

五、分數的約分與擴分

擴分：

一個分數的分子和分母同乘以一個大於 1 的數，叫做擴分；擴分後的值等於原來的值。

【範例】： $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$ ，則 $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ 。

約分：

一個分數的分子和分母同除以一個大於 1 的數，叫做約分；

約分後的值等於原來的值。

【範例】： $\frac{18}{30} = \frac{2 \times 9}{2 \times 15} = \frac{9}{15} = \frac{3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{3}{5}$ ，則 $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 。

【範例】： $\frac{14}{21} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3} = \frac{2}{3}$ ，則 $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

注意：分數的約分要將分數約成最簡分數。

最簡分數的定義：

一個分數的分子與分母同除以其最大公因數，所得到的新分數中，分子和分母互質，這種分數稱為最簡分數。

【範例】：將 $\frac{18}{48}$ 化成最簡分數。

解： $\frac{18}{48} = \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{8}$

因為 $(3, 8) = 1$ ，所以 $\frac{18}{48}$ 的最簡分數為 $\frac{3}{8}$ 。

【範例】：將 $\frac{40}{45}$ 化成最簡分數。

解： $\frac{40}{45} = \frac{8 \times 5}{9 \times 5} = \frac{8}{9}$

因為 $(8, 9) = 1$ ，所以 $\frac{40}{45}$ 的最簡分數為 $\frac{8}{9}$ 。

通分：

將不同分母的分數化成相同分母的分數，叫做通分；通常是將兩分母化成其最小公倍數。

【範例】：試比較 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 的大小？

解：將 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ 做通分，化成同分母， $[3, 4]=12$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \end{array} \right. , \text{比較結果 } \frac{9}{12} > \frac{8}{12}, \text{所以得到 } \frac{3}{4} > \frac{2}{3} .$$

同分母分數的加減：

分母不變，分子相加減即可。

【範例】： $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

【範例】： $3\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{16}{5} - \frac{2}{5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ 。

異分母分數的加減：

先將分母通分，化成同分母，再做分子間的加減。

【範例】： $\frac{8}{5} + \frac{3}{4} = \frac{32}{20} + \frac{15}{20} = \frac{47}{20} = 2\frac{7}{20}$ 。

【範例】： $\frac{6}{7} - \frac{1}{9} = \frac{54}{63} - \frac{7}{63} = \frac{47}{63}$ 。

分數的乘法：

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$$

【範例】： $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{2 \times 9}{3 \times 10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 。

備註：若是帶分數，必須先化成假分數再做運算。

【範例】： $7\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{4} = \frac{23}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{23 \times 11}{3 \times 4} = \frac{253}{12} = 21\frac{1}{12}$ 。

【範例】： $\frac{2}{5} \times 4\frac{5}{6} = \frac{2}{5} \times \frac{29}{6} = \frac{2 \times 29}{5 \times 6} = \frac{58}{30} = \frac{29}{15} = 1\frac{14}{15}$ 。

分數的除法：

被除數 ÷ 除數 = 被除數 × 除數的倒數。

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

【範例】： $\frac{2}{3} \div 3 = \frac{2}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ 。

【範例】： $\frac{11}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{11}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{99}{15} = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}$ 。

備註：若是帶分數，必須先化成假分數再做運算。

【範例】： $4\frac{1}{5} \div 7 = \frac{21}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$ 。

【範例】： $3\frac{4}{7} \div 1\frac{1}{3} = \frac{25}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{25}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{28} = 2\frac{19}{28}$ 。

注意：分數除法的另一種表示如下：

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \times D}{B \times C} \quad , \quad \text{此分數表示為繁分數。}$$

【範例】： $3\frac{4}{7} \div 1\frac{1}{3} = \frac{25}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{\frac{25}{7}}{\frac{4}{3}} = \frac{25 \times 3}{7 \times 4} = \frac{75}{28} = 2\frac{19}{28}$ 。（繁分數）

【範例】：求 $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ = ?

