

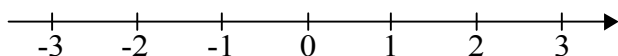
# 二元一次方程式的圖形

## 直線座標系

### 數線的作法：

數線的構成三要素：原點、方向、單位長。

1. 首先畫一直線，在線上任取一點作為「原點」，標示為 0。
2. 習慣上右邊的方向為此數線的「正向」，並標上箭頭表示。
3. 在數線上由原點依「相同的間隔」，依序向右標示 1, 2, 3, 4, ... 等，向左標示 -1, -2, -3, -4, ... 等，此「相同的間隔」即為單位長。
4. 數線上每一個點所代表之數，稱為該點的坐標。

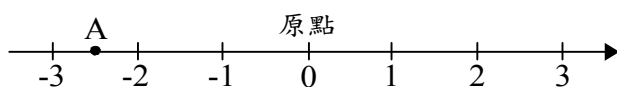


### 直線座標系：

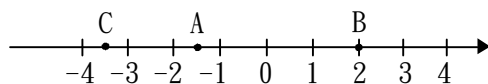
數線上的任意一點，都有一個數來表示它的位置，也就是說數線上的每一個點，都有一個座標。所以，數線也可以稱為直線座標系。

**注意：**如果數線上，它的位置用  $a$  來表示，可以說 P 點的座標為  $a$ ，為了表示它的位置，可以將 P 點記為  $P(a)$ 。

**【範例】：**如下圖中，A 點所代表的數為  $-2\frac{1}{2}$ ，則 A 點坐標，記為  $A(-2\frac{1}{2})$ 。



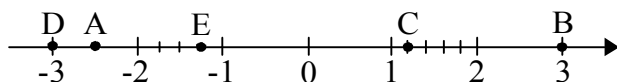
**【範例】：**寫出下列數線中 A B C 的座標。



**解：** A 的座標為 -1.5、B 的座標為 2、D 的座標為 -3.5、

**【範例】：**在下列數線上標出  $A(-2.5)$ 、 $B(3)$ 、 $C(1\frac{1}{5})$ 、 $D(-3)$ 、 $E(-1.25)$  的點座標。

**解：** 如下圖所示





## 小 試 身 手

### 【例題 1】

在下列數線上標出  $A(-2.5)$ 、 $B(1.5)$ 、 $C(2\frac{1}{5})$ 、 $D(-2)$ 、 $E(0.25)$  的點座標。

### 【例題 2】

在下列數線上標出  $A(3.25)$ 、 $B(-3)$ 、 $C(0.5)$ 、 $D(-0.5)$ 、 $E(-2)$  的點座標。

### 【例題 3】

(1) 試作一條數線，並在數線上標出  $A(-4)$ 、 $B(-3.2)$ 、 $C(2\frac{1}{2})$ 、 $D(-1)$ 、 $E(1\frac{1}{5})$  五點的點座標。

(2) 試比較  $A(-4)$ 、 $B(-3.2)$ 、 $C(2\frac{1}{2})$ 、 $D(-1)$ 、 $E(-1\frac{1}{5})$  五點的大小。

答：

### 【例題 4】

(1) 試作一條數線，並在數線上標出  $A(-5)$ 、 $B(-1.3)$ 、 $C(1\frac{1}{3})$ 、 $D(-5.2)$ 、 $E(-1\frac{1}{5})$  五點的點座標。

(2) 試比較  $A(-5)$ 、 $B(-1.3)$ 、 $C(1\frac{1}{3})$ 、 $D(3.2)$ 、 $E(-2\frac{1}{5})$  五點的大小。

答：

## ■ 平面座標系

### 平面座標系(直角座標系)：

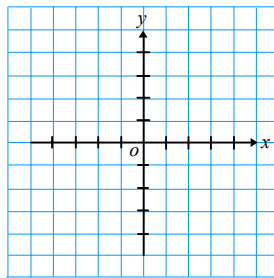
平面座標系是由一條水平的數線( $x$ 軸)與一條鉛直的數線( $y$ 軸)所構成， $x$ 軸向右為正、向左為負， $y$ 軸向上為正、向下為負， $x$ 軸與 $y$ 軸的交點 $O$ 稱為原點(如圖)。

