

比與比例式

比與比值

【範例】：誠誠想要自己做麵包吃，可是誠誠只知道一份麵包需要 100 克的麵粉、10 克的砂糖和 70 克的水，現在誠誠現在有 500 克的麵粉，那誠誠可以作幾份麵包？共需要多少克的砂糖和多少克的水？

說明：我們可以用以前學過的方法，誠誠有 500 克的麵粉，可以做 5 份的麵包。所以需要 50 克的砂糖和 350 克的水。

那麼，麵包、麵粉、砂糖和水，它們之間有何種關係呢？其實她們之間有一種叫做「比」的對應關係，這也是我們這一節所要學的「比和比值」。

比的意義：

「比」是指兩個(或兩個以上)數量之間的對應關係。

上面的範例來說：麵粉與砂糖的比為 100 : 10。

麵粉與水的比為 100 : 70。

砂糖與水的比為 10 : 70。

符號「：」叫做比號，讀作「比」。

比值：

$a : b$ ，比號前面的數 a 叫做比的前項，比號後面的數 b 叫做比的後項，前項除以後項所得的商叫做比值，記作 $\frac{a}{b}$ 。

由於除數不能是零，所以比的後項 b 不能是零，即 $b \neq 0$ 。

比與除法、分數的基本性質是類似的。

上面的範例來說：麵粉與砂糖的比值為 $100 \div 10 = \frac{100}{10} = 10$ 。

麵粉與水的比值為 $100 \div 70 = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ 。

砂糖與水的比值為 $10 \div 70 = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$ 。

【範例】：5 : 4 的比值為 $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ 。

【範例】： $1\frac{1}{5} : 2\frac{4}{7}$ 的比值為 $\frac{1\frac{1}{5}}{2\frac{4}{7}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{18}{7}} = \frac{7 \times 6}{5 \times 18} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ (最簡分數)。

此時 $1\frac{1}{5} : 2\frac{4}{7} = 7 : 15$ 即為最簡單的整數比。

注意：將比化為最簡整數比與將分數化為最簡分數的方法是相通的。

【範例】： $\therefore 15 : 4.5$ 的比值為 $\frac{15}{4.5} = \frac{150}{45} = \frac{10}{3}$ 。
 $\therefore 15 : 4.5$ 的最簡整數比為 $10 : 3$ 。

兩個數的比什麼時候叫做相等的比呢？延續上面的範例。

誠誠若有 100 克的麵粉作麵包時，則麵粉與砂糖的比為：
 麵粉：砂糖 = 100 : 10，其比值為 10。

誠誠若有 500 克的麵粉作麵包時，則麵粉與砂糖的比為：
 麵粉：砂糖 = 500 : 50，其比值為 10。

因為 100 : 10 的比值為 10，且 500 : 50 的比值為 10。

所以我們可以將 100 : 10 與 500 : 50 視為相等的比。

也就是說， $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

結論： $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

【範例】：判斷下列各組的比是否相等。

(1) 3 : 2 與 6 : 4 (2) 3 : 2 與 4 : 3 (3) 3 : 2 與 2 : 1。

解：(1) $\therefore \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ ， $\therefore 3 : 2 = 6 : 4$
 (2) $\therefore \frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$ ， $\therefore 3 : 2 \neq 4 : 3$
 (3) $\therefore \frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$ ， $\therefore 3 : 2 \neq 2 : 1$

比的性質：

我們知道 $a : b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ，則 $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$ ，即 $a : b = axn : bxn$ ，故有以下性質：

性質 1： $a : b = a \times n : b \times n$ ，其中 $n \neq 0$ 。

【範例】： $\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \times 35 : \frac{4}{7} \times 35 = 14 : 20 = 14 \times \frac{1}{2} : 20 \times \frac{1}{2} = 7 : 10$ 。

【範例】： $0.9 : 1.2 = 0.9 \times 10 : 1.2 \times 10 = 9 : 12 = 9 \times \frac{1}{3} : 12 \times \frac{1}{3} = 3 : 4$ 。

【範例】： $4.2 : \frac{7}{8} = \frac{42}{10} : \frac{7}{8} = \frac{42}{10} \times 40 : \frac{7}{8} \times 40 = 168 : 35 = 168 \times \frac{1}{7} : 35 \times \frac{1}{7} = 24 : 5$ 。

