為直徑，且 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{AB}$，Q 為垂足，若 $\overline{AB}=10$，$\overline{PA}=8$，則 $\overline{PQ}$ $=$？



(A) $\dfrac{24}{5}$　(B)5　(C) $\dfrac{26}{5}$　(D) $\dfrac{27}{5}$

《答案》A

(　)如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BE}$ 平分∠ABC，並交 $\overline{AC}$ 於 F，且 $\overline{AF}=\overline{BF}$。若 $\overline{DE}\,//\,\overline{AC}$，則下列推論何者正確？



(A)∠A＝18°

(B)△BCF 為等腰三角形

(C)△ABF 為正三角形

(D)△ABC≅△BED

《答案》B

22.（　）如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{DC}$，甲生想證明 $\overline{AC}=\overline{DB}$，他的證明過程如下：

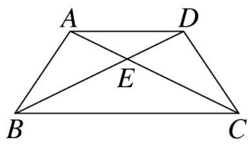
因為四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，所以∠ABC＝∠DCB，

在△ABC 和△DCB 中，

因為∠ABC＝∠DCB，$\overline{AB}=\overline{DC}$，

所以△ABC≅△DCB，故 $\overline{AC}=\overline{DB}$。

乙生看了證明後，表示在證明△ABC≅△DCB 的過程中缺了一個條件，你認為應加上下列哪一個條件，才能使證明完整？



(A) $\overline{BE}=\overline{CE}$

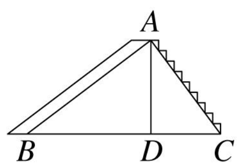
(B) $\overline{BC}=\overline{BC}$

(C)∠AEB＝∠DEC

(D)∠AED＝∠BEC

《答案》B

23.（　）<u>欣欣樂園</u>內有一座滑水道，爬梯 $\overline{AC}$ 長 20 公尺，滑水道高 $\overline{AD}$ 為 16 公尺，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的夾角為 90°，則滑水道底部到爬梯底部 $\overline{BC}$ 的距離為多少公尺？



(A) $\dfrac{64}{3}$　(B) $\dfrac{80}{3}$　(C) $\dfrac{90}{3}$　(D) $\dfrac{100}{3}$

《答案》D

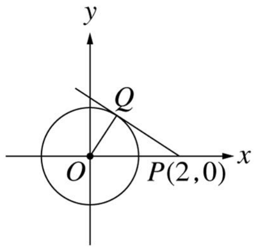
24.（　）在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則下列敘述何者<u>錯誤</u>？

(A)∠B 可能為鈍角

(B)$\angle B=\angle C$
(C)$\angle A+\angle B+\angle C=180°$
(D)$\angle A$ 可能為鈍角

《答案》A

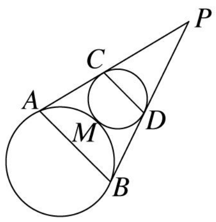
25. (　)如圖，坐標平面上，圓 O 的圓心為原點$(0,0)$，其半徑等於 1，若由點 $P(2,0)$對圓作切線，切點為 Q 點，則 Q 點坐標為何？



(A)$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　(B)$(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$　(C)$(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{6})$　(D)$(\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{8})$

《答案》A

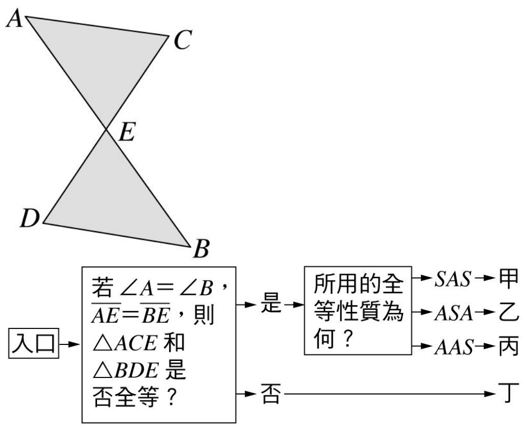
(　)如圖，有大小兩圓外切於 M 點，P 為兩圓外一點，過 P 點做兩圓的公切線，公切線交大圓於 A、B 兩點，交小圓於 C、D 兩點，連接 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$，則下列敘述中，正確的有幾個？
甲：$\overline{AC}=\overline{BD}$
乙：$\triangle PAB\sim\triangle PCD$
丙：$\angle BAC=90°$
丁：四邊形 $ABDC$ 是等腰梯形
戊：$\overline{AB}$ 的中垂線會通過大圓圓心，但不會通過小圓圓心



(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

《答案》B

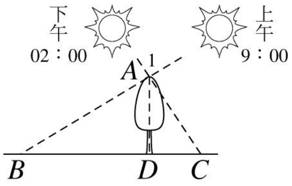
27. (　)有一個數學遊戲如下圖所示：由左方入口進入，依框內指示，根據下圖兩個三角形判斷正確的路徑，則出口為何？



(A)甲　(B)乙　(C)丙　(D)丁

《答案》B

28. (　)如圖，上午 9 時，樹影 $\overline{BD}=15$ 公尺，下午 2 時，樹影 $\overline{CD}=6$ 公尺，若已知兩次光線的夾角$\angle 1=90°$，則樹高 $\overline{AD}$ 約多少公尺？



(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

《答案》C

29. (　) 如圖，分別以△ABC 的兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 爲邊，向外作正三角形△ABD 和△ACE，求證：$\overline{BE}$ ＝ $\overline{CD}$ ，小安的證明過程如下：

(1)∵△ABD 爲正三角形

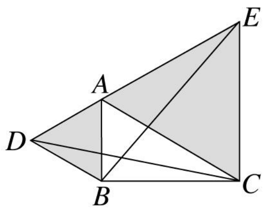
∴ $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\angle BAD=60°$

同理：$\overline{AE}=\overline{AC}$ ，$\angle CAE=60°$

(2) ∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\overline{AE}=\overline{AC}$ ，$\angle CAE=\angle BAD$

∴△ABE ≅△ADC(SAS 全等性質)，故 $\overline{BE}=\overline{CD}$

阿宏發現小安的證明過程中有一個地方錯誤，請問是下列何者？

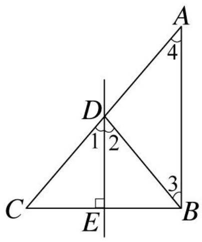


(A)∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$　(B) $\angle CAE=\angle BAD$

(C) $\overline{AE}=\overline{AC}$　(D)利用 SAS 全等性質證明全等

《答案》B

30. (　) 如圖，△ABC 爲直角三角形，$\angle ABC=90°$，過 $\overline{AC}$ 中點 D 作 $\overline{DE}\perp\overline{BC}$ ，且交 $\overline{BC}$ 於 E 點，則下列敘述何者正確？



甲：∵△CDE≅△BDE，∴$\angle 1=\angle 2$

乙：∵△CDB≅△ADB，∴$\angle C=\angle 4$

丙：∵△CED～△CBA，∴$\overline{DE}:\overline{AB}=1:2$

丁：∵ $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ ，又 $\overline{CD}=\overline{DA}$ ，∴ $\overline{CE}=\overline{EB}$

