

二元一次聯立方程式

二元一次式

二元一次式列式：

【回顧一元一次式列式】

【範例】：如果以阿寶的出發點為原點，往東為正向，往西為負向。(1) 阿寶先以每小時 x 公里的速度向東走了3小時，那麼他走了多少公里？(2)他接著以每小時 x 公里的速度向西走了4.5小時，那麼他這4.5小時走了多少公里？(3)他經過7.5小時後的位置如何表示？

解：(1) $3x$ 。
(2) $4.5x$ 。
(3) $3x - 4.5x = -1.5x$ 。

【二元一次式列式】

【範例】：如果以阿寶的出發點為原點，往東為正向，往西為負向。(1) 阿寶先以每小時 x 公里的速度向東走了3小時，那麼他走了多少公里？(2)他接著以每小時 y 公里的速度向西走了4.5小時，那麼他這4.5小時走了多少公里？(3)他經過7.5小時後的位置如何表示？

解：(1) $3x$ 。
(2) $4.5y$ 。
(3) $3x - 4.5y$ 。

【範例】：滿天星每枝5元，百合花每朵15元，花瓶一個80元。請問： x 枝滿天星需多少元？ y 朵百合花需多少元？弟弟買一個花瓶， x 枝滿天星及 y 朵百合花共需多少元？若弟弟帶140元除了買一花瓶外還可以買幾枝滿天星及幾朵百合花？

解： x 枝滿天星需要 $5x$ 元。
 y 朵百合花需要 $15y$ 元。
一個花瓶， x 枝滿天星及 y 朵百合花共需 $5x + 15y + 80$ 。
 $5x + 15y + 80 = 140$ 。

【範例】：『一百饅頭一百僧，大僧三個更無爭。小僧三人分一個，大小和尚各幾丁？』，能否依此「僧分饅頭歌」列出算式？

解：設大和尚 x 人，小和尚 y 人。

$$x + y = 100$$

$$3x + \frac{1}{3}y = 100$$

【範例】：『肆中聽得語吟吟，薄酒名醜厚酒醇。好酒一瓶醉三客，薄酒三瓶醉一人，共同飲了一十九，三十三客醉醺醺。』，能否依此列出算式，能知薄酒幾瓶？厚酒幾瓶？

解：設薄酒 x 瓶，厚酒 y 瓶。

$$x + y = 19$$

$$\frac{1}{3}x + 3y = 33$$

【範例】：『三足團魚六眼龜，共同山下一深池。九十三足亂浮水，一百二眼將人窺。或出或沒往東西，依欄觀看不能知。有人算得無差錯，將酒重斟贈數杯。』，能否依此「鷓鴣天」古曲列出算式？

解：設三足團魚有 x 條，六眼龜有 y 隻。

$$3x + 4y = 93$$

$$2x + 6y = 102$$

【範例】：雞兔同籠，頭共 35，腳共 110，問雞兔各幾隻？列出算式？

解：設雞有 x 隻，兔有 y 隻。

$$x + y = 35$$

$$2x + 4y = 110$$

【範例】：三腳凳和四腳凳共 35 張，腳共 110，問各幾張？列出算式？

解：設三腳凳有 x 張，四腳凳有 y 張。

$$x + y = 35$$

$$3x + 4y = 110$$

【範例】：已知某二位數，其十位數字的 3 倍與其個位數字的和是 21，它的個位數字與十位數字對調後的新數比原數大 9，問原數是多少？

解：設原數的十位數字為 x ，個位數字為 y 。

$$3x + y = 21$$

$$(10y + x) - (10x + y) = 9$$

【範例】：誠誠與愛愛到商店買餅乾跟飲料，誠誠買餅乾 8 包，飲料 5 瓶，共 186 元；愛愛買餅乾 4 包，飲料 7 瓶，共 174 元，請餅乾一包幾元飲料一瓶幾元？

解：設餅乾 1 包 x 元，飲料 1 瓶 y 元。

$$8x + 5y = 186$$

$$4x + 7y = 174$$

【範例】：小青、小慧一起到芙蓉蕾花店買花，小青買了 4 朵百合和 6 朵劍蘭，付了 132 元；小慧買了 6 朵百合和 4 朵劍蘭，付了 138 元，那麼百合、劍蘭 1 朵各幾元？

