

## ■ 解一元一次不等式

什麼是一元一次不等式的解？

『凡是使得一元一次不等式成立的數，都是這個不等式的解。』

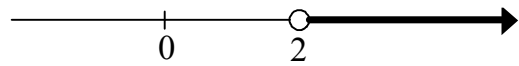
解一元一次不等式的方法：

【解不等式  $ax+b>c$ 】

【範例】：解下列不等式：(1)  $3x-2>4$       (2)  $-5x+3\geq 5$

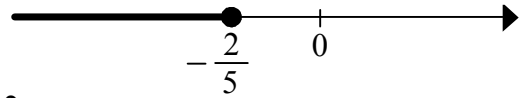
解法：

$$\begin{aligned} (1) \quad 3x-2 > 4 &\Rightarrow 3x-2+2 > 4+2 \\ &\Rightarrow 3x > 4+2 \\ &\Rightarrow 3x > 6 \\ &\Rightarrow x > 2 \end{aligned}$$



所以，不等式的解為所有大於 2 的數，並可用集合  $\{x \mid x > 2\}$  來表示。

$$\begin{aligned} (2) \quad -5x+3 &\geq 5 \Rightarrow -5x \geq 2 \\ &\Rightarrow x \leq -\frac{2}{5} \end{aligned}$$



所以，不等式的解為所有小於或等於  $-\frac{2}{5}$  的數，並可用集合

$\{x \mid x \leq -\frac{2}{5}\}$  來表示。

【解不等式  $ax+b>cx+d$ 】

如何解形如  $ax+b>cx+d$  的不等式呢？（其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  為常數）

【範例】：解不等式  $3x-1\geq 5x-3$ 。

解法：

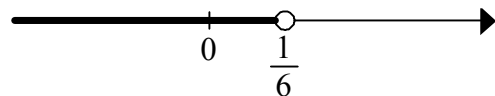
$$\begin{aligned} 3x-1 &\geq 5x-3 \Rightarrow 3x-5x \geq -3+1 \\ &\Rightarrow -2x \geq -2 \\ &\Rightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$



【範例】：解不等式  $4x+6<-2x+7$ 。

解法：

$$\begin{aligned} 4x+6 &< -2x+7 \Rightarrow 4x+2x < 7-6 \\ &\Rightarrow 6x < 1 \\ &\Rightarrow x < \frac{1}{6} \end{aligned}$$



所以，不等式的解為所有小於或等於 1 的數，並可用集合  $\{x \mid x \leq 1\}$  表示。

兩個不等式， $2x < 3x-5$  和  $3x-5 < 13$  同時成立，我們可以用下列的合併不

等式表示： $2x < 3x-5 < 13$ 。

**【解不等式  $ax+b > cx+d > ex+f$ 】**

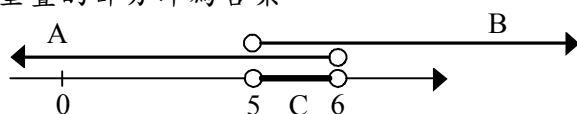
**【範例】：** 解一元一次不等式  $2x < 3x - 5 < 13$ 。

**解法：** 因為  $2x < 3x - 5 < 13$  表示  $2x < 3x - 5$  和  $3x - 5 < 13$  同時成立，因此，先將這兩組不等式分別化簡成最簡不等式後，再找出解的共同部分。

$$\begin{array}{lcl} 2x < 3x - 5 & \text{且} & 3x - 5 < 13 \\ \Rightarrow -x < -5 & & \Rightarrow 3x < 18 \\ \Rightarrow x > 5 & & \Rightarrow x < 6 \end{array}$$

又因為  $x > 5$  和  $x < 6$  須同時成立，因此，原不等式的解為所有大於 5 且小於 6 的數，並可用集合  $\{x \mid x > 5 \text{ 且 } x < 6\}$ （或可用  $\{x \mid 5 < x < 6\}$ ）來表示。