(A)甲、乙　(B)甲、乙、丙

(C)甲、丙、丁　(D)乙、丙

《答案》C

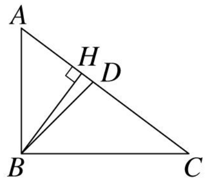
31. (　) 兩個直角三角形在下列何種條件下不一定全等？

(A)兩銳角對應相等　(B)一斜邊及一股等長

(C)兩股對應相等　(D)一斜邊及一銳角對應相等

《答案》A

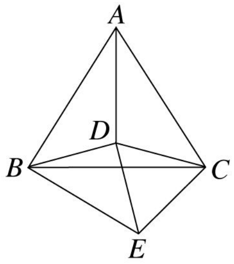
32. (　) 如圖，△ABC 中，若 $\angle ABC=90°$，$\overline{BH}\perp\overline{AC}$ ，$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$。已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，則 $\overline{DH}$ ＝？



(A)$\frac{12}{35}$　(B)$\frac{17}{35}$　(C)$\frac{21}{35}$　(D)$\frac{27}{35}$

《答案》A

33. (　) 如圖，$\triangle ABC$ 和$\triangle CDE$ 均爲正三角形，且$\angle BDC=150°$，則下列敘述何者錯誤？

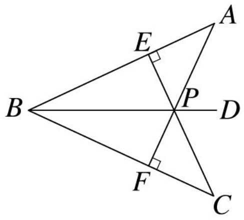


(A)$\triangle ADC \cong \triangle BEC$　(B)$\overline{BD}^2+\overline{DE}^2=\overline{BE}^2$

(C)$\overline{BD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AD}^2$　(D)$\triangle ADC \cong \triangle BDC$

《答案》D

34. (　) 如圖，$\overline{BD}$ 平分$\angle ABC$，P 為$\overline{BD}$ 上一點，連接直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 F 點，連接直線 CP 交 $\overline{AB}$ 於 E 點，且 $\overline{PE} \perp \overline{AB}$，$\overline{PF} \perp \overline{BC}$，則下列敘述何者錯誤？



(A)$\because \triangle BPE \cong \triangle BPF$，$\therefore \overline{PE}=\overline{PF}$

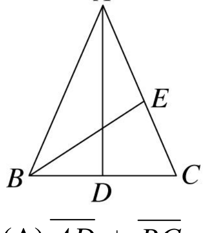
(B)$\because \overline{PE} \perp \overline{AB}$，$\therefore \overline{PE}=\overline{AE}$

(C)$\because \triangle APE \cong \triangle CPF$，$\therefore \overline{AP}=\overline{CP}$

(D)$\because \triangle BAP \cong \triangle BCP$，$\therefore \angle BAP=\angle BCP$

《答案》B

35. (　) 如圖，在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 分別平分$\angle BAC$、$\angle ABC$，下列敘述何者不一定正確？

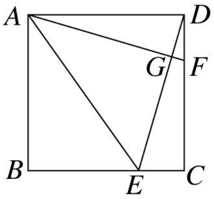


(A)$\overline{AD} \perp \overline{BC}$　(B)$\triangle ADC \cong \triangle ADB$

(C)$\overline{BD}=\overline{CD}$　(D)$\angle CBE=\angle CAD$

《答案》D

36. (　) 如圖，四邊形 $ABCD$ 爲正方形，且 $\overline{DF}=\overline{EC}$，則下列敘述何者正確？



(A)$\triangle ADF \cong \triangle DCE$　(B)$\triangle ADF \cong \triangle ABE$

(C) $\overline{AE} = \overline{DE}$　(D) $\overline{AE} = \overline{AF}$

《答案》A

37.（　）在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，已知$\overline{AB} = \overline{DE}$，$\overline{BC} = \overline{EF}$，若欲證明$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，試判斷下列敘述何者錯誤？

(A)欲使用 SSS 全等，應加條件$\overline{AC} = \overline{DF}$，方能使兩個三角形全等

(B)欲使用 SAS 全等，應加條件$\angle C = \angle F$，方能使兩個三角形全等

(C)欲使用 RHS 全等，應加條件$\angle C = \angle F = 90°$，方能使兩個三角形全等

(D)欲使用 RHS 全等，應加條件$\angle A = \angle D = 90°$，方能使兩個三角形全等

《答案》B

38.（　）若直線 L 為$\overline{BC}$的中垂線，且 A 為 L 上一點，則$\triangle ABC$必為何種三角形？

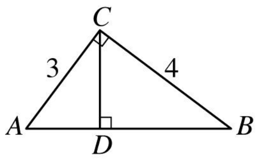
(A)正三角形　(B)等腰三角形

(C)直角三角形　(D)不等邊三角形

《答案》B

二、填充

1. 如圖，$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$於 D，若$\overline{AC} = 3$，$\overline{BC} = 4$，則：



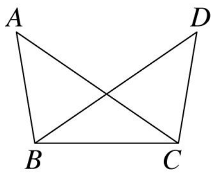
(1) $\overline{AD} \times \overline{BD}$的值為________。

(2) $\overline{AD} =$________。

(3)$\triangle ABC$面積：$\triangle CBD$面積＝________。

《答案》(1)$\dfrac{144}{25}$　(2)$\dfrac{9}{5}$　(3)25：16

2. 已知：如圖，$\overline{AB} = \overline{CD}$，$\overline{AC} = \overline{DB}$。



求證：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$。

【證明】$\because \overline{AB} =$________(已知)

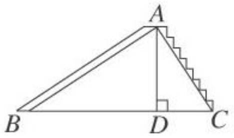
$\overline{AC} =$________(已知)

$\overline{BC} =$________(共用邊)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$(________全等性質)

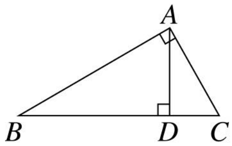
《答案》$\overline{CD}$，$\overline{DB}$，$\overline{BC}$，SSS

3. 如圖，泳池內有一座小型滑水道，其中$\overline{AB}$與$\overline{AC}$的夾角為 90°，已知$\overline{AC}$長 1.5 公尺，$\overline{AD}$為 1.2 公尺，則$\overline{BC}$為________公尺。



《答案》2.5

4. 如圖，已知直角三角形 ABC 的面積爲 $18\sqrt{3}$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{AC}=6$，則 $\overline{AB}:\overline{BD}=$____ $:\sqrt{3}$。



《答案》2

5. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$，且 $\overline{BC}=15$，則：

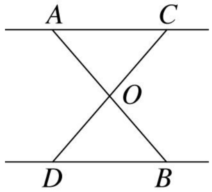
(1) $\overline{CD}=$________。

(2) $\triangle ABC$ 面積＝________。

《答案》(1)3　(2)45

6. 完成下列空格。

已知：如圖，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 O 點，且 $\overline{AO}=\overline{BO}$，$\overline{CO}=\overline{DO}$。



求證：$\angle CAO=\angle DBO$。

【證明】$\because\overline{AO}=$________(已知)

$\angle AOC=$________ (________相等)

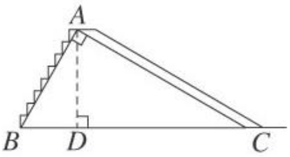
$\overline{CO}=$________(已知)

$\therefore\triangle AOC\cong\triangle$________ (________全等性質)

$\Rightarrow\angle CAO=\angle DBO$

《答案》$\overline{BO}$，$\angle BOD$，對頂角，$\overline{DO}$，BOD，SAS

7. 附圖是一個溜滑梯，已知 $\angle BAC=90°$，$\overline{BD}=4$ 公尺，A 點離地面 $\overline{BC}$ 的高度 $\overline{AD}$ 爲 6 公尺，則 $\overline{CD}$ ＝________公尺。



