

## 正比

### 何謂常數和變數：

常數：不會隨著其他因素而改變的數。 例：圓周率。

變數：隨著不同的情形而改變的數。 例：圓的半徑。

### 何謂正比：

當一個量  $y$  與另一個量  $x$  的比值是一個固定的常數時，稱  $y$  與  $x$  成正比關係。

可以用數學式  $\frac{y}{x} = k$  或  $y = kx$ ，表示此一關係。

**【範例】**： $x$ 、 $y$  二個數，當  $x$  增加 2 倍、3 倍、4 倍…時， $y$  會隨著增加 2 倍、3 倍、4 倍…；  
或者當  $x$  變成  $\frac{1}{2}$  倍、 $\frac{1}{3}$  倍、 $\frac{1}{4}$  倍…時， $y$  也會變成  $\frac{1}{2}$  倍、 $\frac{1}{3}$  倍、 $\frac{1}{4}$  倍……。

二個數之間的關係有此現象時，稱兩數成正比的關係。

簡單來說，當  $x$ 、 $y$  成正比，就是  $y$  值會隨著  $x$  值增加幾倍而增加幾倍，那麼  $y$  值也一定會隨著  $x$  減少為幾倍而減少為幾倍。

**【範例】**：設  $x$  為正數，下列各式中哪些式子的  $y$  與  $x$  成正比？

(甲)  $4y = 5x$       (乙)  $y = 3x^3$       (丙)  $y = \frac{1}{5x}$

(丁)  $y = x + 3$       (戊)  $xy = 1000$       (己)  $\frac{y}{x} = 4$ 。

解：(甲)  $4y = 5x \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x$ 。

(己)  $\frac{y}{x} = 4$ 。      答：(甲)、(己)為正比的關係。

### 正比的關係表：

**【範例】**：下表為可樂數量與價錢的關係，請問 8 瓶可樂的價錢是多少元？

數量(罐)( $x$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9
價錢(元)( $y$ )	17	34	51	68	85	102	119	?	153

解： $8 \div 4 = 2$ ……8 瓶是 4 瓶的 2 倍，

$68 \times 2 = 136$ ……價錢也會是 68 元的 2 倍。

答：8 瓶可樂的價錢是 136 元。

正比的關係式：

$x$ 、 $y$  二數成正比例時， $y$  除以  $x$  所得商固定不變，即關係式為： $\frac{y}{x} = \text{商}(k)$

或是以  $y = k \cdot x$  來表示也可以，在此  $k$  為常數。

**【範例】**：如上表所示，假設可樂數量為  $x$ ，總價為  $y$ ，我們知道一瓶可樂售價為 17 元，把總價 = 可樂售價  $\times$  數量，也就是  $y = 17 \times x$ ，即可得正比例的關係式：

$$y = 17x \text{ 或是移項可得 } \frac{y}{x} = 17。$$

正比的圖形：

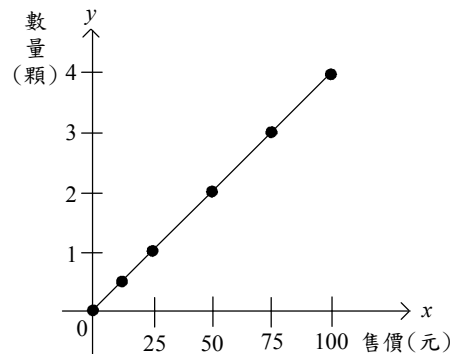
當  $x$ 、 $y$  成正比時，所畫成的關係圖，必為通過原點的一直線。

**【範例】**：下表為蘋果數量和價錢的關係，請試畫出此關係圖。

數量(顆)	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
價錢(元)	0	12.5	25	50	75	100	...