$x$ 軸：水平的數線叫做 $x$ 軸或橫軸。

$y$ 軸：鉛直的數線叫做 $y$ 軸或縱軸。

原點： $x$ 軸與 $y$ 軸的交點稱為此座標平面的原點，通常以英文字母 $O$ 來表示，或 $O(0, 0)$ 來表示。

座標：從原點出發，沿 $x$ 軸走 $a$ 單位，再朝著平行 $y$ 軸的方向走 $b$ 單位，就到達 $P$ 點， $P$ 點的位置叫做 $P(a, b)$ ，其中第一個數 $a$ 就叫做 $P$ 點的 $x$ 座標，第二個數 $b$ 就叫做 $P$ 點的 $y$ 座標。

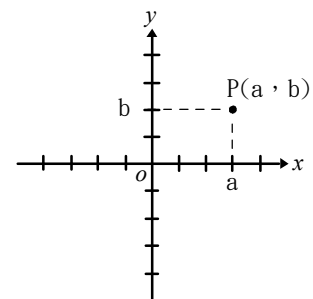


### 平面上點的座標表示法：

有序數對 $(a, b)$ 稱為 $P$ 點的座標，則記為 $P(a, b)$ ，

其中 $a$ 稱為 $P$ 的 $x$ 座標(或橫座標)、 $b$ 稱為 $P$ 的 $y$ 座

標(或縱座標)，原點 $O$ 的座標為 $(0, 0)$ 。如右圖所示：



**注意：**在此所謂的有序數對指的是 $(-2, 3)$ 跟 $(3, -2)$ 所表示的是不同的點。

**【範例】：**在直角座標平面上標出 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $C(-4, 0)$ 、 $D(0, -2)$ 各點。

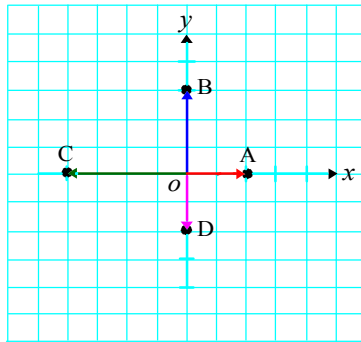
**解：**如圖所示，

$A(2, 0)$ 的座標是從原點開始， $x$ 軸正向2個單位長、 $y$ 軸座標為0。

$B(0, 3)$ 的座標是從原點開始， $y$ 軸正向3個單位長、 $x$ 軸座標為0。

$C(-4, 0)$ 的座標是從原點開始， $x$ 軸負向4個單位長、 $y$ 軸座標為0。

$D(0, -2)$ 的座標是從原點開始， $y$ 軸負向2個單位長、 $x$ 軸座標為0。

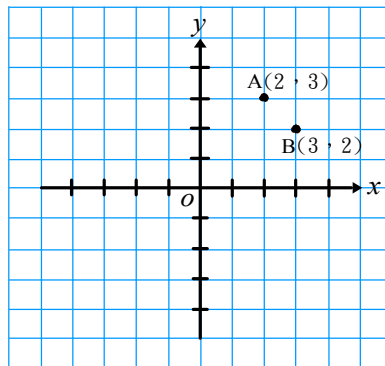


$x$  軸上的點座標為  $(a, 0)$ ， $y$  軸上的點座標為  $(0, b)$ 。

**【範例】**：在直角座標平面上標出  $A(2, 3)$ 、 $B(3, 2)$  各點。

解：

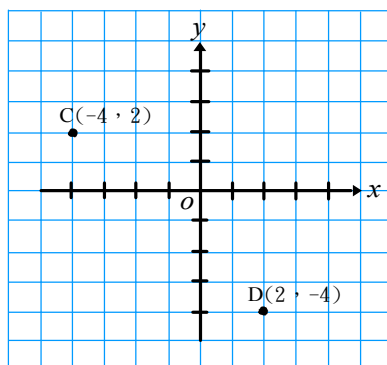
