解二元一次聯立方程式

二元一次方程式的解：

如 $5x+8y=0$ 和 $5x-4y+2=0$ 這類的式子具有 $ax+by+c=0$ 的樣式，它們都含有兩個未知數(二元)，且每個未知數的次數都是1(一次)，我們稱它們為**二元一次方程式**。

【範例】：給二元一次方程式：$5x-4y+2=0$ 求此方方程式的解？

x	0	1	2	3	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	2	$\frac{14}{5}$	…
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{17}{4}$	0	1	2	3	4	…

注意：二元一次方程式若沒有特別的限制通常有無限多個解。

【範例】：5 元郵票 x 張，2 元郵票 y 張，郵票面額總值 32 元。則 x 與 y 分別可能為多少？

解　：$5x+2y=35$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	$\frac{35}{2}$	15	$\frac{25}{2}$	10	$\frac{15}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-5

在此郵票必須是正整數，因此在此限制下可能的解為：

$(x, y)=(1, 15)$

$(x, y)=(3, 10)$

$(x, y)=(5, 5)$

$(x, y)=(7, 0)$

因此我們有 4 個解。

二元一次聯立方程式：

當用兩個未知數，列出兩個二元一次方程式來表示情境中的數量關係時，我們就把這兩個方程式並列時，且稱並列在一起的方程式為二元一次聯立方程式，或二元一次方程組。

【範例】：$x+y=100$

$$3x+\frac{1}{3}y=100，$$

我們稱此二元一次聯立方程式。

<u>二元一次聯立方程式的解</u>：

若有一組x、y值能使得聯立方程式中，兩個方程式的等號都成立，則這一組x、y值就是此聯立方程式的解。一般而言，一個二元一次聯立方程式的解可能有一組解，也可能出現無解或是無限多組解。

【範例】：(1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

第(1)組聯立方程式只有一組解。

第(2)組聯立方程式為無解解。

第(3)組聯立方程式有無限多組解。

<u>解二元一次聯立方程式</u>：

求出聯立方程式的解的過程，就叫做解聯立方程式。

通常，將兩個未知數設法變成一個未知數，利用解一元一次方程式的解法先解出一個未知數，然後再解第二個未知數。

【代入消去法】：

【範例】：『肆中聽得語吟吟，薄酒名醨厚酒醇。好酒一瓶醉三客，薄酒三瓶醉一人，共同飲了一十九，三十三客醉醺醺。』，能否依此列出算式，能知薄酒幾瓶？厚酒幾瓶？

解　：設薄酒x瓶，厚酒y瓶。

$$\begin{cases} x+y=19 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{3}x+3y=33 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1) 可得 $y=19-x$ 將其代入(2)，我們可得：

$$\frac{1}{3}x+3(19-x)=33$$

$$\frac{1}{3}x-3x=33-57$$

$$-\frac{8}{3}x=-24$$

$$x=9$$

將$x=9$代入(1)，我們可得：$9+y=19$

$$y=10$$

故$x=9$，$y=10$為二元聯立方程組的解，

故薄酒9瓶，厚酒10瓶。

【範例】：雞兔同籠，頭共 35，腳共 110，問雞兔各幾隻？

解：設雞有 x 隻，兔有 y 隻。

$$\begin{cases} x+y=35 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+4y=110 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1) 可得 $x=35-y$ 將其代入(2)，我們可得：

$$2(35-y)+4y=110$$
$$70-2y+4y=110$$
$$2y=110-70$$
$$y=20$$

將 $y=2$ 代入(1)，我們可得： $x+20=35$

$$x=15$$

故 $x=15$ ，$y=20$ 為二元聯立方程組的解，

故雞有 15 隻，兔有 20 隻。

【範例】：解下列各二元一次聯立方程式

(a) $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ x-3y=-3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

解：(a) $\begin{cases} 3x+2y=13 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-3y=-3 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(2)可得 $x=-3+3y$ 將其代入(1)，我們可得：

$$3(-3+3y)+2y=13$$
$$-9+9y+2y=13$$
$$11y=13+9$$
$$y=2$$

將 $y=2$ 代入(2)，我們可得：$x-6=-3$

$$x=3$$

故 $x=3$ ，$y=2$ 為二元聯立方程組的解。

(b) $\begin{cases} 3x+y=10 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-2y=-5 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(2)可得 $x=-5+2y$ 將其代入(1)，我們得：

$$3(-5+2y)+y=10$$
$$-15+6y+y=10$$
$$7y=10+15$$
$$y=\frac{25}{7}$$

將 $y=\frac{25}{7}$ 代入(1)，我們有 $3x+\frac{25}{7}=10$

$$x=\frac{15}{7}$$

故 $x=\frac{15}{7}$，$y=\frac{25}{7}$ 為二元聯立方程組的解。

【加減消去法】：

【說明】：將二元一次聯立方程組的兩式分別乘除幾倍，兩式相加或相減，使兩個未知數變成一個未知數。利用解一元一次方程式的解法先解出一個未知數，然後再解第二個未知數。

【範例】：『三足團魚六眼龜，共同山下一深池。九十三足亂浮水，一百二眼將人窺。或出或沒往東西，依梱觀看不能知。有人算得無差錯，將酒重斟贈數杯。』，能否依此「鷓鴣天」古曲列出算式？