解：

從右圖中，逐一標出  $(x, y)$ ，  
若上表中的  $(x, y)$  的數據愈多，  
則標出的點愈密集。

正比的應用：

$x$ 、 $y$  成正比，透過關係表、關係式或關係圖就可以找出商(常數)，進而找無限多組  $(x, y)$ 。

**【範例】**：小華開車去加油站加油，已知汽油每 2 公升可跑  $13\frac{7}{10}$  公里，總共加了 15 公升

的汽油，請問可以跑多少公里？

解：每一公升所走距離： $13\frac{7}{10} \div 2 = 6\frac{17}{20}$  (公里)

乘以 15 得到總共距離為： $6\frac{17}{20} \times 15 = 102\frac{3}{4}$  (公里)。

答：可以跑  $102\frac{3}{4}$  公里。

**虎克定律：**在彈性限度內，彈簧的伸長量與所受的外力成正比。

※備註：一個彈簧所能承受的最大外力，稱為此彈簧的**彈性限度**，超過此值彈簧就不會恢復原狀，而產生永久形變。

**【範例】：**小華做如附圖中所示力的測量實驗，結果如附表。請問當彈簧長度 30 公分時，砝碼重量為多少公克？(假設未超過彈性限度。)

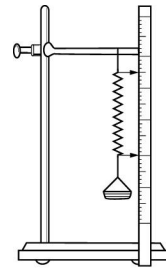
砝碼重量(gw)	0	20	40	60	80	100	...	?
彈簧長度(cm)	20	21	22	23	24	25	...	30
彈簧伸長量(cm)	0	1	2	3	4	5	...	10

解：∵ 由上表可發現： $20 \div 1 = 20$ ，  
 $40 \div 2 = 20$ ，  
 $60 \div 3 = 20$ ，  
 $80 \div 4 = 20$ ，  
 $100 \div 5 = 20$ 。

∴ 砝碼重量與彈簧伸長量成正比例關係。

$$\text{砝碼重量} \div \text{彈簧伸長量} = 20$$

$$\begin{aligned} \text{砝碼重量} &= \text{彈簧伸長量} \times 20 \\ &= 10 \times 20 \\ &= 200 \text{ (公克)}. \end{aligned}$$



**【範例】：**一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，( $D = \frac{M}{V}$ )。

當體積(V)固定時，質量越大密度也越大；質量越小密度也越小。  
 則密度(D)跟質量(M)成正比。

當密度(D)固定時，質量越大體積也越大；質量越小體積也越小。  
 則體積(V)跟質量(M)成正比。

若一個物體的體積為  $100(\text{cm}^3)$ ，則：

質量(g)	50	100	150	200	250	300
密度( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	0.5	1	1.5	2	2.5	3

若一個物體的密度為  $2(\text{g}/\text{cm}^3)$ ，則：

質量(g)	50	100	150	200	250	300
體積( $\text{cm}^3$ )	25	50	75	100	125	150

**【範例】**：自由落體落下的距離與時間的平方成正比，已知在兩秒內落下的距離為 1960 公分，問：(1) 在 1.2 秒內落下多少公分？  
(2) 在第 3 秒內落下多少公分？

**解**：(1) 設距離為  $y$  公分，時間為  $x$  秒，則  $y = kx^2$ 。

$$\begin{aligned} \text{將 } x=2, y=1960 \text{ 代入 } y=kx^2, \text{ 可得：} & 1960=4k \\ & k=490 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此當 } x=1.2, & y=490 \times (1.2)^2 \\ & =705.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因為 } y &= 490x^2 \\ \text{所以 } y &= 490 \times (3^2 - 2^2) \\ & = 1225 \end{aligned}$$

答：(1) 在 1.2 秒內落下 705.6 公分，  
(2) 在第 3 秒內落下 1225 公分。

**【範例】**：已知  $(5x - y)$  與  $(3x + y)$  成正比，當  $x = -2$ ， $y = 1$ ，求：

(1)  $x$  與  $y$  的關係如何？ (2) 當  $x = -3$  時  $y = ?$

**解**：(1)  $(5x - y) = k \times (3x + y)$ ，

$$\begin{aligned} \text{將 } x=-2, y=1 \text{ 代入，可得：} & -10-1=k \times (-6+1) \\ & k=\frac{11}{5} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } x \text{ 與 } y \text{ 的關係式為 } (5x - y) = \frac{11}{5} \times (3x + y)。$$