解：
$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

答： $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}$ 。

分數的應用：

分數的比較大小：

(1)同分母的分數比大小，分子較大的分數較大：

【範例】：試比較下列分數的大小關係： $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{3}{7}$ 。

解：∵ 同分母的分數，分子大的分數較大。

$$\therefore \frac{5}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7}。$$

(2)同分子的分數比大小，分母較小的分數較大：

【範例】：試比較下列分數的大小關係： $\frac{1}{11}$ 、 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{9}$ 。

解：∵ 同分子的分數，分母小的分數較大。

$$\therefore \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \frac{1}{11}。$$

(3)異分母或異分子比較大小，可以先通分成同分子或同分母，在比較大小：

【範例】：試比較下列分數的大小關係： $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。

解：先將分母通分： $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ 。

$$\therefore \frac{5}{10} > \frac{4}{10} > \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10}。$$

【範例】：試比較下列分數的大小關係： $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{8}{9}$ 、 $\frac{10}{11}$ 。

解：∵ $\frac{6}{7} = (1 - \frac{1}{7})$ 、 $\frac{8}{9} = (1 - \frac{1}{9})$ 、 $\frac{10}{11} = (1 - \frac{1}{11})$ 。

$$\text{且 } \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \frac{1}{11} \quad \therefore \frac{10}{11} > \frac{8}{9} > \frac{6}{7}$$

【範例】：香蕉每公斤 $16\frac{1}{2}$ 元，橘子每公斤 $20\frac{1}{5}$ ，5公斤橘子可以換幾公斤的香蕉？

解：5公斤橘子的價錢： $20\frac{1}{5} \times 5 = 101$ (元)

$$101 \div 16\frac{1}{2} = 6\frac{4}{33} \text{ (公斤)} \quad \text{答：} 6\frac{4}{33} \text{ 公斤}$$

【範例】：哥哥有1200元，哥哥的 $\frac{1}{4}$ 等於弟弟的 $\frac{2}{3}$ ，弟弟用去 $155\frac{1}{2}$ 元，還剩下多少元？

解：弟弟的原有錢： $1200 \times \frac{1}{4} \div \frac{2}{3} = 450$ (元)

$$450 - 155\frac{1}{2} = 294\frac{1}{2} \text{ (元)} \quad \text{答：} 294\frac{1}{2} \text{ 元}$$

【範例】：計算 $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \Lambda \Lambda + \frac{1}{870} = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{解} &: \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \Lambda \Lambda + \frac{1}{870} \\
 &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \Lambda \Lambda + \frac{1}{29 \times 30} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \Lambda \Lambda + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{29}\right) + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{30}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \Lambda \Lambda + \frac{1}{28} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{30} \\
 &= \frac{14}{30} = \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

【範例】：計算 $\left(1 + \frac{2}{21}\right) \times \left(1 + \frac{2}{23}\right) \times \left(1 + \frac{2}{25}\right) \times \Lambda \Lambda \times \left(1 + \frac{2}{49}\right) = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{解} &: \left(1 + \frac{2}{21}\right) \times \left(1 + \frac{2}{23}\right) \times \left(1 + \frac{2}{25}\right) \times \Lambda \Lambda \times \left(1 + \frac{2}{49}\right) \\
 &= \left(\frac{23}{21}\right) \times \left(\frac{25}{23}\right) \times \left(\frac{27}{25}\right) \times \Lambda \Lambda \times \left(\frac{49}{47}\right) \times \left(\frac{51}{49}\right) \\
 &= \frac{51}{21} \\
 &= \frac{17}{7}
 \end{aligned}$$

【範例】：計算 $\frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \Lambda \Lambda + \frac{3}{32 \times 35} = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{解} &: \frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \Lambda \Lambda + \frac{3}{32 \times 35} \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{11}\right) + \Lambda \Lambda + \left(\frac{3}{29} - \frac{3}{32}\right) + \left(\frac{3}{32} - \frac{3}{35}\right) \right] \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \Lambda \Lambda + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{35}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \Lambda \Lambda + \frac{1}{29} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{35} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{35} \\
 &= \frac{33}{70}
 \end{aligned}$$



小 試 身 手

【例題 1】

將下列各數化為最簡分數：

$$(1) \frac{36}{48} \quad (2) \frac{39}{169} \quad (3) \frac{289}{85}$$

解：

【例題 2】

將下列各數化為最簡分數：

$$(1) \frac{30}{48} \quad (2) 1\frac{48}{144} \quad (3) \frac{120}{72}$$

解：

【例題 3】

排出下列分數的大小順序：

$$(1) 1\frac{6}{7}、1\frac{2}{9}、\frac{2}{5} \quad (2) \frac{5}{6}、\frac{8}{9}、\frac{11}{12}$$