《答案》9

8. 若將連續正整數 1、2、3、┌┌，依序每 5 個分成一組，如下所示，則：

第一組：1、6、11、┌┌。

第二組：2、7、12、┌┌。

第三組：3、8、13、┌┌。

第四組：4、9、14、┌┌。

第五組：5、10、15、┌┌。

(1)11111 分在第________組。

(2)55555 分在第________組。

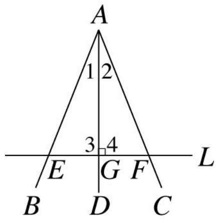
(3)第三組的第 n 個數爲________。(以 n 表示)

(4)第四組的第$(n+1)$個數爲________。(以 n 表示)

《答案》(1)一　(2)五　(3)$5n-2$　(4)$5n+4$

9. 完成下列空格。

已知：如圖，$\overline{AD}$ 爲 $\angle BAC$ 的角平分線。



求證：若直線 $L\perp\overline{AD}$ 且交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 於 E、F 兩點，則 $\overline{AE}=\overline{AF}$ 。

【證明】$\because$________＝________ ($\overline{AD}$ 爲 $\angle BAC$ 的角平分線)

________＝________ (共用邊)

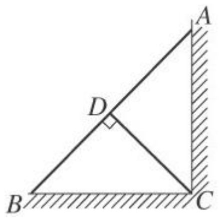
________＝________ ($\overline{AD}\perp L$)

$\therefore\triangle AEG\cong\triangle$________ ($ASA$ 全等性質)

$\Rightarrow\overline{AE}=\overline{AF}$

《答案》$\angle 1$，$\angle 2$，$\overline{AG}$，$\overline{AG}$，$\angle 3$，$\angle 4$，AFG

10. 如圖，梯子 $\overline{AB}$ 斜放在垂直於地面的牆上，爲了要讓梯子更穩定，多加了支架 $\overline{CD}$ 支撐，已知 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，且 $\overline{AB}=16$ 公尺，$\overline{AC}=12$ 公尺，則 $\overline{AD}=$________公尺。



《答案》9

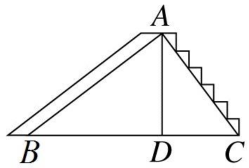
11. 直角△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，$\overline{BC}=2\overline{AB}$，則△$ABD$ 面積：△CAD 面積＝________。

《答案》1：3

12. 在△ABC 中，已知 $\angle BAC=90°$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，若 $\overline{BD}=3$，$\overline{CD}=2$，則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=$________。

《答案》31

13. 美玲想在泳池內建造一座滑水道，樓梯 $\overline{AC}$ 長 6 公尺，且 $\overline{CD}$ 爲 4 公尺，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的夾角爲 90°，$\angle ADC$ 亦爲 90°，則滑水道底部到樓梯底部 $\overline{BC}$ 的距離爲________公尺。



《答案》9

三、證明

1. 已知：a 爲任意一個奇數，b 爲任意一個偶數，且 $a>b$。

求證：$(a+b)(a-b)$爲奇數。

《答案》設 $a=2m-1$(其中 m 爲整數)，$b=2n$(其中 n 爲整數)

$\therefore(a+b)(a-b)=a^2-b^2=(2m-1)^2-(2n)^2$

$=4m^2-4m+1-4n^2=2(2m^2-2m-2n^2)+1$

其中 $2(2m^2-2m-2n^2)$為偶數，得$(a+b)(a-b)$為奇數

2. 已知：a 為任意一個奇數，b 為任意一個偶數。
   求證：$a\times b$ 為偶數。

《答案》$\because a$ 為奇數，可設 $a=2n+1$(其中 n 為整數)
b 為偶數，可設 $b=2m$(其中 m 為整數)
$\therefore a\times b=(2n+1)\times 2m=4nm+2m=2(2nm+m)$
其中 $2(2nm+m)$為偶數，故 $a\times b$ 為偶數

3. 已知：$a>b>0$。
   求證：$a^2>b^2$。

《答案》$\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)$┌┌①
又 $a>b>0$，則 $a+b>0$，且 $a-b>0$
$\therefore$①中，$a+b$ 和 $a-b$ 都是正數
得 $a^2-b^2>0$，故 $a^2>b^2$

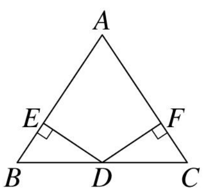
4. 已知：直角$\triangle ABC$ 的三邊長為 a、b、c(a、b、c 均為正整數)，其中 c 為斜邊。
   求證：b^2 是$(c+a)$的倍數。

《答案》$\because a$、b、c 為直角$\triangle ABC$ 的三邊長，且 c 為斜邊
$\therefore a^2+b^2=c^2$
得 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$，故 b^2 是$(c+a)$的倍數

5. 已知：a 為任意一個偶數，b 為任意一個奇數。
   求證：(a^2+b^2)為奇數。

《答案》設 $a=2m$(其中 m 為整數)，$b=2n+1$(其中 n 為整數)
$\therefore a^2+b^2=(2m)^2+(2n+1)^2$
$=4m^2+4n^2+4n+1=2(2m^2+2n^2+2n)+1$
其中 $2(2m^2+2n^2+2n)$為偶數，得(a^2+b^2)為奇數

6. 已知：如圖，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$，$\overline{DE}=\overline{DF}$。



   求證：$\triangle ABC$ 為等腰三角形。

《答案》D 爲 $\overline{BC}$ 的中點，所以 $\overline{BD}=\overline{CD}$

在△BDE 和△CDF 中

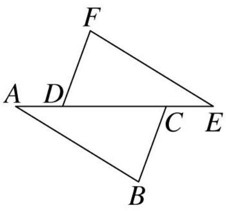
$\because \overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{DE}=\overline{DF}$，$\angle BED=90°=\angle CFD$

$\therefore$△$BDE\cong$△CDF(RHS 全等性質)

$\Rightarrow \angle B=\angle C$(對應角相等)

$\Rightarrow$△ABC 爲等腰三角形

7. 已知：如圖，$\overline{AD}=\overline{CE}$，$\overline{AB}\,//\,\overline{EF}$，$\overline{AB}=\overline{EF}$。



求證：$\overline{BC}\,//\,\overline{DF}$。

《答案》$\because \overline{AB}\,//\,\overline{EF}$，$\therefore \angle A=\angle E$(內錯角相等)

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{CD}=\overline{DE}$

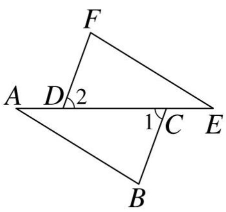
在△ABC 和△EFD 中

$\because \overline{AB}=\overline{EF}$，$\angle A=\angle E$，$\overline{AC}=\overline{DE}$

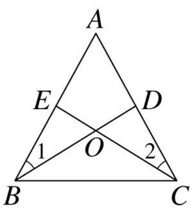
$\therefore$△$ABC\cong$△EFD(SAS 全等性質)

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$(對應角相等)

$\Rightarrow \overline{BC}\,//\,\overline{DF}$ (內錯角相等)



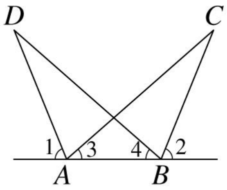
8. 已知：如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle 1=\angle 2$。