解：設百合 1 朵 x 元，劍蘭 1 朵 y 元。

$$4x + 6y = 132$$

$$6x + 4y = 138$$

【範例】：洪媽媽拿 190 元給佳佳買 4 瓶汽水和 2 斤肉，但佳佳卻買回 2 瓶汽水和 4 斤肉，而剩下 20 元，請問汽水一瓶多少元，肉 1 斤多少元？

解：設汽水 1 瓶 x 元，肉 1 斤 y 元。

$$4x + 2y = 190$$

$$2x + 4y = 190 - 20$$

【範例】：甲乙二人各有若干元，若乙給甲 10 元，則甲所有錢是乙所有錢之 2 倍；若甲給乙 15 元，則甲所有錢等於乙所有錢。問甲原有多少元？

解：設甲有 x 元，乙有 y 元。

$$2(y - 10) = x + 10$$

$$x - 15 = y + 15$$

【範例】：若甲數的 5 倍等於乙數的 4 倍，且甲數 3 倍比乙數的 2 倍多 1，請問甲、乙二數各是多少？

解：設甲數是 x ，乙數是 y 。

$$5x = 4y$$

$$3x = 2y + 1$$

【範例】：便利商店賣果汁和牛奶，果汁每盒可賺 4 元，牛奶每盒可賺 3 元，今天便利商店賣出的牛奶盒數是果汁的 2 倍，一共賺了 1000 元，請問今天各賣出多少盒的果汁和牛奶？

解：設賣出果汁 x 盒，賣出牛奶 y 盒。

$$2x = y$$

$$4x + 3y = 1000$$

二元一次方程式的定義：

1. 二元一次式：若一個式子只含有兩個未知數(二元)，且未知數的次方是一次，我們稱為二元一次式。

【範例】： $5x+8y$ 和 $5x-4y+2$ 這類的式子具有 $ax+by+c$ 的樣式，它們都含有兩個未知數(二元)，且每個未知數的次數都是1(一次)，我們稱它們為二元一次式。

2. 同類項：有相同的文字符號，且文字符號的次方也相同的項。

【範例】：在式子 $6x+3-2x-5$ 中的 $6x$ 和 $-2x$ 是同類項；而 3 和 -5 是不含文字符號的同類項。

3. 一個等式中包含兩個一次未知數，如 $8x+15y+80=140$ ，我們稱此二元一次方程式。如 $8x+15y+80$ ，我們稱它為二元一次式。

4. 二元一次式的一般形式及係數、常數項：

x 、 y 的二元一次式一般都表示為 $ax+by+c$ ，其中 a 為 x 項的係數， b 為 y 項的係數， c 為常數項。

【範例】： $5x+8y+3$ ，其中 5 為 x 項的係數， 8 為 y 項的係數， 3 為常數項。

5. 兩個等式中包含兩個一次未知數，如：

$$\begin{aligned}x+y &= 100 \\ 3x + \frac{1}{3}y &= 100,\end{aligned}$$

我們稱此二元一次聯立方程式。

二元一次式的運算：

將二元一次式中的同類項合併化簡。

【範例】：花店滿天星每枝 x 元，百合花每朵 y 元，小強 第一天買 5 枝滿天星及 8 朵百合花送給 曉雲，小強 第二天買 9 枝滿天星及 4 朵百合花送給 小雅。請問 小強 兩天共花了多少錢？