我們知道 $a : b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ，則 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ，即 $axn = bxm$ ，故有以下性質：

性質 2： 若 $a : b = m : n$ 則有 $a \times n = b \times m$ 。

【範例】： $3 : 8 = 2 : \frac{16}{3}$ ，則由性質 2 可得： $3 \times \frac{16}{3} = 8 \times 2 = 16$ 。

【範例】： $4.2 : \frac{7}{8} = 24 : 5$ ，則由性質 2 可得： $4.2 \times 5 = \frac{7}{8} \times 24 = 21$ 。

【範例】： 請回答下列問題：

已知 $2x : 3 = (x - 1) : 1$ ，求 $x = ?$

解： $\because 2x : 3 = (x - 1) : 1$ ，則由性質 2 可得：

$$2x \cdot 1 = 3 \cdot (x - 1)$$

$$2x = 3x - 3$$

$$x = 3$$

答： $x = 3$ 。

性質 3： $x : y = a : b$ ，則 $px : qy = a \times p : b \times q$ 。

由定義來看， $x : y = a : b$ 則 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 。

將等號兩邊同乘 $\frac{p}{q}$ ，則 $\frac{x}{y} \times \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \times \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{px}{qy} = \frac{a \times p}{b \times q}$ 。

所以， $px : qy = a \times p : b \times q$ 。

【範例】： 請回答下列問題：

(1) 已知 $x : y = 4 : 5$ ，求 $2x : 3y = ?$

(2) 已知 $a : b = 3 : 4$ ，求 $2a : 5b = ?$

解： (1) $\because x : y = 4 : 5$

$$\begin{aligned} \therefore 2x : 3y &= 4 \times 2 : 5 \times 3 \\ &= 8 : 15 \end{aligned}$$

答： $2x : 3y = 8 : 15$ 。

(2) $\because a : b = 3 : 4$

$$\begin{aligned} \therefore 2a : 5b &= 3 \times 2 : 4 \times 5 \\ &= 6 : 20 \\ &= 3 : 10 \end{aligned}$$

答： $a : b = 3 : 10$ 。

性質 4： $px : qy = a : b$ ，則 $x : y = \frac{a}{p} : \frac{b}{q}$ 。

$$\begin{aligned} \text{因為 } px : qy = a : b &\Rightarrow \frac{px}{a} = \frac{qy}{b} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{p}} = \frac{y}{\frac{b}{q}} \\ &\Rightarrow x : y = \frac{a}{p} : \frac{b}{q}。 \end{aligned}$$

【範例】：請回答下列問題：

(1) 已知 $4a : 5b = 12 : 25$ ，求 $a : b = ?$

(2) 已知 $3a : 4b = 3 : 2$ ，求 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = ?$

解： (1) $\because 4a : 5b = 12 : 25$

$$\begin{aligned} \therefore a : b &= \frac{12}{4} : \frac{25}{5} \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

答： $a : b = 3 : 5$ 。

(2) $\because 3a : 4b = 3 : 2$

$$\therefore a : b = \frac{3}{3} : \frac{2}{4} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$$

$$\text{則 } \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2 \quad \text{答：} \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 1 : 2。$$

【範例】：請回答下列問題：

(1) 已知 $7x : 5y = 21 : 35$ ，求 $x : y = ?$

(2) 已知 $3x : 4y = 3 : 2$ ，求 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = ?$

解： (1) $\because 7x : 5y = 21 : 35$

$$\therefore x : y = \frac{21}{7} : \frac{35}{5} = 3 : 7 \quad \text{答：} x : y = 3 : 7。$$

(2) $\because 3x : 4y = 3 : 2$

$$\therefore x : y = \frac{3}{3} : \frac{2}{4} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$$

$$\text{則 } \frac{1}{x} : \frac{1}{y} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2 \quad \text{答：} \frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 2。$$

注意：同類量不同單位時，若要計算比時，須先將兩者的單位的化為一致再化簡。

【範例】：80 公分 : 4 公尺 = 80 公分 : 400 公分 = 80 : 400 = 1 : 5

【範例】：750 公克 : 0.3 公斤 = 750 公克 : 300 公克 = 750 : 300 = 5 : 2

比的應用：

由性質 1 可知， $a : b = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b}$ ，故 $a : b$ 即我們將所有的量分為 $a+b$ 份，