求證：(1) $\overline{OB}=\overline{OC}$。　(2) $\overline{OD}=\overline{OE}$。

《答案》(1)$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB$
$\angle OBC=\angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2=\angle OCB$
$\Rightarrow \overline{OB}=\overline{OC}$ (等角對等邊)
(2)在$\triangle OBE$和$\triangle OCD$中
$\because \angle 1=\angle 2$，$\overline{OB}=\overline{OC}$，$\angle BOE=\angle COD$(對頂角)
$\therefore \triangle OBE\cong\triangle OCD$($ASA$全等性質)
$\Rightarrow \overline{OE}=\overline{OD}$ (對應邊)

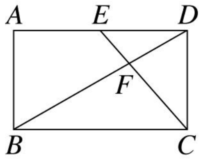
9. 已知：如圖，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$。



求證：$\overline{AC}=\overline{BD}$。

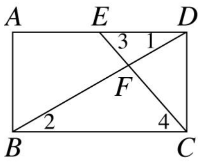
《答案》$\angle ABC=180°-\angle 2=180°-\angle 1=\angle DAB$
在$\triangle ABC$和$\triangle BAD$中
$\because \angle ABC=\angle DAB$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，$\angle 3=\angle 4$
$\therefore \triangle ABC\cong\triangle BAD$($ASA$全等性質)
$\Rightarrow \overline{AC}=\overline{BD}$ (對應邊相等)

10. 已知：如圖，$\overline{BD}$爲長方形$ABCD$的對角線，E爲$\overline{AD}$中點，$\overline{CE}$交$\overline{BD}$於F點。

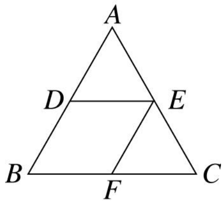


求證：$\overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{BD}$。

《答案》$\because \overline{AD}/\!/\overline{BC}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$
$\Rightarrow \triangle EFD\sim\triangle CFB$($AA$相似性質)
又$\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$
$\therefore \overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BF}$
$\Rightarrow \overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{BD}$



11. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} // \overline{BC}$，$\overline{EF} // \overline{AB}$。



求證：$\overline{AD}$ ：$\overline{DB} = \overline{BF}$ ：$\overline{FC}$。

《答案》$\because \overline{DE} // \overline{BC}$，$\therefore \overline{AD}$ ：$\overline{DB} = \overline{AE}$ ：$\overline{EC}$……①

$\because \overline{EF} // \overline{AB}$，$\therefore \overline{EC}$ ：$\overline{AE} = \overline{FC}$ ：$\overline{BF}$……②

由①、②得 $\overline{AD}$ ：$\overline{DB} = \overline{BF}$ ：$\overline{FC}$

12. 已知：$a > b > c > 0$。

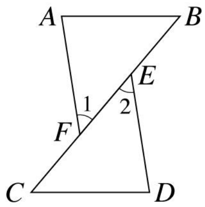
求證：$\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+c}$。

《答案》$\because \dfrac{a}{b} - \dfrac{a+c}{b+c} = \dfrac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)} = \dfrac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}$

$= \dfrac{ac-bc}{b(b+c)} = \dfrac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$

$\therefore \dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+c}$

13. 已知：如圖，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle B = \angle C$，$\overline{BE} = \overline{CF}$。



求證：$\overline{AB} = \overline{CD}$。

《答案》$\because \overline{BE} = \overline{CF}$ (已知)，又 $\overline{EF} = \overline{EF}$

$\therefore \overline{BE} + \overline{EF} = \overline{CF} + \overline{EF}$

$\Rightarrow \overline{BF} = \overline{CE}$

$\triangle ABF$ 和 $\triangle DCE$ 中

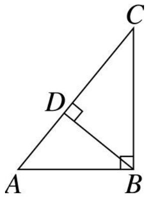
$\because \angle B = \angle C$，$\angle 1 = \angle 2$，$\overline{BF} = \overline{CE}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$($ASA$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

14. 已知：如圖，直角△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$ 。

求證：$\overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$ 。



《答案》在△ABC 和△ADB 中

$\because \overline{BD}\perp\overline{AC}$

$\therefore \angle ABC=\angle ADB=90°$

又$\angle A=\angle A$(共用角)

$\therefore$△$ABC\sim$△ADB(AA 相似性質)

$\Rightarrow \overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{AB}^2=\overline{AC}\times\overline{AD}$

15. 已知：直角三角形三邊長為 a、b、$a+4$(a、b 為正整數)，其中($a+4$)為斜邊長。

求證：b^2 為 8 的倍數。

《答案》$\because a$、b、$a+4$ 為直角三角形的三邊長

且 $a+4$ 為斜邊長

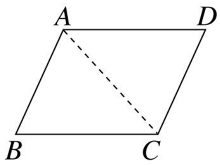
$\therefore (a+4)^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2+8a+16=a^2+b^2$

$\Rightarrow b^2=8a+16=8(a+2)$

故 b^2 為 8 的倍數

16. 已知：如圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



求證：△$ABC\cong$△CDA 。

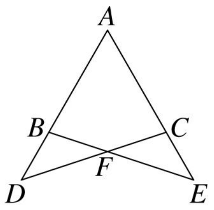
《答案》$\because$四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$

又 $\overline{AC}=\overline{AC}$ (共用邊)

$\therefore$△$ABC\cong$△CDA(SSS 全等性質)

17. 已知：如圖，A、B、D 三點共線，A、C、E 三點亦共線，而且 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CE}$ 。



求證：$\overline{DF}=\overline{EF}$ 。

《答案》$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AE}$

在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=\angle A$(共用角)，$\overline{AE}=\overline{AD}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$($SAS$全等性質)

$\Rightarrow \angle E=\angle D$(對應角)

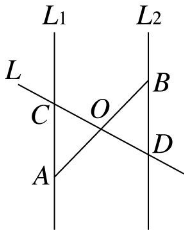
在$\triangle BDF$和$\triangle CEF$中

$\because \angle D=\angle E$，$\angle BFD=\angle CFE$(對頂角)，$\overline{BD}=\overline{CE}$

$\therefore \triangle BDF\cong\triangle CEF$($AAS$全等性質)

$\Rightarrow \overline{DF}=\overline{EF}$(對應邊)

18. 已知：如圖，$L_1//L_2$，O 為$\overline{AB}$的中點。



求證：若直線L過O點，且與L_1、L_2相交於C、D兩點，則$\overline{CO}=\overline{DO}$ 。

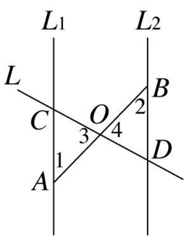
《答案》如圖，$\because \angle 1=\angle 2$(內錯角相等)

$\overline{AO}=\overline{BO}$($O$為$\overline{AB}$中點)

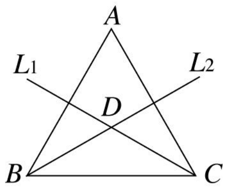
$\angle 3=\angle 4$(對頂角相等)

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$($ASA$全等性質)

$\Rightarrow \overline{CO}=\overline{DO}$



19. 已知：如圖，L_1、L_2分別為$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$的中垂線且相交於D點。