解：第一天 $5x + 8y$ 元。

第二天 $9x + 4y$ 元。

兩天共 $(5x + 8y) + (9x + 4y)$

$$(5x + 8y) + (9x + 4y)$$

$$= (5x + 9x) + (8y + 4y)$$

$$= 14x + 12y$$

【範例】：化簡下列各式：

$$(1) 2(-3x + 4y - 5) = ?$$

解：原式 $= -(2 \times 3)x + (2 \times 4)y - 2 \times 5$
 $= -6x + 8y - 10$

$$(2) -7(-4x + 6y - 8) = ?$$

解：原式 $= -[(-7) \times 4]x + [(-7) \times 6]y - [(-7) \times 8]$
 $= -(-28)x + (-42)y - (-56)$
 $= 28x - 42y + 56$

$$(3) (-3x + 4y - 5) + (-8 + 6y - 4x) = ?$$

解：原式 $= [(-3) + (-4)]x + (4 + 6)y - 5 + (-8)$
 $= -7x + 10y - 13$

$$(4) (-3x + 6y - 5) - (-8 + 2y - 9x) = ?$$

解：原式 $= [(-3) - (-9)]x + (6 - 2)y - 5 - (-8)$
 $= (-3 + 9)x + 4y - 5 + 8$
 $= 6x + 4y + 3$

$$(5) 2(4x + 5y + 7) + 3(x + 4y - 7) = ?$$

解：原式 $= (2 \times 4 + 3 \times 1)x + (2 \times 5 + 3 \times 4)y + 2 \times 7 + 3 \times (-7)$
 $= (8 + 3)x + (10 + 12)y + 14 - 21$
 $= 11x + 22y - 7$

$$(6) 3(5x - 4y + 2) - 5(6x + 7y - 8) = ?$$

解：原式 $= (3 \times 5 - 5 \times 6)x + [3 \times (-4) - 5 \times 7]y + 3 \times 2 - 5 \times (-8)$
 $= (15 - 30)x + (-12 - 35)y + 6 + 40$
 $= -15x - 47y + 46$



小 試 身 手

【例題 1】

回答下列問題

- (1) 我們常在生日蛋糕上插粗細不同的蠟燭，以表示壽星的年齡，通常一根粗蠟燭代表 10 歲，一根細蠟燭代表 1 歲。如果琦琦的生日上面插了 x 根粗蠟燭、 y 根細蠟燭，那麼琦琦的年齡是_____歲。(用 x 與 y 的關係式表示)。
- (2) 假設琦琦現年 43 歲，依題意可列出二元一次方程式為_____。

【例題 2】

- (1) 誠誠的錢包內有 x 張百元鈔票、 y 個十元硬幣，請問錢包內共有_____元。
(用 x 與 y 的關係式表示)。
- (2) 假設誠誠的錢包內有 980 元，依題意可列出二元一次方程式為_____。

【例題 3】

愛愛的存錢筒裡有 5 元硬幣 x 枚、10 元硬幣 y 枚：

- (1) 請問愛愛的存錢筒裡有多少元。(用 x 與 y 的關係式表示)
- (2) 假設愛愛的存錢筒裡有 235 元，依題意可列出二元一次方程式為_____。

答：

【例題 4】

小明買了 2 元的郵票 x 張與 3 元的郵票 y 張，請問：

- (1) 小明總共花了多少元。(用 x 與 y 的關係式表示)
- (2) 假設小明總共花了 72 元，依題意可列出二元一次方程式為_____。

答：

【例題 5】

化簡下列各式：

- (1) $3(7x - 2y - 5) - 10x$
- (2) $-(4x + 7y + 1) + 2(6x - 3y - 5)$

解：

【例題 6】

化簡下列各式：

- (1) $9(x - 8y + 5) - 3(2x - 4y - 7)$
- (2) $-2(3 - 4x + 5y) - 6(7 - 8x - 9y)$

解：

【例題 7】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $3(7x - 2y) - 10x + 2y$

(2) $-(4x + 7y + 1) + 3y$

解：

【例題 8】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $5x - y - x + 2y$

(2) $-(3x - 7y + 2) - 2y$

解：

【例題 9】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $-13x + 8y - (-4x + y)$

(2) $-(-5x - 4y) - 6(-x + 2y)$

【例題 10】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $4(3y - x) - 5(-x + 6y)$

(2) $-2(7x - 9y) - 3(4x - 5y)$

【例題 11】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $-(2x + 7y + 2) + 2(6x - 3y - 5)$

(2) $-2(3 + 5x - 4y) - 6(7 - 8x + 9y)$

【例題 12】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $7(x - 8y + 3) - 3(2x - 3y - 7)$

(2) $(4x + 6y + 3) - 4(x - 5y - 4)$