解：

【例題 4】

排出下列分數的大小順序：

$$(1) \frac{15}{13}、\frac{17}{15}、\frac{19}{17} \quad (2) \frac{7}{10}、\frac{3}{4}、\frac{4}{5}$$

解：

$$\frac{11}{12}$$

【例題 5】

比較下列各組分數的大小：

(1) $1\frac{6}{7}$ 和 $\frac{13}{11}$ (2) $\frac{21}{49}$ 和 $\frac{22}{50}$

解：

【例題 6】

比較下列各組分數的大小：

(1) $\frac{189}{112}$ 和 $\frac{289}{212}$ (2) $\frac{22}{17}$ 和 $\frac{34}{29}$

解：

【例題 7】

在()內填入「>」、「<」或「=」：

(1) $\frac{3}{22}$ () $\frac{4}{33}$ (2) $\frac{5}{6}$ () $\frac{7}{9}$

【例題 8】

在()內填入「>」、「<」或「=」：

(1) $\frac{11}{13}$ () $\frac{22}{26}$ (2) $\frac{10}{169}$ () $\frac{1}{39}$

【例題 9】

(1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{5} =$

(2) $3\frac{1}{8} + 1\frac{3}{13} =$

(3) $\frac{2}{3} + 1\frac{1}{5} - 1\frac{4}{9} =$

【例題 10】

(1) $\frac{7}{15} + \frac{3}{5} =$

(2) $1\frac{3}{11} + 2\frac{7}{9} =$

(3) $3\frac{6}{11} - (\frac{3}{5} + \frac{8}{5}) =$

【例題 11】

(1) $\frac{2}{7} + 4\frac{1}{7} - 1\frac{6}{7} =$

(2) $1\frac{7}{12} - \frac{5}{12} + \frac{11}{12} =$

【例題 13】

(1) $\frac{2}{7} \times 2 \div \frac{1}{3} =$

(2) $5 \div \left(\frac{25}{36} \times \frac{24}{35}\right) =$

(3) $4\frac{1}{3} \div \frac{3}{2} \times 5\frac{5}{8} =$

【例題 15】

(1) $\frac{3}{4} \times 8 + 1\frac{5}{8} \times 1\frac{3}{13} =$

(2) $\frac{5}{8} \div \frac{3}{8} + 1\frac{1}{6} \times 2\frac{1}{7} =$

(3) $2\frac{4}{5} \div \left(1\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right) + 2\frac{4}{5} =$

【例題 12】

(1) $5\frac{7}{9} - 3\frac{2}{9} - 2\frac{3}{9} =$

(2) $3\frac{9}{11} - \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11}\right) =$

【例題 14】

(1) $\frac{3}{8} \times 2\frac{5}{6} \div 4 =$

(2) $\frac{49}{72} \times \frac{6}{7} \div \frac{7}{8} =$

(3) $3\frac{5}{6} \times \frac{1}{5} \div 1\frac{2}{5} =$

【例題 16】

(1) $\frac{6}{7} \times 14 + 5\frac{4}{9} \times 1\frac{2}{7} =$

(2) $3\frac{5}{8} \times 2\frac{3}{5} - \frac{15}{34} \div \frac{15}{68} =$

(3) $16 \div \left(1 - \frac{4}{5} + \frac{1}{3}\right) \times 2\frac{1}{2} =$

【例題 17】

小華有 180 元，小明的 $\frac{1}{4}$ 等於小華的 $\frac{1}{6}$ ，

小明用去 110 元，則兩人總共剩下多少元？

解：

【例題 19】

地球表面積的 $\frac{1}{4}$ 是陸地，而陸地的 $\frac{3}{4}$ 在北

半球，若南北半球的表面積相等，則北半球海洋的面積占全球表面積的幾分之幾？

解：

【例題 18】

甲數的 $\frac{1}{3}$ 等於乙數的 $\frac{7}{8}$ ，乙數的 $\frac{3}{4}$ 等於丙數

的 $\frac{4}{5}$ ，若丙數為 45，則甲數為何？

解：

【例題 20】

地球表面積的 $\frac{1}{4}$ 是陸地，而陸地的 $\frac{3}{4}$ 在北半

球，若南北半球的表面積相等，則南半球海洋的面積占全球表面積的幾分之幾？

解：