求證：$\overline{BD}=\overline{CD}$ 。

《答案》連接 $\overline{AD}$ ，如圖

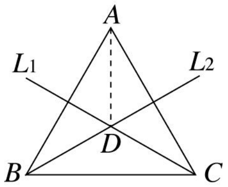
$\because L_1$ 爲 $\overline{AB}$ 的中垂線

$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}$……①

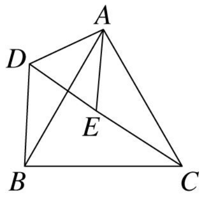
$\because L_2$ 爲 $\overline{AC}$ 的中垂線

$\therefore \overline{AD}=\overline{CD}$……②

由①、②得 $\overline{BD}=\overline{CD}$



20. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 皆爲正三角形。



求證：$\overline{BD}=\overline{CE}$ 。

《答案》在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

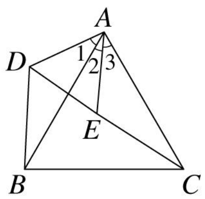
$\because \overline{AB}=\overline{AC}$ (大三角形的邊長)

$\angle 1=60°-\angle 2=\angle 3$

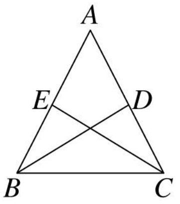
$\overline{AD}=\overline{AE}$ (小三角形的邊長)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 全等性質)

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{CE}$ (對應邊)



21. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$，$\overline{CE}$ 平分 $\angle ACB$。



求證：$\overline{BD}=\overline{CE}$ 。

《答案》$\because \overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\therefore \angle ABC=\angle ACB$

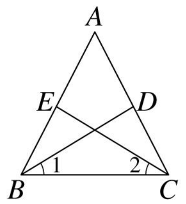
$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle 2$

在$\triangle BCD$和$\triangle CBE$中

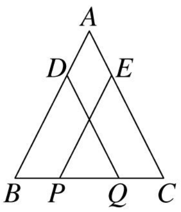
$\because \angle 1=\angle 2$，$\overline{BC}=\overline{BC}$ ，$\angle ACB=\angle ABC$

$\therefore \triangle BCD\cong\triangle CBE$($ASA$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{CE}$(對應邊相等)



22. 已知：如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{AD}=\overline{AE}$ ，$\overline{BP}=\overline{CQ}$ 。



求證：$\angle DQB=\angle EPC$，$\overline{DQ}=\overline{EP}$ 。

《答案》$\overline{AB}=\overline{AC}\Rightarrow\angle B=\angle C$

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{AE}=\overline{CE}$

$\overline{BQ}=\overline{BP}+\overline{PQ}=\overline{CQ}+\overline{PQ}=\overline{CP}$

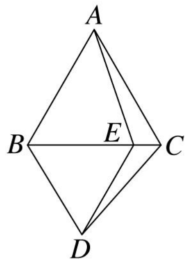
在$\triangle BDQ$和$\triangle CEP$中

$\because \overline{BD}=\overline{CE}$ ，$\angle B=\angle C$，$\overline{BQ}=\overline{CP}$

$\therefore \triangle BDQ\cong\triangle CEP$($SAS$ 全等性質)

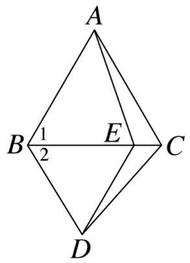
$\Rightarrow \angle DQB=\angle EPC$(對應角)，$\overline{DQ}=\overline{EP}$(對應邊)

23. 已知：如圖，$\triangle ABC$和$\triangle BDE$皆爲正三角形。



求證：$\overline{AE}=\overline{CD}$。

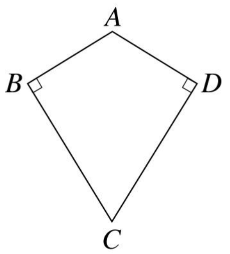
《答案》如圖，∵△ABC 和△BDE 爲正三角形
∴$\angle 1=60°=\angle 2$
在△ABE 和△CBD 中
∵$\overline{AB}=\overline{CB}$，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{BE}=\overline{BD}$
∴△$ABE \cong$ △CBD(SAS 全等性質)
$\Rightarrow \overline{AE}=\overline{CD}$



24. 已知：a、b 爲連續的正偶數($a>b$)。
求證：(a^2-b^2)爲 4 的倍數。

《答案》設 $a=2k+2$，$b=2k$(其中 k 爲正整數)
$a^2-b^2=(2k+2)^2-(2k)^2=4k^2+8k+4-4k^2=8k+4$
$=4(2k+1)$，爲 4 的倍數
故(a^2-b^2)爲 4 的倍數

25. 已知：如圖，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle B=\angle D=90°$。



求證：$\overline{BC}=\overline{DC}$。

《答案》連接$\overline{AC}$，如圖

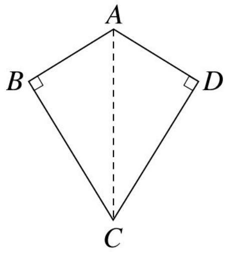
$\because \overline{AC}=\overline{AC}$(共用邊)

$\overline{AB}=\overline{AD}$(已知)

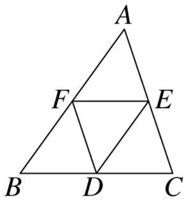
$\angle B=\angle D=90°$(已知)

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$($RHS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{BC}=\overline{DC}$



26. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分別為$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點。
求證：$\triangle DEF$ 面積＝$\triangle AEF$ 面積＝$\triangle BDF$ 面積＝$\triangle CDE$ 面積。



《答案》$\triangle ABC$ 中，$\because E$、F 分別為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$中點

$\therefore \overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，又 D 為$\overline{BC}$中點$\Rightarrow \overline{EF}=\overline{BD}$

同理$\overline{DE}=\overline{BF}$，又$\overline{DF}=\overline{DF}$(共用邊)

$\therefore \triangle DEF\cong\triangle FBD$($SSS$ 全等性質)

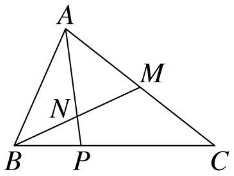
$\Rightarrow \triangle DEF$ 面積＝$\triangle FBD$ 面積

同理可證$\triangle DEF$ 面積＝$\triangle AEF$ 面積，

$\triangle DEF$ 面積＝$\triangle CDE$ 面積

故$\triangle DEF$ 面積＝$\triangle AEF$ 面積＝$\triangle BDF$ 面積＝$\triangle CDE$ 面積

27. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 中，M 為$\overline{AC}$的中點，N 為$\overline{BM}$的中點，直線 AN 交$\overline{BC}$於 P 點。
求證：$\overline{CP}=2\overline{BP}$。

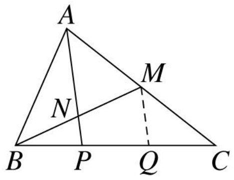


《答案》過 M 點，作$\overline{MQ}\,//\,\overline{AP}$，如圖

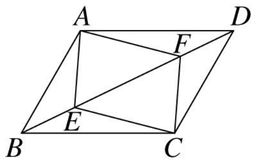
$\triangle ACP$ 中，$\because M$ 為$\overline{AC}$中點

且$\overline{MQ}\,//\,\overline{AP}$，$\therefore Q$ 為$\overline{CP}$中點

即$\overline{CQ}=\overline{PQ}$……①
$\triangle BQM$ 中，$\because N$ 為 $\overline{BM}$ 中點
又 $\overline{NP}\,//\,\overline{MQ}$ ，$\therefore P$ 為 $\overline{BQ}$ 中點
即$\overline{BP}=\overline{PQ}$……②
由①、②得知$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{CQ}$，故$\overline{CP}=2\,\overline{BP}$