$A(2, 3)$  的座標是從原點開始， $x$  軸正向 2 個單位長、 $y$  軸正向 3 個單位長。  
 $B(3, 2)$  的座標是從原點開始， $x$  軸正向 3 個單位長、 $y$  軸正向 2 個單位長。  
 其中  $A(2, 3)$  與  $B(3, 2)$  是不同的點，如下圖所示。



**【範例】**：在直角座標平面上標出  $C(-4, 2)$ 、 $D(2, -4)$  各點。

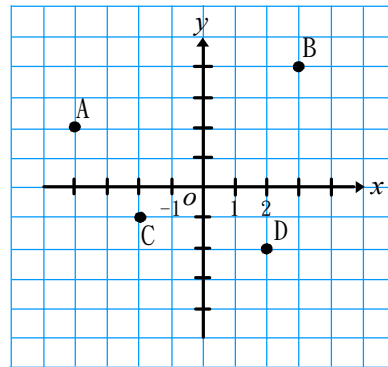
解：

$C(-4, 2)$  的座標是從原點開始， $x$  軸負向 4 個單位長、 $y$  軸正向 2 個單位長。  
 $D(2, -4)$  的座標是從原點開始， $x$  軸正向 2 個單位長、 $y$  軸負向 4 個單位長。  
 $C(-4, 2)$  與  $D(2, -4)$  是不同的點，如下圖所示。



**【範例】**：寫出右圖中 ABCD 四個點的座標為多少？

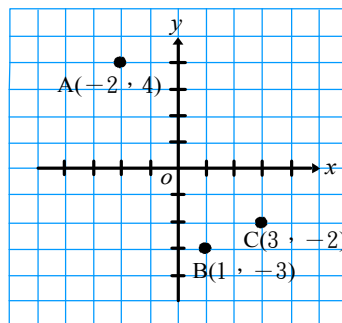
- 解：A 點座標 =  $(-4, 2)$ ；  
 B 點座標 =  $(3, 4)$ ；  
 C 點座標 =  $(-2, -1)$ ；  
 D 點座標 =  $(2, -2)$ 。



**【範例】**：在座標平面上標出下列各點： $A(-2, 4)$ 、 $B(1, -3)$ 、 $C(3, -2)$

解：如圖所示，

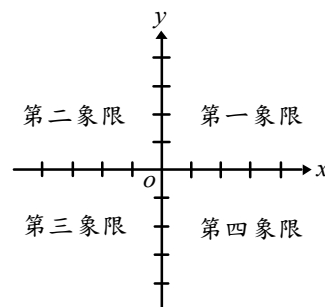
- $A(-2, 4)$ 的座標是從原點開始， $x$ 軸負向 2 個單位長、 $y$ 軸正向 4 個單位長。  
 $B(1, -3)$ 的座標是從原點開始， $x$ 軸正向 1 個單位長、 $y$ 軸負向 3 個單位長。  
 $C(3, -2)$ 的座標是從原點開始， $x$ 軸正向 3 個單位長、 $y$ 軸負向 2 個單位長。



**直角座標平面上的象限：**

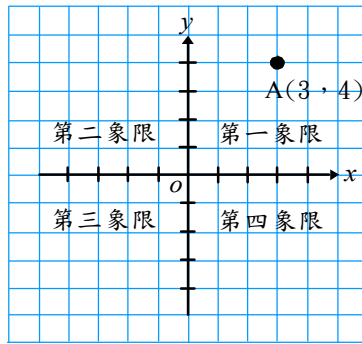
座標平面是由  $x$  軸與  $y$  軸分割成四個象限，從右上角開始，依逆時針方向的順序，稱為第一象限、第二象限、第三象限、第四象限(如右圖)，