解：設三足團魚有 x 條，六眼龜有 y 隻。

$$\begin{cases} 3x+4y=93 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+6y=102 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘 3，將(2)乘 2，可得：

$$\begin{cases} 9x+12y=279 \cdots\cdots\cdots(1^*) \\ 4x+12y=204 \cdots\cdots\cdots(2^*) \end{cases}$$

將(1*)減(2*)，可得：

$$(9x+12y)-(4x+12y)=279-204$$
$$9x+12y-4x-12y=75$$
$$5x=75$$
$$x=15$$

將 $x=15$ 代入(1)，我們可得：$45+4y=93$

$$4y=48$$
$$y=12$$

故三足團魚有 15 條，六眼龜有 12 隻。

【範例】：解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ x-3y=-3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

解 (1)：

$$\begin{cases} 3x+2y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-3y=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘 3，將(2)乘 2，可得：

$$\begin{cases} 9x+6y=39 & \cdots\cdots\cdots(1^*) \\ 2x-6y=-6 & \cdots\cdots\cdots(2^*) \end{cases}$$

將(1*)相加(2*)，可得：

$$(9x+6y)+(2x-6y)=39-6$$

$$9x+2x+6y-6y=33$$

$$11x=33$$

$$x=3$$

將 $x=3$ 代入(1) ，我們可得：$9+2y=13$

$$y=2$$

故 $x=3$，$y=2$ 為二元聯立方程組的解。

解 (2)：

$$\begin{cases} 3x+y=10 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-2y=-5 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘 1，將(2)乘 3，可得：

$$\begin{cases} 3x+y=10 & \cdots\cdots\cdots(1^*) \\ 3x-6y=-15 & \cdots\cdots\cdots(2^*) \end{cases}$$

將(1*)減(2*)，可得：

$$(3x+y)-(3x-6y)=10-(-15)$$

$$7y=25$$

$$y=\frac{25}{7}$$

將 $y=\frac{25}{7}$ 代入(1) ，我們可得：$3x+\frac{25}{7}=10$

$$x=\frac{15}{7}$$

故 $x=\frac{15}{7}$ ，$y=\frac{25}{7}$ 為二元聯立方程組的解。

【範例】：誠誠與愛愛到商店買餅乾跟飲料，誠誠買餅乾 8 包，飲料 5 瓶，共 186 元愛愛買餅乾 4 包，飲料 7 瓶，共 174 元，請餅乾一包幾元飲料一瓶幾元？

解　：設餅乾 1 包 x 元，飲料 1 瓶 y 元。

$$\begin{cases} 8x+5y=186\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+7y=174\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(2)乘 2，可得：

$$\begin{cases} 8x+5y=186\cdots\cdots\cdots(1) \\ 8x+14y=348\cdots\cdots\cdots(2^*) \end{cases}$$

將(2*)減(1)，可得：

$$(8x+14y)-(8x+5y)=348-186$$
$$8x-8x+14y-5y=162$$
$$9y=162$$
$$y=18$$

將 $y=18$ 代入(1)，我們可得：

$$8x+5\times18=186$$
$$8x=96$$
$$x=12$$

故 $x=12$，$y=18$ 為二元聯立方程組的解，也就是題目所求的答案。

答：餅乾 1 包 12 元，飲料 1 瓶 18 元

【範例】：小青、小慧一起到芙蘿蕾花店買花，小青買了 4 朵百合和 6 朵劍蘭，付了 132 元；小慧買了 6 朵百合和 4 朵劍蘭，付了 138 元，那麼百合、劍蘭 1 朵各賣多少元？