(2) 將  $x = -3$  代入  $(5x - y) = \frac{11}{5} \times (3x + y)$ ，

$$\begin{aligned} \text{可得：} & -15 - y = \frac{11}{5} \times (-9 + y) \\ & -75 - 5y = -99 + 11y \\ & y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



## 小 試 身 手

### 【例題 1】

溜溜球一個是 150 元，所買的溜溜球數量和價錢的關係如下表：

溜溜球( $x$ 個)	1	2	3	4	5	6
價錢( $y$ 元)	150	300	450	600	750	900

- 溜溜球個數變成 3 倍，4 倍，…時，價錢變成( )倍，( )倍…。
- $x$  增加則  $y$  隨  $x$  增加， $x$ 、 $y$  成( )比例關係。
- $x$  減少則  $y$  隨  $x$  ( )，價錢隨著溜溜球數量成( )比例關係。

### 【例題 2】

圓半徑和面積的關係如下表，請填入各空格裡的數並回答下列問題(圓周率用 3 來計算)

半徑( $cm$ )	1	2	3	4	5	8	10
面積( $cm^2$ )	3	12	27	48	75	192	300

- 若圓的面積是  $4800\text{ cm}^2$ ，半徑是多少公分？ $1600\text{ cm}$
- 圓的半徑  $10\text{ cm}$  是  $5\text{ cm}$  的( )倍，半徑  $10\text{ cm}$  的面積是半徑  $5\text{ cm}$  的面積的( )倍。
- 圓半徑和面積是否成正比例？( )。

### 【例題 3】

下表中， $x$  和  $y$  有一定的比例關係，請回答下列問題：

- 求出表格中， $\cup$ ， $\times$  各代表什麼數？
- $x$  和  $y$  成什麼關係？
- $x : y$  的比值為何？

$x$ ( $cm$ )	2	3	4	$\cup$
$y$ (元)	24	36	$\times$	60

- 當  $x = 18$  公分，那麼  $y$  應該為多少呢？

答：

**【例題 4】**

鐵條長 18 公尺重量是 144 公克，請回答下列問題：

- (1) 完成右表填入適當的數。
- (2)  $x$  與  $y$  成什麼關係？
- (3)  $x : y$  的比值為何？
- (4) 重量 180g 的鐵絲，長度是多少？
- (5) 長度 15 公尺的鐵絲，重量是多少？

鐵條 ( $x$ m)	18	20	36
重量 ( $y$ g)	144	160	288

答：

**【例題 5】**

小明的身高 150 公分，他的影子長剛好 2.5 公尺，同一時間量得樹影長 9 公尺，請問：

- (1) 樹高多少公尺？
- (2) 實物的高度 ( $x$  公尺) 和影子 ( $y$  公尺) 成什麼關係？
- (3) 寫出  $x$  和  $y$  的關係式 (列出二種不同寫法)。
- (4) 若此時有一棟建築物高 12 公尺，則同一時刻影子長多少公尺？

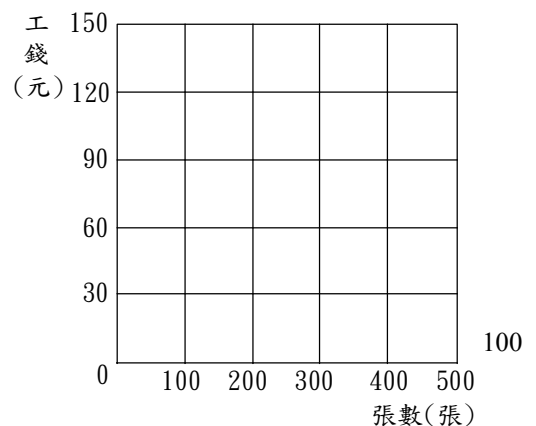
答：

**【例題 6】**

小吉暑假打工，每發出 100 張廣告紙可以得到工錢 30 元，請問：

- (1) 每發出一張廣告紙多少元？
- (2) 發出張數和工錢成什麼關係？
- (3) 請完成下表並畫成關係圖？

張數 (張)	1	100	250	900
工錢 (元)	0.3	30	75	270



答：

## 反比

### 何謂反比：

當一個量  $y$  與另一個量  $x$  的乘積是一個固定的常數時，稱  $y$  與  $x$  成反比，  
 或者說  $y$  與  $\frac{1}{x}$  成正比。可以用數學式  $x \cdot y = k$  或  $y = \frac{k}{x}$ ，表示此一關係。