- 第一象限座標  $(a, b)$ ，其中  $a > 0$ 、 $b > 0$ 。  
 第二象限座標  $(a, b)$ ，其中  $a < 0$ 、 $b > 0$ 。  
 第三象限座標  $(a, b)$ ，其中  $a < 0$ 、 $b < 0$ 。  
 第四象限座標  $(a, b)$ ，其中  $a > 0$ 、 $b < 0$ 。

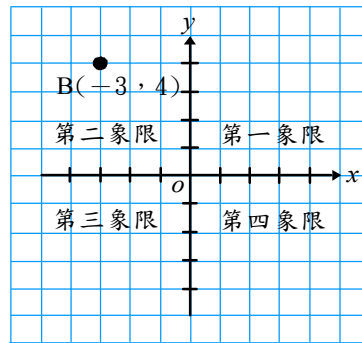


**注意：**  $x$  軸與  $y$  軸上的點不屬於任何一個象限， $x$  軸上的點座標為  $(a, 0)$ ， $y$  軸上的點座標為  $(0, b)$ 。

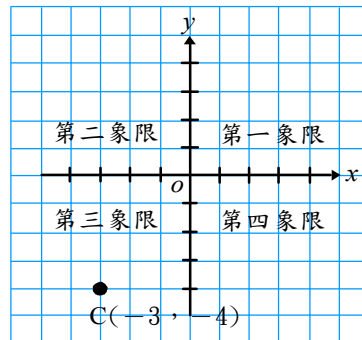
**【範例】**：圖中的  $A(3, 4)$ ， $x$  軸座標為正、 $y$  軸座標為正，所以  $A(3, 4)$  落在第一象限上，如下圖所示。



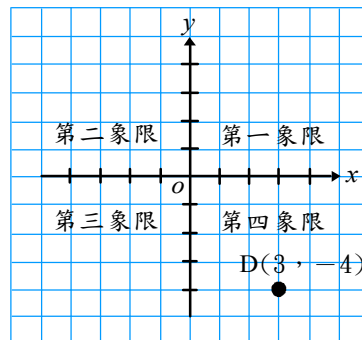
**【範例】**：圖中的  $B(-3, 4)$ ， $x$  軸座標為負、 $y$  軸座標為正，所以  $B(-3, 4)$  落在第二象限上，如下圖所示。



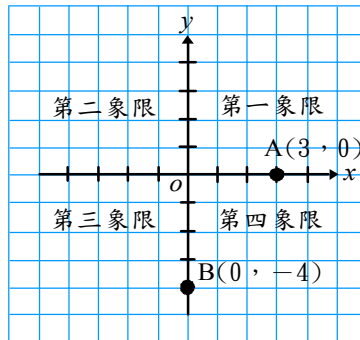
**【範例】**：圖中的  $C(-3, -4)$ ， $x$  軸座標為負、 $y$  軸座標為負，所以  $C(-3, -4)$  落在第三象限上，如下圖所示。



**【範例】**：圖中的  $D(3, -4)$ ， $x$  軸座標為正、 $y$  軸座標為負，所以  $D(3, -4)$  落在第四象限上，如下圖所示。

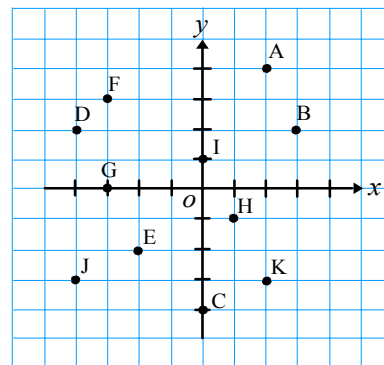


**【範例】**：圖中的  $A(3, 0)$ ， $y$  軸座標為 0 落在  $x$  軸上； $B(0, 4)$ ， $x$  軸座標為 0 落在  $y$  軸上，所以  $A(3, 0)$  與  $B(0, 4)$  不屬於任何一個象限，如下圖所示。