前項佔了 a 份；後項佔了 b 份。

【範例】：哥哥跟弟弟兩人共有 3500 元，哥哥跟弟弟所有錢的比為 4 : 3，請問兩人各有多少錢？

解法一：因為哥哥的錢：弟弟的錢 = 4 : 3

所以設哥哥的錢為 $4r$ 元，則弟弟的錢為 $3r$ 元。(由性質 1)

$$\text{則： } 4r + 3r = 3500$$

$$7r = 3500$$

$$r = 500$$

所以哥哥的錢為 $4 \times 500 = 2000$ (元)

弟弟的錢為 $3 \times 500 = 1500$ (元)

答：哥哥 2000 元；弟弟 1500 元

解法二：設哥哥的錢為 x 元，則弟弟的錢為 $(3500 - x)$ 元。

所以，哥哥的錢：弟弟的錢 = 4 : 3 = $x : (3500 - x)$

$$\text{則： } 4 \cdot (3500 - x) = 3 \cdot x \quad (\text{由性質 2})$$

$$14000 - 4x = 3x$$

$$14000 = 7x$$

$$x = 2000 \text{ (元)}$$

弟弟的錢 = $3500 - 2000 = 1500$ (元)

答：哥哥 2000 元；弟弟 1500 元

解法三：兩人所有錢的比為 4 : 3，也就說將所有錢分成 7 份，哥哥佔了其中的 4 份，

弟弟佔了其中的 3 份，所以

$$\text{哥哥的錢：弟弟的錢} = 4 : 3 = \frac{4}{7} : \frac{3}{7}$$

$$\text{哥哥的錢： } 3500 \times \frac{4}{7} = 2000 \text{ (元)}$$

弟弟的錢： $3500 - 2000 = 1500$ (元)

答：哥哥 2000 元；弟弟 1500 元

【範例】：中山、中正兩所國中，男、女生比分別為 8：7 及 7：5，如將兩所國中合併後，男、女生之比為 22：17，則中山、中正兩所國中學生總數之比為多少？

解：設中山、中正兩所國中學生總數各為 x 人、 y 人

則中山國中男生有 $\frac{8}{15}x$ 人，女生有 $\frac{7}{15}x$ 人，

則中正國中男生有 $\frac{7}{12}y$ 人，女生有 $\frac{5}{12}y$ 人。

$$\therefore \left(\frac{8}{15}x + \frac{7}{12}y\right) : \left(\frac{7}{15}x + \frac{5}{12}y\right) = 22 : 17$$

$$17\left(\frac{8}{15}x + \frac{7}{12}y\right) = 22\left(\frac{7}{15}x + \frac{5}{12}y\right)$$

$$17 \times \frac{32x + 35y}{60} = 22 \times \frac{28x + 25y}{60}$$

$$544x + 595y = 616x + 550y$$

$$595y - 550y = 616x - 544x$$

$$45y = 72x$$

$$\therefore x : y = 45 : 72 = 5 : 8$$

答：中山、中正兩所國中學生總數之比為 5：8。

【範例】：某校入學考試中，男、女考生比為 8：15，錄取者男、女生之比為 2：3，不錄取者男、女生之比為 1：2，求男生錄取率及女生錄取率各為何？

解：設錄取男考生有 $2x$ 人，女考生有 $3x$ 人，

不錄取男考生有 y 人，女考生有 $2y$ 人。

$$\therefore (2x + y) : (3x + 2y) = 8 : 15$$

$$15(2x + y) = 8(3x + 2y)$$

$$30x + 15y = 24x + 16y$$

$$30x - 24x = 16y - 15y$$

$$6x = y$$

$$\text{男生錄取率} : \frac{2x}{2x + y} = \frac{2x}{2x + 6x} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$\text{女生錄取率} : \frac{3x}{3x + 2y} = \frac{3x}{3x + 12x} = \frac{1}{5} = 20\%$$

答：男生錄取率及女生錄取率各為 25%、20%。

由性質 1 可知， $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times bd : \frac{c}{d} \times bd = ad : bc$ 。