解　：設百合 1 朵 x 元，劍蘭 1 朵 y 元。

$$\begin{cases} 4x+6y=132\cdots\cdots\cdots(1) \\ 6x+4y=138\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)、(2)相加可得：$10x+10y=270$

$$x+y=27\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(1)－4×(3)可得：$2y=24$

$$y=12$$

將 $y=12$ 代入(3)可得：$x=15$

答：百合 1 朵 12 元，劍蘭 1 朵 15 元。

【範例】：若甲數的 5 倍等於乙數的 4 倍，且甲數 3 倍比乙數的 2 倍多 1，請問甲、乙二數各是多少？

解　：設甲數是 x，乙數是 y。

$$\begin{cases} 5x=4y \\ 3x=2y+1 \end{cases}$$

移項後可得：

$$\begin{cases} 5x-4y=0\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=1\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將 (2)×2－(1) 可得：

$$2(3x-2y)-(5x-4y)=2$$
$$6x-4y-5x+4y=2$$
$$x=2$$

將 $x=2$ 代入(1)可得：$y=\frac{5}{2}$

答：甲數是 2，乙數是$\frac{5}{2}$。

【範例】：便利商店賣果汁和牛奶，果汁每盒可賺 4 元，牛奶每盒可賺 3 元，今天便利商店賣出的牛奶盒數是果汁的 2 倍，一共賺了 1000 元，請問今天各賣出多少盒的果汁和牛奶？

解　：設賣出果汁 x 盒，賣出牛奶 y 盒。

$$\begin{cases} 2x=y \\ 4x+3y=1000 \end{cases}$$

移項後可得：

$$\begin{cases} 2x-y=0\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+3y=1000\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將 (2)－(1)×2 可得：

$$(4x+3y)-2(2x-y)=1000$$
$$4x+3y-4x+2y=1000$$
$$5y=1000$$
$$y=200$$

將 $y=200$ 代入(1)可得：

$$2x-y=0$$
$$2x-200=0$$
$$x=100$$

答：賣出果汁 100 盒，賣出牛奶 200 盒

小　試　身　手

【例題 1】

(1) 若 $x=-1$，$y=2$ 為方程式 $6x=ay+4$ 的解，求 a 之值。

(2) 若 $x=2$，$y=3$ 是二元一次方程式 $ax+by=5$ 的一組解，

求 $2(4a-3b+5)+4(a+6b-3)$ 之值。

解：

【例題 2】

(1) 方程式 $5x-3y=1$ 的一組解為 $x=a$，$y=-7$，求 a 之值。

(2) 若 $1.23x+4.56y-369=555$，求 $12.3x+45.6y+369$ 之值。

解：

【例題 3】

請在下列空格處填入各算式所代表的數：

算式 \ x	-2	3	-1	$\frac{2}{3}$
y	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$x-3y$	-5	6	0	$-\frac{5}{6}$
$-x+2y$	4	-5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

【例題 4】

請在下列空格處填入各算式所代表的數：

x \ 算式	-3	1	-2	$-\frac{1}{3}$
y	4	-2	$-\frac{2}{3}$	3
$-3x-y$	5	-1	$6\frac{2}{3}$	-2
$2x-y$	-10	4	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{3}$

【例題 5】

(1) 已知五元的硬幣 x 個，十元的硬幣 y 個，共計 430 元，則 x 與 y 的關係可列出一個二元一次方程式：________________。

(2) 承第(1)題，若五元的硬幣有 20 個，則十元的硬幣有____個。

(3) 承第(1)題，若十元的硬幣有 32 個，則五元硬幣有____個。

【例題 6】

已知一長方形的周長為 52，且長比寬的 3 倍少 6，請依次回答下列各題：

(1) 設寬是 x，則長為__________，可列出一元一次方程式為

________________，並解

得長是__________，寬是__________。

(2) 設長是 x，寬是 y，則 x 與 y 的關係可列式得二元一次聯立方程式為__________。並解得長是________，寬是________。

【例題 7】

$x=2$、$y=-1$ 是下列哪些聯立方程式的解？

(A)
$$\begin{cases} x=-2y \\ 6x+3y=9 \end{cases}$$

(B)
$$\begin{cases} x=-y+1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

(C)
$$\begin{cases} 5x=-4y+5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} 2x=-4y \\ -2x+3y=-7 \end{cases}$$

【例題 8】

$x=0$、$y=4$ 是下列哪些聯立方程式的解？

(A)
$$\begin{cases} 4x+6y=24 \\ x+3y=12 \end{cases}$$

(B)
$$\begin{cases} x=-4y+16 \\ 7x-2y=-8 \end{cases}$$

(C)
$$\begin{cases} x=y-1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} 2x=-4y+2 \\ -3x+y=7 \end{cases}$$

【例題 9】

用代入消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 4x=y \cdots\cdots ① \\ 6x+3y=36 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} x=-y+6 \cdots\cdots ① \\ x-y=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