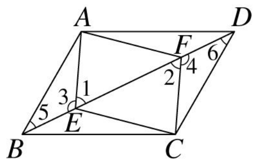


28. 已知：如圖，四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形，且 $\overline{AE}\,//\,\overline{CF}$ 。

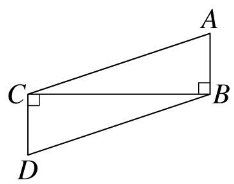


求證：$\overline{BE}=\overline{DF}$ ，$\overline{AE}=\overline{CF}$ 。

《答案》$\because$四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{CD}$ ，$\angle 5=\angle 6$(內錯角)
$\because\ \overline{AE}\,//\,\overline{CF}$ ，$\therefore\ \angle 1=\angle 2$(內錯角)
$\angle 3=180^\circ-\angle 1=180^\circ-\angle 2=\angle 4$
在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中
$\because\ \angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\overline{AB}=\overline{CD}$
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CDF$($AAS$ 全等性質)
$\Rightarrow\overline{BE}=\overline{DF}$ ，$\overline{AE}=\overline{CF}$ (對應邊)



29. 已知：如圖，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{CD}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{AC}=\overline{BD}$ 。



求證：$\overline{AB}=\overline{CD}$ 。

《答案》$\overline{AB}\perp\overline{BC}\Rightarrow\angle ABC=90^\circ$
$\overline{CD}\perp\overline{BC}\Rightarrow\angle DCB=90^\circ$

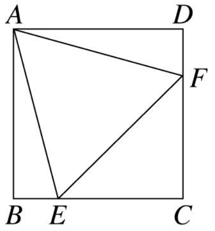
在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中

$\because \overline{AC}=\overline{BD}$，$\overline{BC}=\overline{BC}$，$\angle ABC=90°=\angle DCB$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$($RHS$全等性質)

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$(對應邊相等)

30. 已知：如圖，四邊形$ABCD$爲正方形，E、F分別在$\overline{BC}$、$\overline{CD}$上，$\triangle AEF$爲正三角形。



求證：$\overline{BE}=\overline{DF}$。

《答案》$\triangle ABE$和$\triangle ADF$中

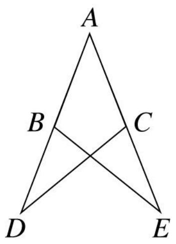
$\because$四邊形$ABCD$爲正方形，$\triangle AEF$爲正三角形

$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{AE}=\overline{AF}$，$\angle B=\angle D=90°$

$\Rightarrow \triangle ABE\cong\triangle ADF$($RHS$全等性質)

$\Rightarrow \overline{BE}=\overline{DF}$

31. 已知：如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$。



求證：$\angle D=\angle E$。

《答案》$\because \overline{AB}=\overline{AC}$(已知)

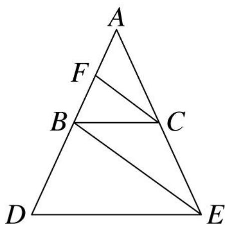
$\overline{AE}=\overline{AD}$(已知)

$\angle A=\angle A$(共用角)

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$($SAS$全等性質)

$\Rightarrow \angle D=\angle E$

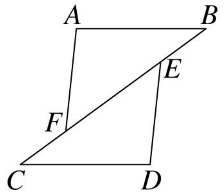
32. 已知：如圖，$\triangle ADE$中，$\overline{FC}\,//\,\overline{BE}$，$\overline{BC}\,//\,\overline{DE}$。



求證：$\overline{AF}:\overline{FB}=\overline{AB}:\overline{BD}$。

《答案》∵ $\overline{FC} // \overline{BE}$，∴ $\overline{AF}:\overline{FB}=\overline{AC}:\overline{CE}$……①
∵ $\overline{BC} // \overline{DE}$，∴ $\overline{AC}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{BD}$……②
由①、②得 $\overline{AF}:\overline{FB}=\overline{AB}:\overline{BD}$

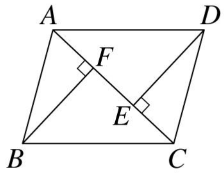
33. 已知：如圖，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$，$\overline{BE}=\overline{CF}$。



求證：$\overline{AB}=\overline{CD}$。

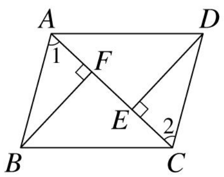
《答案》$\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EF}=\overline{CF}+\overline{EF}=\overline{CE}$
在△ABF 和△DCE 中
∵ $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$，$\overline{BF}=\overline{CE}$
∴△$ABF\cong$△DCE(AAS 全等性質)
$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$(對應邊相等)

34. 已知：如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，$\overline{BF}\perp\overline{AC}$。



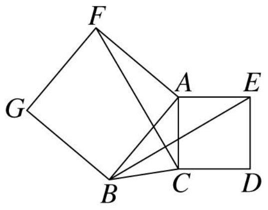
求證：$\overline{BF}=\overline{DE}$。

《答案》∵四邊形 $ABCD$ 爲平行四邊形
∴ $\overline{AB}=\overline{CD}$，而且 $\angle 1=\angle 2$(內錯角相等)
在△ABF 和△CDE 中
∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle AFB=\angle CED=90°$，$\overline{AB}=\overline{CD}$
∴△$ABF\cong$△CDE(AAS 全等性質)
$\Rightarrow \overline{BF}=\overline{DE}$ (對應邊相等)



35. 已知：如圖，以△ABC 的兩邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為邊作正方形 $ABGF$、$ACDE$。

求證：$\overline{BE}=\overline{CF}$ 。



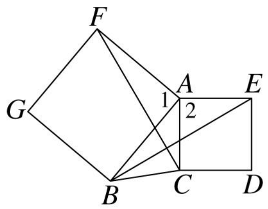
《答案》如圖，在△ABE 和△AFC 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AF}$ (大正方形的邊長)，$\overline{AE}=\overline{AC}$ (小正方形的邊長)

$\angle BAE=\angle BAC+\angle 2=\angle BAC+90°=\angle BAC+\angle 1=\angle FAC$

∴△ABE≅△AFC(SAS 全等性質)

⇒$\overline{BE}=\overline{CF}$ (對應邊相等)



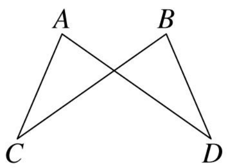
36. 若 a 為正整數，且 a 被 8 除後餘 4，則 a 是偶數，還是奇數？請說明你的理由。

《答案》設 $a=8k+4$(其中 k 為正整數)

故 $a=4(2k+1)$

其中 $2k+1$ 為奇數，所以 a 為偶數

37. 已知：如圖，$\overline{AC}=\overline{BD}$ ，$\overline{AD}=\overline{BC}$ 。



求證：$\angle A=\angle B$。

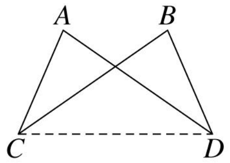
《答案》連接 $\overline{CD}$ ，如圖

在△ACD 和△BDC 中

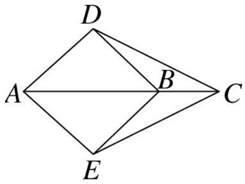
∵ $\overline{AC}=\overline{BD}$ ，$\overline{CD}=\overline{CD}$ ，$\overline{AD}=\overline{BC}$

∴△ACD≅△BDC(SSS 全等性質)