**【範例】**：請找出下圖中各點分別落在哪一個象限內或在哪一條座標軸上？

**解**：在第一象限內的點：A、B。  
 在第二象限內的點：F、D。  
 在第三象限內的點：E、J。  
 在第四象限內的點：H、K。  
 在  $x$  軸上的點：G。  
 在  $y$  軸上的點：I、C。

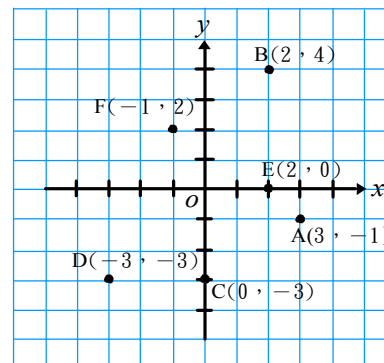


**【範例】**：請找出下列各點分別落在哪一個象限內或在哪一條座標軸上？

$A(3, -1)$ 、 $B(2, 4)$ 、 $C(0, -3)$ 、 $D(-3, -3)$ 、 $E(2, 0)$ 、 $F(-1, 2)$ 。

**解**：如圖所示

$A(3, -1)$  在第四象限內，  
 $B(2, 4)$  在第一象限內，  
 $C(0, -3)$  在  $y$  軸上，  
 $D(-3, -3)$  在第三象限內，  
 $E(2, 0)$  在  $x$  軸上，  
 $F(-1, 2)$  在第二象限內。



點  $P(a, b)$  到  $x$  軸的距離是  $|b|$ ，到  $y$  軸的距離是  $|a|$ 。

**【範例】**： $P(-120, 50)$ 。P 點到  $x$  軸的距離是  $|50| = 50$ ，

P 點到  $y$  軸的距離是  $|-120| = 120$ 。

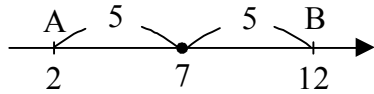
**【範例】**：已知 P 點在第二象限，且 P 點到  $x$  軸的距離是 6，P 點到  $y$  軸的距離是 4，則 P 點的座標為  $(-4, 6)$ 。

中點座標公式：

1. 在數線上  $A(a)$  和  $B(b)$  則線段  $AB$  的中點座標為： $(\frac{a+b}{2})$ 。

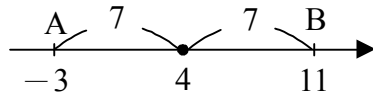
【範例】：數線上有  $A(2)$  和  $B(12)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為： $\frac{2+12}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 。



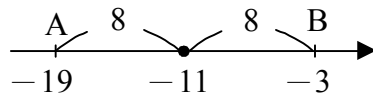
【範例】：數線上有  $A(-3)$  和  $B(11)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為： $\frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4$ 。



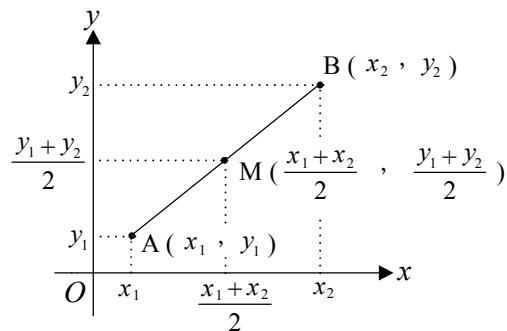
【範例】：數線上有  $A(-3)$  和  $B(-19)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的中點座標為： $\frac{-3+(-19)}{2} = \frac{-22}{2} = -11$ 。



2. 設座標平面上兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則  $\overline{AB}$  的中點座標為：

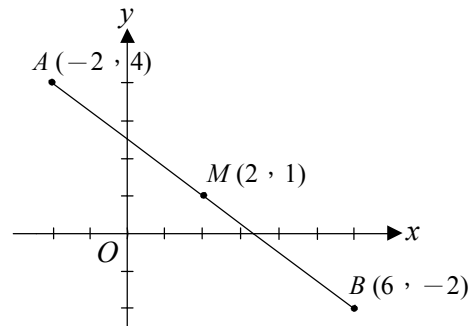
$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