【例題 10】

用代入消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x+2y=13 \cdots\cdots ① \\ x-3y=-3 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} 2x=y-1 \cdots\cdots ① \\ 3x-2y=5 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

【例題 11】

用加減消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=23 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} 3x-y=x+2y-5 \cdots\cdots ① \\ 3x+3y=-2x-y+22 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

【例題 12】

用加減消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{23}{12} \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{13}{6} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{2} \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{3} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解：

【例題 13】

一長方形園地，若長減 40 公尺，寬加 30 公尺，則形成與原長方形同面積的正方形，試問長方形的長與寬各是多少公尺？

解：

【例題 14】

珮玲比她的妹妹珮玉大 3 歲，她們的年齡和是 27 歲。試問她們的年齡各是幾歲？

解：

【例題 15】

甲、乙二人各有若干元，若乙給甲 10 元，則甲所有錢是乙所有錢的 6 倍；若甲給乙 10 元，則甲所有錢比乙所有錢的 3 倍多 10 元，問甲、乙原來各有多少元？

解：

【例題 16】

琦琦、誠誠和同學參加春季旅行，在同一家商店買相同的餅乾、汽水琦琦買餅乾 8 包、汽水 5 瓶共 186 元；誠誠買餅乾 4 包、汽水 7 瓶共 174 元。請幫琦琦、誠誠算一算，餅乾一包、汽水一瓶各多少錢？

解：

【例題 17】

已知某二位數，其十位數字的 3 倍與其個位數字的和是 21，它的個位數字與十位數字對調後的新數比原數大 9，問原數是多少？

解：

【例題 18】

美茹、曉菁、佳雯三姐妹共有 264 元，若美茹給曉菁 10 元，佳雯買日用品花掉原有錢的 $\frac{2}{5}$ 後，三姐妹的錢數就相等了，問原來三姐妹各有多少錢？

解：

【例題 19】

某年聖誕舞會，男、女生的票價不同，例如：6 位男生和 5 位女生一同參加,則門票共 1220 元，若是臨時走了 2 位女生，而多來了 3 位男生,則門票要多繳 160 元,則男、女生票價各是多少元？

解：

【例題 20】

小新和妮妮去買早餐，小新買 1 杯奶茶和 2 個三明治，拿 100 元付帳，老闆找他 49 元，妮妮拿 500 元買 6 杯奶茶和 7 個三明治，老闆找她 284 元，如果風間拿 1000 元買 3 杯奶茶和 5 個三明治，老闆應找他多少元？

解：

高斯消去法解二元一次聯立方程式

高斯消去法的形式：

將一組聯立方程式：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 改寫成$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$的形式，其中 a_1 、a_2 是 x 項的係數，b_1 、b_2 是 y 項的係數，c_1 、c_2 是常數項。

利用高斯消去法解二元一次聯立方程組：

【範例】：利用高斯消去法解：$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases}$。

解　：將 $\begin{cases} x+y=3\Lambda\Lambda(1) \\ x-y=7\Lambda\Lambda(2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$的形式。

再將(1)加到(2)可得：

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x\quad=10 \end{cases} \qquad\qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}\cdots\cdots(*)$$

$2x=10$　　　　$2x=10$

$x=5$　　　　$x=5$

在(＊)式子中：x 項的係數是 2，y 項的係數是 0，常數項的係數是 10。

則可得：$2x=10$

$x=5$。

將 $x=5$ 代回原式可得：$x+y=3$

$5+y=3$

$y=3-5$

$y=-2$。

故此聯立方程式的解為（x，y）＝(5，－2)。

【範例】：利用高斯消去法解：$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=110 \end{cases}$。

解　：將 $\begin{cases} x+y=35\Lambda\Lambda\Lambda(1) \\ 2x+4y=110\Lambda\Lambda(2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 110 \end{bmatrix}$的形式。

再將(1)×(－2)之後，加到(2)可得：

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=110 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 110 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=35 \\ \quad 2y=40 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} \cdots\cdots(*)$$

$2y=40$ 　　　　　　$2y=40$

$y=20$ 　　　　　　$y=20$

在(＊)式子中：x 項的係數是 0，y 項的係數是 2，常數項的係數是 40。

則可得：$2y=40$

$y=20$。

將 $y=20$ 代回原式可得： $x+y=35$

$x+20=35$

$x=35-20$

$x=15$。

故此聯立方程式的解為（x，y）＝(20，15)。

【範例】：利用高斯消去法解：$\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$。

解　：將 $\begin{cases} x-3y=-3 \cdots\cdots (1) \\ 3x+2y=13 \cdots\cdots (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix}$的形式。