⇒$\angle A=\angle B$

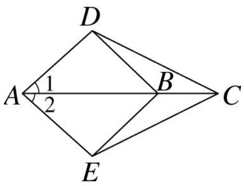


38. 已知：如圖，$\overline{AD}=\overline{AE}$ ，$\overline{BD}=\overline{BE}$ ，C 點在直線 AB 上。

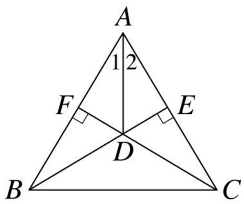


求證：$\overline{CD}=\overline{CE}$ 。

《答案》如圖，在△ABD 和△ABE 中
∵ $\overline{AD}=\overline{AE}$ ，$\overline{BD}=\overline{BE}$ ，$\overline{AB}=\overline{AB}$
∴△$ABD\cong$△ABE(SSS 全等)
⇒$\angle 1=\angle 2$(對應角相等)
在△ACD 和△ACE 中
∵ $\overline{AD}=\overline{AE}$ ，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AC}=\overline{AC}$
∴△$ACD\cong$△ACE(SAS 全等)
⇒$\overline{CD}=\overline{CE}$ (對應邊相等)



39. 已知：如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ ，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$ 。



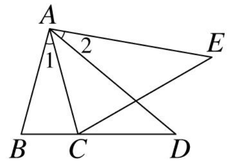
求證：(1) $\overline{AE}=\overline{AF}$ 。 (2) $\angle 1=\angle 2$。

《答案》(1)在△AEB 和△AFC 中
∵ $\overline{BE}\perp\overline{AC}$ ，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$
∴$\angle AEB=\angle AFC=90°$
又$\angle EAB=\angle FAC$，$\overline{AB}=\overline{AC}$
∴△$AEB\cong$△AFC(AAS 全等性質)
⇒$\overline{AE}=\overline{AF}$
(2)∵$\angle AFD=\angle AED=90°$，$\overline{AD}=\overline{AD}$ ，$\overline{AE}=\overline{AF}$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADE$($RHS$ 全等性質)

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

40. 已知：如圖，已知 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，$\overline{AD} = \overline{AE}$ ，$\angle 1 = \angle 2$。



求證：$\overline{BD} = \overline{CE}$ 。

《答案》$\angle BAD = \angle 1 + \angle CAD = \angle 2 + \angle CAD = \angle CAE$

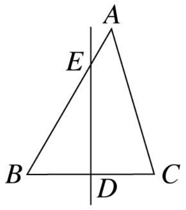
在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中

$\because \overline{AB} = \overline{AC}$ ，$\angle BAD = \angle CAE$，$\overline{AD} = \overline{AE}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$($SAS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{CE}$ (對應邊相等)

41. 已知：如圖，$\overline{DE}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線。

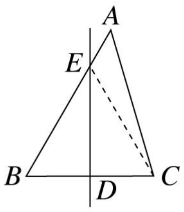


求證：$\triangle AEC$ 周長$= \overline{AB} + \overline{AC}$ 。

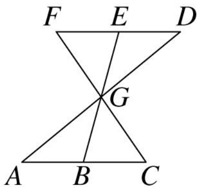
《答案》連接 $\overline{CE}$ ，如圖

$\because \overline{DE}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\therefore \overline{BE} = \overline{CE}$

$\triangle AEC$ 周長$= \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AC}$



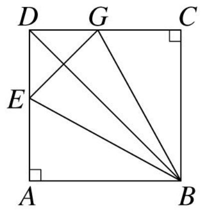
42. 已知：如圖，$\overline{FG} = \overline{CG}$ ，$\overline{AG} = \overline{DG}$ 。



求證：$\overline{BG} = \overline{EG}$ 。

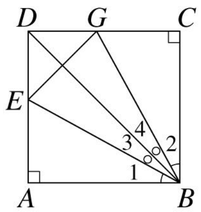
《答案》在$\triangle ACG$和$\triangle DFG$中
$\because \overline{AG}=\overline{DG}$，$\angle AGC=\angle DGF$(對頂角相等)，$\overline{CG}=\overline{FG}$
$\therefore \triangle ACG\cong\triangle DFG$($SAS$全等性質)
$\Rightarrow \angle A=\angle D$(對應角相等)
在$\triangle ABG$和$\triangle DEG$中
$\because \angle A=\angle D$，$\overline{AG}=\overline{DG}$，$\angle AGB=\angle DGE$(對頂角相等)
$\therefore \triangle ABG\cong\triangle DEG$($ASA$全等性質)
$\Rightarrow \overline{BG}=\overline{EG}$(對應邊相等)

43. 已知：如圖，正方形$ABCD$中，$\overline{BE}=\overline{BG}$。

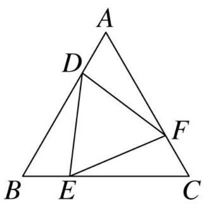


求證：$\overline{BD}$垂直平分$\overline{EG}$。

《答案》(1)在$\triangle ABE$和$\triangle CBG$中
$\because \overline{BE}=\overline{BG}$，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\angle A=\angle C=90^\circ$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBG$($RHS$全等性質)
$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$
(2)$\because \angle 3=45^\circ-\angle 1=45^\circ-\angle 2=\angle 4$，$\overline{BE}=\overline{BG}$
$\therefore \overline{BD}$爲等腰$\triangle BEG$的頂角平分線
$\Rightarrow \overline{BD}$垂直平分$\overline{EG}$



44. 已知：如圖，$\triangle ABC$爲正三角形，且$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$。



求證：$\triangle DEF$爲正三角形。

《答案》在$\triangle ADF$和$\triangle BED$中

$\because \overline{AD}=\overline{BE}$，$\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{CF}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{BD}$

$\angle A=60°=\angle B$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle BED$($SAS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{DF}=\overline{DE}$ (對應邊相等)

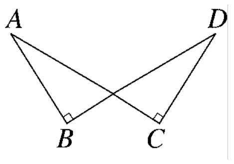
同理可證$\triangle BED\cong\triangle CFE$($SAS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{EF}$ (對應邊相等)

$\because \overline{DE}=\overline{DF}=\overline{EF}$

$\therefore \triangle DEF$ 爲正三角形

45. 已知：如圖，$\overline{AC}=\overline{BD}$，$\angle B=\angle C=90°$。



求證：$\overline{AB}=\overline{CD}$。

《答案》連接$\overline{AD}$，如圖

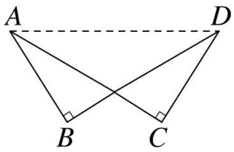
$\because \overline{AD}=\overline{AD}$(共用邊)

$\overline{AC}=\overline{BD}$(已知)

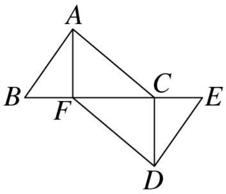
$\angle B=\angle C=90°$(已知)

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle DCA$($RHS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{CD}$



46. 已知：如圖，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BF}=\overline{CE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$。



求證：(1) $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$。　(2) $\overline{AF}\,//\,\overline{CD}$。

《答案》(1) $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{CE}+\overline{CF}=\overline{EF}$

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中

$\because \overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$($SSS$ 全等性質)

$\Rightarrow \angle B=\angle E$，$\angle 1=\angle 2$(對應角)

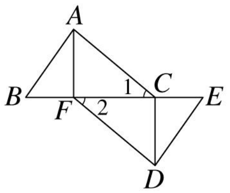
$\because \angle B=\angle E$(內錯角)，$\therefore \overline{AB}\,//\,\overline{DE}$