【範例】：設兩點座標為  $A(-2, 4)$ 、 $B(6, -2)$ ，請問  $A$ 、 $B$  的中點座標為何？

解：利用中點公式， $M = \left( \frac{-2+6}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = (2, 1)$ 。

所以  $A$ 、 $B$  的中點座標為  $(2, 1)$ 。



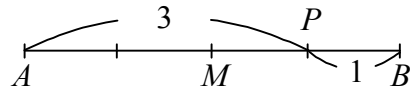
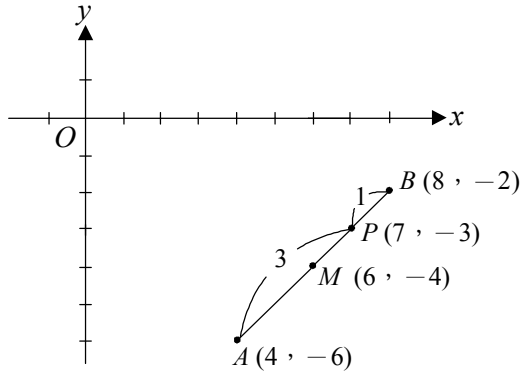


**【範例】**：設兩點座標為  $A(4, -6)$ 、 $B(8, -2)$ ， $P$  為  $\overline{AB}$  上一點，若  $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$ ，則求  $P$  點座標？

**解**：先求出  $\overline{AB}$  的中點座標為  $M = \left( \frac{4+8}{2}, \frac{(-6)+(-2)}{2} \right) = (6, -4)$ 。

在求出  $\overline{MB}$  的中點座標  $P$  為  $\left( \frac{6+8}{2}, \frac{(-4)+(-2)}{2} \right) = (7, -3)$ 。

答： $P$  點座標為  $(7, -3)$ 。



**直角座標的應用：**

**【範例】**：在座標平面上，誠誠由  $A(-5, 2)$  出發，向北走 5 個單位，在向西走 6 個單位到達  $B$  點，(1) 求  $B$  點座標？ (2)  $B$  點到  $x$  軸的距離是多少？

(3)  $B$  點到  $y$  軸的距離是多少？

**解**：(1)  $-5-6=-11$ ， $2+5=7$ 。

所以  $B$  點座標為  $(-11, 7)$ 。

(2)  $B$  點到  $x$  軸的距離是  $|7|=7$ 。

(3)  $B$  點到  $y$  軸的距離是  $|-11|=11$ 。

**【範例】**：在座標平面上，兩點  $(5, 3)$ 、 $(5, -4)$  之距離為多少單位長？

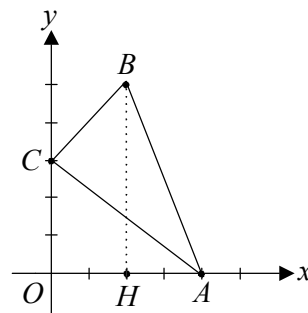
**解**： $3-(-4)=7$ 。

所以，兩點  $(5, 3)$ 、 $(5, -4)$  之距離為 7 個單位長。

**【範例】**：如圖， $A(4, 0)$ 、 $B(2, 5)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $H(2, 0)$ ， $O$  為原點，請問：

(1) 梯形  $OHBC$  之面積

(2)  $\triangle ABC$  之面積。



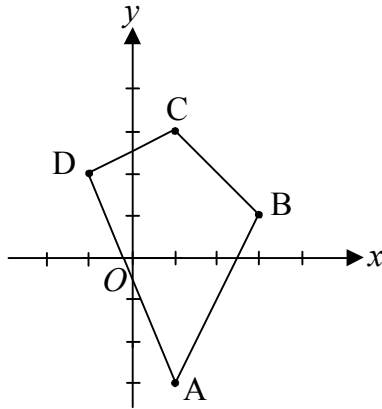
解：(1) 梯形 OHBC 之上底為  $\overline{OC} = 3$ ，下底為  $\overline{BH} = 5$ ，高為  $\overline{OH} = 2$ 。  
 所以梯形 OHBC 之面積 =  $\frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8$  (平方單位)

$$(2) \because \triangle ABH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5 \text{ (平方單位)},$$