**【範例】：**  $x$ 、 $y$  二個數，當  $x$  增加 2 倍、3 倍、4 倍……時， $y$  會隨著變成  $\frac{1}{2}$  倍、 $\frac{1}{3}$  倍、 $\frac{1}{4}$  倍……；或者當  $x$  變成  $\frac{1}{2}$  倍、 $\frac{1}{3}$  倍、 $\frac{1}{4}$  倍……時， $y$  也會變成 2 倍、3 倍、4 倍……。

二個數之間的關係有此現象時，稱兩數成反比的關係。

簡單來說，當  $x$ 、 $y$  成反比，就是  $y$  值會隨著  $x$  值增加而減少，那麼  $y$  值也一定會隨著  $x$  減少而增加。

**【範例】：** 設  $x$  為正數，下列各式中哪些式子的  $y$  與  $x$  成反比？

(甲)  $4y = 5x$       (乙)  $y = 3x^3$       (丙)  $y = \frac{1}{5x}$

(丁)  $y = x + 3$       (戊)  $xy = 1000$       (己)  $\frac{y}{x} = 4$ 。

解：(丙)  $y = \frac{1}{5x} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{5}$ 。

(戊)  $xy = 1000$ 。      答：(丙)、(戊)為反比的關係。

**【範例】：** 面積  $54 \text{ cm}^2$  的長方形，若長為  $x \text{ cm}$ ，寬為  $y \text{ cm}$ ，則  $x$  和  $y$  是成什麼關係？

解：  $54 = 1 \times 54$   
 $= 2 \times 27$   
 $= 3 \times 18$

所以可以得到  $x$  和  $y$  為反比關係。

### 反比的關係表：

把上例可能的情形填入表中，並請找出當長方形的長為  $\frac{1}{2}$  公分時，寬為多少公分？

面積( $\text{cm}^2$ )	54	54	54	54	54	54	54	54
長( $x \text{ cm}$ )	1	2	3	6	9	18	27	54
寬( $y \text{ cm}$ )	54	27	18	9	6	3	2	1