【範例】：雞兔賽跑，雞跑 3 步的距離等於兔跑 5 步的距離；雞跑 5 步的時間等於兔跑 3 步的時間。請問雞跟兔的速率比是多少？

解：∵ 雞跑 3 步的距離等於兔跑 5 步的距離，

∴ 雞跟兔跑一步的距離比為 $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ 。

∵ 雞跑 5 步的時間等於兔跑 3 步的時間，

∴ 雞跟兔跑一步的時間比為 $\frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ 。

又 ∵ 速率 = 距離 ÷ 時間，

則雞跟兔的速率比為 $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} : \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{3}{5} = 5 \times 5 : 3 \times 3 = 25 : 9$ 。

答：雞跟兔的速率比是 25 : 9。



小 試 身 手

【例題 1】

設 $a=1$ ， $b=\frac{1}{2}$ ，求 $a(a^2-b^2):(a^3-b^3)$ 的比值。

解：

【例題 2】

(1) 設 $x=-5$ ， $y=-7$ ，求 $3x^2y:5xy^2$ 的比值。

(2) 設 $x=-3$ ，求 $(x^2+4):(x^2+4x+4)$ 的比值。

解：

【例題 3】

求下列各比的比值，並化為最簡分數。

(1) $(-3.9):0.3$

(2) $\frac{3}{4}:0.6$

【例題 4】

求下列各比的比值，並化為最簡分數。

(1) $-\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$

(2) $3.6:(-0.6)$

【例題 5】

求出下列□內的值。

(1) $2.5 : 0.2 = \square : \frac{1}{2}$

(2) $\square : \frac{3}{2} = 4 : 0.3$

【例題 6】

求出下列□內的值。

(1) $3 : \square = \frac{4}{3} : \frac{2}{5}$

(2) $\frac{2}{7} : \frac{1}{3} = 0.4 : \square$

【例題 7】試求出下列各比例式中的 x 值。

(1) $12 : 144 = x : 6$

(2) $6 : (x + 2) = 3 : 5$

(3) $(-x + 5) : (2x - 3) = 2 : 3$

(4) $(2x - 7) : 3 = (x + 11) : 4$

【例題 8】

試求出下列各比例式中的 x 值。

$$(1) 1.2 : 0.4 = (x + 2) : \frac{1}{2}$$

$$(2) 30 : (-x + 3) = 5 : \frac{2}{7}$$

$$(3) (x + 2) : \frac{1}{2} = (3x - 4) : 9$$

$$(4) \frac{7}{2} : (2x - 1) = 0.5 : (-8x - 1)$$

【例題 9】

若 $2x : 3y = 10 : 9$ ，則 $(x - y) : (x + y)$ 的比值為何？

解：

【例題 10】

若 $5x : 4y = 25 : 36$ ，則 $(2x + y) : (x + 2y)$ 的比值為何？

解：

【例題 11】

設 x 、 y 兩數都不為零，且 $8x + 5y = 4x - y$ ，則：

$$(1) 5x : 3y = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (2) (5x + 3y) : (2x + 9y) \text{ 的比值為 } \underline{\hspace{2cm}}。$$

解：

【例題 12】

設 x 、 y 兩數都不為零，且 $5x + 3y = 7x - 4y$ ，則：

- (1) $2x : 3y =$ _____。 (2) $(x + y) : (5x - 3y)$ 的比值為 _____。

解：

【例題 13】

職棒 15 年正熱烈開打，兄弟棒球隊選手陳致遠的打擊率 3 成 8 (即 $\frac{38}{100}$)，

- (1) 在第一次比賽中，他出擊十次，則至少出擊多少支安打，才打出水準？
(2) 在第二次比賽中，他出擊 20 次，得到 7 支安打，問他在這次比賽中，有沒有打出水準？

解：

【例題 14】

一年丙班共有學生 42 人，某次郊遊有 3 人沒有參加，請求出：

- (1) 參加人數和全班人數的比及比值。
(2) 沒參加人數和全班人數的比及比值。
(3) 參加人數和沒參加人數的比及比值。

解：

【例題 15】

高度相同粗細不同的兩支蠟燭，第一支 4 小時可燃完，第二支 6 小時可燃完，同時點燃且以一定速率燃燒，在點燃後的幾小時，第一支蠟燭的高度恰好是第二支蠟燭的 $\frac{1}{2}$ 倍？

解：

【例題 16】

高度相同粗細不同的兩支蠟燭，第一支 6 小時可燃完，第二支 9 小時可燃完，同時點燃且以一定速率燃燒，在點燃後的幾小時，第一支蠟燭的高度恰好是第二支蠟燭的 $\frac{1}{3}$ 倍？

解：