(2)在△ACF和△DFC中

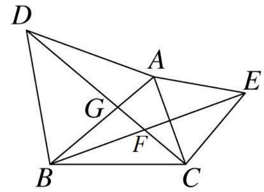
∵ $\overline{AC}=\overline{DF}$，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{CF}=\overline{CF}$(共用邊)

∴△$ACF\cong$△DFC(SAS全等性質) ⇒$\angle AFC=\angle DCF$(對應角)

∵ $\angle AFC=\angle DCF$(內錯角)，∴ $\overline{AF}\,//\,\overline{CD}$



47. 如圖，以△ABC的兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$各向外側作正△ABD和正△ACE，試回答下列問題：



(1)求證：$\overline{BE}=\overline{CD}$。　(2)$\angle DFB=$？

《答案》(1)如圖，在△ACD和△AEB中

∵ $\overline{AC}=\overline{AE}$(正△$ACE$的邊長)

$\angle DAC=\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 2=\angle BAE$

$\overline{AD}=\overline{AB}$(正△$ABD$的邊長)

∴△$ACD\cong$△AEB(SAS全等性質)

⇒$\overline{CD}=\overline{BE}$(對應邊)

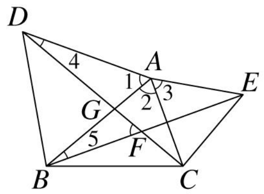
(2)∵△$ACD\cong$△AEB，∴$\angle 4=\angle 5$(對應角)

在△AGD和△FGB中

∵ $\angle 4=\angle 5$，$\angle AGD=\angle FGB$(對頂角)

∴ $\angle GFB=\angle GAD=\angle 1=60°$

⇒$\angle DFB=60°$



48. 已知：a、b為正整數，且$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。

求證：$a>\sqrt{ab}>b$。

《答案》∵ $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，且a、b為正整數

∴ $\sqrt{a}\times\sqrt{a}>\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

⇒$a>\sqrt{ab}$……①

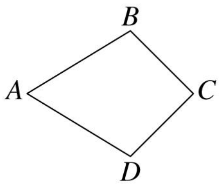
∵ $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，且a、b為正整數

$\therefore \sqrt{a} \times \sqrt{b} > \sqrt{b} \times \sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} > b$ ┌┌②

由①、②得 $a > \sqrt{ab} > b$

49. 已知：如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = \overline{AD}$，$\angle B = \angle D$。



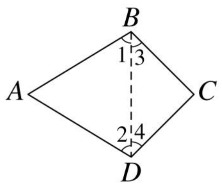
求證：$\overline{BC} = \overline{DC}$。

《答案》連接 $\overline{BD}$，如圖

$\because \overline{AB} = \overline{AD}$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\because \angle B = \angle D$，$\therefore \angle 3 = \angle ABC - \angle 1 = \angle ADC - \angle 2 = \angle 4$

$\because \angle 3 = \angle 4$，$\therefore \overline{BC} = \overline{DC}$



50. 已知：a、b 為正整數，且 $a > b$。

求證：$a > \dfrac{a+b}{2} > b$。

《答案》$\because a > b$，$\therefore a + a > a + b$

得 $a > \dfrac{a+b}{2}$ ┌┌①

$\because a > b$，$\therefore a + b > b + b$

得 $\dfrac{a+b}{2} > b$ ┌┌②

由①、②得 $a > \dfrac{a+b}{2} > b$

51. 已知：a、b 均為正數。

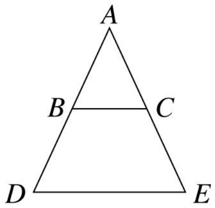
求證：$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$。

《答案》$\because \dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$=\dfrac{(\sqrt{a})^2-2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

52. 已知：如圖，$\triangle ADE$ 中，$\overline{BC}\,//\,\overline{DE}$ 。



求證：$\overline{AB}$ ：$\overline{BD}=\overline{AC}$ ：$\overline{CE}$ 。

《答案》$\because \overline{BC}\,//\,\overline{DE}$ ，$\therefore \angle 2=\angle 1$，$\angle 4=\angle 3$

$\Rightarrow\triangle ADE\sim\triangle ABC$(*AA* 相似性質)

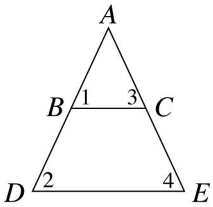
$\Rightarrow\overline{AD}$ ：$\overline{AB}=\overline{AE}$ ：$\overline{AC}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}+\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AC}+\overline{CE}}{\overline{AC}}$

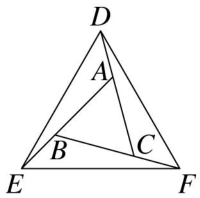
$\Rightarrow 1+\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=1+\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\quad\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$

$\Rightarrow\overline{AB}$ ：$\overline{BD}=\overline{AC}$ ：$\overline{CE}$



53. 已知：如圖，$\triangle ABC$ 是正三角形，且 $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$ 。



求證：$\triangle DEF$ 爲正三角形。

《答案》在$\triangle ADE$ 和$\triangle BEF$ 中

$\because \overline{AD}=\overline{BE}$ ，$\angle DAE=180°-60°=120°=\angle EBF$

$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BF}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BEF$($SAS$ 全等性質)

$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{EF}$ (對應邊)

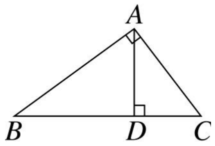
同理可得 $\overline{EF}=\overline{DF}$

因此 $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{DF}$

$\therefore \triangle DEF$ 爲正三角形

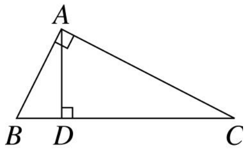
四、計算

1. 如圖，直角△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若 $\overline{AB}=20$，$\overline{AC}=15$，則 $\overline{BD}=$？



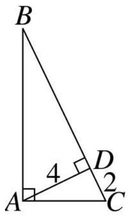
《答案》16

2. 如圖，直角△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若 $\overline{BD}=(\sqrt{3}-1)$公分，$\overline{CD}=(1+\sqrt{3})$公分，則 $\overline{AD}=$？



《答案》$\sqrt{2}$

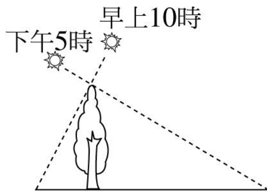
3. 如圖，△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}$ 爲斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，若 $\overline{AD}=4$，$\overline{CD}=2$，試求：



(1) $\overline{AC}=$？　(2) $\overline{BD}=$？

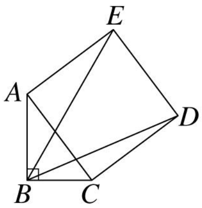
《答案》(1)$2\sqrt{5}$　(2)8

4. 如圖，早上 10 點豔萍測得某樹的影長 2 公尺，到了下午 5 時又測得該樹的影長爲 8 公尺，若兩次日照的光線互相垂直，則樹的高度約爲多少公尺？



《答案》4 公尺

5. 如圖，△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，四邊形 $ACDE$ 是正方形，求 $\overline{BD}$ 及 $\overline{BE}$ 的長。



《答案》$\overline{BD}=\sqrt{58}$，**錯誤! 尚未定義書籤。**$\overline{BE}=\sqrt{65}$