**反比的關係式：**

當  $x$ 、 $y$  二數成反比時， $x \times y = \text{積(常數)}$

**【範例】：**面積  $54 \text{ cm}^2$  的長方形，若長為  $x \text{ cm}$ ，寬為  $y \text{ cm}$ ，則  $x$  和  $y$  的關係式為： $x \times y = 54$ 。

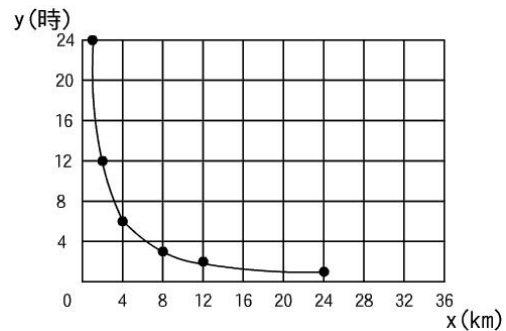
**反比的圖形：**

當  $x$ 、 $y$  成反比時，所畫成的關係圖，為不通過原點的曲線。

**【範例】：**走  $24 \text{ km}$  路程，時速與時間小時的關係表如下，請畫出關係圖。

時速 $x \text{ (km)}$	2	3	4	6	8	12
時間 $y \text{ (時)}$	12	8	6	4	3	2

**解：**從右圖中，逐一標出  $(x, y)$ ，若上表中的  $(x, y)$  數據愈多，則標出的點愈密集。



**反比的應用：**

$x$ 、 $y$  成反比，透過關係表、關係式或關係圖就可以找出積(常數)，進而找無限多組  $(x, y)$ 。

**【範例】：**設  $y$  與  $(2x + 3)$  成反比，當  $x = 6$ ， $y = \frac{1}{3}$  時，求：

- (1)  $x$  與  $y$  的關係如何？ (2) 當  $x = 11$  時  $y = ?$

**解：** (1)  $y \times (2x + 3) = k$ ，

將  $x = 6$ ， $y = \frac{1}{3}$  代入，可得： $\frac{1}{3} \times (12 + 3) = k$

$k = 5$

所以  $x$  與  $y$  的關係式為  $y \times (2x + 3) = 5$ 。

(2) 將  $x = 11$  代入  $y \times (2x + 3) = 5$ ，

可得： $y \times (22 + 3) = 5$



$$y = \frac{1}{5}$$

**【範例】**：一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，( $D = \frac{M}{V}$ )。

也可以改寫成質量(M)等於密度(D)乘以體積(V)，( $M = D \cdot V$ )。

當質量(M)固定時，密度越大則體積越小；密度越小則體積越大。

所以密度(D)跟體積(V)成反比關係。

若一個物體的質量為 200(g)，則：

體積( $cm^3$ )	50	100	150	200	250	300
密度( $g/cm^3$ )	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$

**【範例】**：一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，( $D = M \div V$ )。

假設某物體的密度為  $0.8(g/cm^3)$ ，體積為  $500(cm^3)$ 。當此物體質量為固定值的時候，體積要多少？才能使密度減少 0.2。

解： $\because D = M \div V$

$\therefore M = D \times V$ ，則： $M = 0.8 \times 500 = 400(g)$

使密度減少 0.2，也就是：密度(D) =  $0.8 - 0.2 = 0.6(g/cm^3)$ 。

$M = D \times V$

$\Leftrightarrow 400 = 0.6 \times V$

$\Leftrightarrow V = 400 \div 0.6 = \frac{2000}{3}(cm^3)$

答：當體積為  $\frac{2000}{3}(cm^3)$  時。

**【範例】**：有一個工程，若每天有 8 位工人施工，則需要施工 18 天，若希望提早 6 天完成，則需要多少工人？

解：工程每個人所需的花費的總天數： $8 \times 18 = 144(\text{天})$

將總天數除以施工天數： $144 \div 12 = 12(\text{人})$

**壓力：**

(1) 意義：物體的表面受到外力作用時，表面凹陷越深代表所受的壓力越大。

(2) 定義：單位面積所受的正向力。

(3) 公式：若以 P 表示壓力，F 表示正向力，A 表示接觸面積，

則 F、P、A 的關係為： $P = \frac{F}{A}$ 。

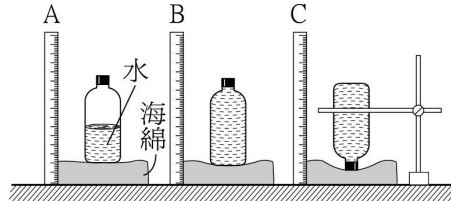
(4) 正向力必須垂直於接觸面。

壓力的單位：由力的單位除以面積的單位而產生。

常用者：公克重／平方公分 ( $\text{gw}/\text{cm}^2$ )、公斤重／平方公尺 ( $\text{kgw}/\text{m}^2$ )

其中  $1 \text{ gw}/\text{cm}^2 = 1000 \text{ kgw}/\text{m}^2$

下圖中 A、B、C 是有關壓力的實驗裝置：



在 B、C 兩個裝置中，因為瓶子裡的水一樣多，所以正向力一樣，但是 C 裝置的瓶子與海綿的接觸面積較小，海綿的凹陷程度較大；而 B 裝置的瓶子與海綿的接觸面積較大，海綿的凹陷程度較小。所以當正向力 ( $F$ ) 固定時，瓶子與海綿的接觸面積 ( $A$ ) 跟海綿的凹陷程度 (壓力  $P$ ) 成反比。

$$F = P \cdot A$$



## 小 試 身 手

### 【例題 1】

誠誠的寒假作業有一項是閱讀哈利波特，誠誠調查幾位同學的閱讀情形如下表，請問：

姓名	愛愛	琦琦	小旻	誠誠
頁數(頁/天)	10	75	15	30
所需天數(天)	45	6	30	15

- (1) 頁數變成 2 倍，3 倍...，所需要的天數變成( )倍，( )倍。
- (2) 誠誠的天數是愛愛的( )倍，頁數是愛愛的( )倍。
- (3) 天數隨著頁數成( )比例。
- (4) 這本書共有( )頁。