再將(1)×(－3)之後，加到(2)可得：

$$\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x+2y=13 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=-3 \\ \quad 11y=22 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \cdots\cdots(*)$$

$11y=22$ 　　　　　　$11y=22$

$y=2$ 　　　　　　$y=2$

在(＊)式子中：第二列的 x 項的係數是 0，y 項的係數是 11，常數項的係數是 22。

則可得：$11y=22$

$y=2$。

將 $y=2$ 代回原式可得： $x-3y=-3$

$x-6=-3$

$x=-3+6$

$x=3$。

故此聯立方程式的解為（x，y）＝(2，3)。

【範例】：利用高斯消去法解：$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+2z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$。

解　：將 $\begin{cases} x+y+z=2\Lambda\ \Lambda\ (1) \\ x+2y+2z=2\Lambda\ \Lambda\ (2) \\ x+y+2z=1\Lambda\ \Lambda\ (3) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1)×(－1)之後，加到(2)與(3)可得：

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+2z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad y+z=0 \\ \qquad z=-1 \end{cases} \qquad\qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdots\cdots(*)$$

∵ $z=-1$	∵ $z=-1$
∴ $y+z=0$	∴ $y+z=0$
$y+(-1)=0$	$y+(-1)=0$
$y=1$	$y=1$
則 $x+y+z=2$	則 $x+y+z=2$
$x+1+(-1)=2$	$x+1+(-1)=2$
$x=2$	$x=2$

在(＊)式子中：第三列的 x 項的係數是 0，y 項的係數是 0，z 項的係數是 1，常數項的係數是－1，則可得：$z=-1$。

在(＊)式子中：第二列的 x 項的係數是 0，y 項的係數是 1，z 項的係數是 1，常數項的係數是 0，則可得：

$$y+z=0$$
$$y+(-1)=0$$
$$y=1。$$

在(＊)式子中：第一列的 x 項的係數是 1，y 項的係數是 1，z 項的係數是 1，常數項的係數是 2，則可得：

$$x+y+z=2$$
$$x+1+(-1)=2$$
$$x=2。$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y, z)=(2, 1, -1)$。

【**範例**】：利用高斯消去法解：$\begin{cases}2x+y-z=3\\ x-2y+z=1\\ x+y-z=2\end{cases}$。

解　：將 $\begin{cases}2x+y-z=3\Lambda\ \Lambda\ (1)\\ x-2y+z=1\Lambda\ \Lambda\ (2)\\ x+y-z=2\Lambda\ \Lambda\ (3)\end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 的形式。

再將(3)乘以(－1)之後，加到(1)可得：

$$\begin{cases}2x+y-z=3\\ x-2y+z=1\\ x+y-z=2\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x \qquad\quad =1\\ x-2y+z=1\\ x+y-z=2\end{cases} \qquad \Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdots\cdots(*)$$

再將(3)加到(2)可得：

$$\begin{cases}x \qquad\quad =1\\ x-2y+z=1\\ x+y-z=2\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x \qquad\quad =1\\ 2x-y \qquad =3\\ x+y-z=2\end{cases} \qquad \Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdots\cdots(*)$$

$\because$ $x=1$

$\therefore$ $2x-y=0$

$y=2$

則 $x+y-z=2$

$x+1+(-1)=2$

$z=1$

$\because$ $x=1$

$\therefore$ $2x-y=0$

$y=2$

則 $x+y-z=2$

$x+1+(-1)=2$

$z=1$

在(＊)式子中：第一列的 x 項的係數是 1，y 項的係數是 0，z 項的係數是 0，常數項的係數是 1，則可得：$x=1$。

在(＊)式子中：第二列的 x 項的係數是 2，y 項的係數是－1，z 項的係數是 0，常數項的係數是 3，則可得：$2x-y=0$

$\because$ $x=1$，$\therefore$ $y=2$。

在(＊)式子中：第三列的 x 項的係數是 1，y 項的係數是 1，z 項的係數是－1，常數項的係數是 2，則可得：$x+y-z=2$

$\because$ $x=1$、$y=2$，$\therefore$ $z=1$。

故此聯立方程式的解為（x，y，z）＝(1，2，1)。

小 試 身 手

【例題 1】

利用高斯消去法解：$\begin{cases} 3x+4y=93 \\ 2x+6y=102 \end{cases}$。

解：

【例題 2】

利用高斯消去法解：$\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-5y=13 \end{cases}$。

解：

【例題 3】

利用高斯消去法解：$\begin{cases} 8x+5y=186 \\ 4x+7y=174 \end{cases}$。

解：

【例題 4】

利用高斯消去法解：$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 3x+y=10 \end{cases}$。

解：