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (平方單位)}。$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ 面積} &= \text{梯形 OHBC 面積} + \triangle ABH \text{ 面積} - \triangle AOC \text{ 面積} \\ &= 8 + 5 - 6 \\ &= 7 \text{ (平方單位)}. \end{aligned}$$

【範例】：已知座標平面上的四點 A(1, -3)、B(3, 1)、C(1, 3)、D(-1, 2)，  
 作  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ ，請求出四邊形 ABCD 之面積。



解： $\because \overline{AC} = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \text{四邊形 ABCD 面積} &= \triangle ABC \text{ 面積} + \triangle ADC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \\ &= 12 \text{ (平方單位)}. \end{aligned}$$

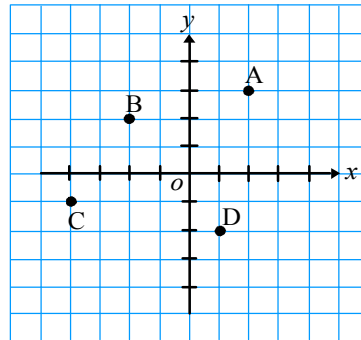


# 小 試 身 手

### 【例題 1】

請寫出下列各座標平面上各點的座標。

答：



### 【例題 2】

請畫出直角座標平面，並寫出下列各點的座標。

$A(4, -5)$ ,  $B(2\frac{1}{2}, 5)$ ,

$C(0, -4)$ ,  $D(-3, 0)$ ,  $E(-4, -1)$ 。

### 【例題 3】

下表中，各點分別在哪一象限或在某一坐標軸上，請填上：

點座標	$A(-3, 6)$	$B(-1, -5)$	$C(-2\frac{1}{3}, -3\frac{5}{11})$
象限或軸			
點座標	$D(3, -2\frac{11}{43})$	$F(\frac{1}{2}, 0)$	$E(0, -3\frac{1}{7})$
象限或軸			

### 【例題 4】

下表中，各點分別在哪一象限或在某一坐標軸上，請填上：

點座標	$A(-2, 2\frac{1}{2})$	$B(-2, -5)$	$C(3, -3)$
象限或軸			
點座標	$D(-3\frac{11}{37}, 3)$	$F(-4, 0)$	$E(0, -3)$
象限或軸			

**【例題 5】**

在坐標平面上一點  $P(2a+1, 3a-1)$ ，若  $P$  點不在任何一象限內，求  $a$  之值。  
答：

**【例題 6】**

在坐標平面上一點  $A(5x+35, 2x-19)$ ，若  $A$  點不在任何一象限內，求  $x$  之值。  
答：

**【例題 7】**

如果  $A(x, y)$  在直角坐標平面上的第三象限內，請問  $x$ 、 $y$  分別是正數或負數？  
答：

**【例題 8】**

如果  $A(x, y)$  在直角坐標平面上的第四象限內，請問  $x$ 、 $y$  分別是正數或負數？  
答：

**【例題 9】**

寫出下列哪些點在  $x$  軸上？哪些點在  $y$  軸上？

$$A(-3, 0), B(-\frac{11}{29}, 0.9), C(0, -1), D(-1, 0), E(3, -5), F(0, -7\frac{13}{98})。$$

答：

**【例題 10】**

寫出下列哪些點在  $x$  軸上？哪些點在  $y$  軸上？

$$A(0, 4), B(-1\frac{5}{3}, 2), C(-1\frac{7}{15}, 0), D(8, -14), E(-3, 0), F(0, -8\frac{1}{9})。$$

答：