### 【例題 2】

企鵝要走到 30 km 外的海邊，若速率為每小時  $x$  km 時，所花的時間為  $y$  小時，請問：

速率 $x$ (km/時)	1	5	4	0.5	$\frac{1}{3}$	45	2	120
時間 $y$ (時)	30	6	7.5	60	90	$\frac{2}{3}$	15	$\frac{1}{4}$

- (1) 完成  $x$  與  $y$  的關係表：
- (2)  $x$  與  $y$  成什麼關係？
- (3) 請寫出  $x$  和  $y$  的關係式？

答：

**【例題 3】**

內部邊長為 1 公尺的正方體盒子，打開每分鐘流入  $x$  公升的水管，花費  $y$  分鐘剛好到達滿水位，請問：

- (1) 正方體盒子的容積多少公升？
- (2)  $x$  與  $y$  的關係式為何？
- (3) 若分別有 A 水管每分鐘流入 20 公升，B 水管每分鐘流 16 公升，則 A 水管和 B 水管的出水量比和比值各為多少？
- (4) 由(3)到達滿水位時，A 水管和 B 水管所花的時間比和比值各為何？

解：

**【例題 4】**

有一個工程，若每天有 12 位工人施工，則需要施工 15 天，若希望提早 5 天完成，請問：

- (1) 原先的工作天數和現在的工作天數比為何？
- (2) 提早 5 天完成則共需要多少位工人？

解：

**【例題 5】**

有大小兩個齒輪相密合，大齒輪齒數 96 齒，小齒輪齒數 32 齒，小齒輪旋轉 12 圈花掉 36 秒，大齒輪要轉幾圈？大齒輪轉 1 圈需多少秒？

解：

**【例題 6】**

有三個齒輪 A、B、C，各別的齒數分別為 72、24、96，A 齒輪以順時針方向旋轉，請回答下列問題：

- (1) B、C 兩齒輪各以何種方向旋轉？
- (2) 若 A 齒輪轉 8 圈，則 B、C 的回轉數各為多少？
- (3) 若 B 齒輪旋轉一圈時，A、C 兩齒輪各旋轉多少度？
- (4) 若 B 齒輪旋轉一圈需 13 秒，則 A、C 兩齒輪各旋轉一圈各需多少秒？

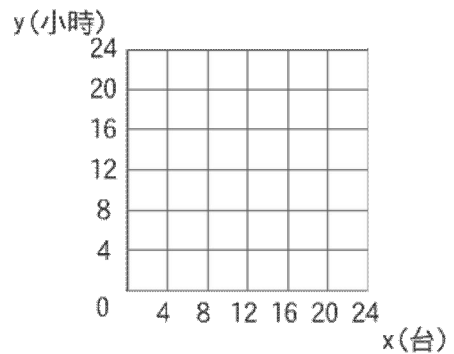
解：

**【例題 7】**

下表是農場割草時，割草機的數目和工作時數的關係表，請問：

$x$ (台)	3		12	24	48		120
$y$ (時)	8	4				$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$

- (1) 完成上面的關係表。
- (2) 根據上表完成右邊的關係圖。
- (3) 右圖是一條( )線。
- (4)  $x$  和  $y$  的關係式是( )比例關係。



**【例題 8】**

小浩和小華在公園玩翹翹板，體重 30 公斤的小華坐在距支點 2 公尺的地方，若小浩的體重  $x$  公斤，坐在距支點  $y$  公尺的地方，請問：

$x$ (kg)	40		20		30
$y$ (m)	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{5}$		4	2

- (1) 完成上面的關係表。
- (2)  $x$  和  $y$  成什關係？
- (3) 畫出右邊的關係圖？