當然，我們也可在數線上圖示  $2x < 3x - 5 < 13$  的解：將上面的結果分別標示在數線上，重疊的部分即為答案：



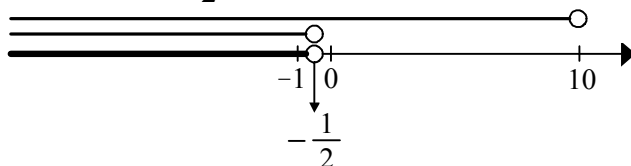
圖中 C 線段即為  $\{x \mid x < 6\}$  與  $\{x \mid x > 5\}$  的共同部分

**【範例】：** 解一元一次不等式  $3x - 6 < 2x + 4 < -2x + 2$ 。

**解法：**

$$\begin{array}{lcl} 3x - 6 < 2x + 4 & & 2x + 4 < -2x + 2 \\ \Rightarrow 3x - 2x < 4 + 6 & & \Rightarrow 2x + 2x < 2 - 4 \\ \Rightarrow x < 10 \text{---} \textcircled{1} & & \Rightarrow 4x < -2 \\ & & \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \text{---} \textcircled{2} \end{array}$$

綜合①跟②， $x < -\frac{1}{2}$  (如下圖)



**解有絕對值的不等式的方法：**

我們來解含有絕對值的不等式。因為可用  $|a-b|$  來表示數線上 A(a) 與 B(b) 兩點的距離，並且  $|x|=3$  可寫成  $|x-0|=3$ ，所以  $|x|=3$  可表示在數線上與原點的距離為 3 的點 P(x)。因此，x 可以等於 3 或 -3。同理，介於 -3 與 3 之間的任何一個數都能滿足不等式  $|x| < 3$ ，也就是說，不等式  $|x| < 3$  的解即為所有介於 -3 與 3 之間的數。因此，它的解可以圖示如下：



顯然的，對於任何一個正數  $a$ ，不等式  $|x| < a$  的解即為所有介於  $-a$  與  $a$  之間的數，並可用集合  $\{x \mid -a < x < a\}$  來表示。

其實，含有絕對值符號的不等式都可改寫成不含絕對值符號的不等式。

$$(1) \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a。$$

$$(2) \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a。$$

$$(3) \quad |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a。$$

$$(4) \quad |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a。$$

如果這個新不等式為一元一次式，我們就可用前面提到的方法來解原不等式。

**【範例】**：將下列含絕對值的不等式改為不含絕對值的不等式：

$$(1) \quad |x| < 2 \quad (2) \quad |x| \leq 3 \quad (3) \quad |x| > 2 \quad (4) \quad |x| \geq 3。$$

解：(1)  $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2。$

$$(2) \quad |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3。$$

$$(3) \quad |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ 或 } x < -2。$$

$$(4) \quad |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3。$$

**【範例】**：解下列各不等式：(1)  $|x| + 1 < 2$  (2)  $|x| - 2 > 1$

解：(1)  $|x| + 1 < 2$  先移項化簡成  $|x| < 1$ ，再去掉絕對值  
即為  $-1 < x < 1。$

(2)  $|x| - 2 > 1$  先移項化簡成  $|x| > 3$ ，再去掉絕對值  
即為  $x > 3$  或  $x < -3。$

**【範例】**：解不等式： $|x - 2| < 1。$

解：先去掉絕對值， $-1 < x - 2 < 1$ ，在移項化簡為  
 $-1 + 2 < x < 1 + 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$   
故此不等式解為  $1 < x < 3。$

**【範例】**：解不等式： $|x + 2| > 4。$

解：先去掉絕對值， $x + 2 > 4$  或  $x + 2 < -4$ ，在移項化簡為  
 $x + 2 > 4 \Leftrightarrow x > 4 - 2 \Leftrightarrow x > 2$   
 $x + 2 < -4 \Leftrightarrow x < -2 - 4 \Leftrightarrow x < -6$   
故此不等式解為  $x > 2$  或  $x < -6。$

**【範例】**：解下列不等式： $|2x-1| < 5$ ，並在數線上標示其範圍。

$$\begin{aligned} \text{解} : \quad |2x-1| < 5 &\Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \\ &\Leftrightarrow -5+1 < 2x < 5+1 \\ &\Leftrightarrow -4 < 2x < 6 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 3 \end{aligned}$$



因此，不等式的解為所有介於-2及3的數，並可用集合 $\{x \mid -2 < x < 3\}$ 來表示。

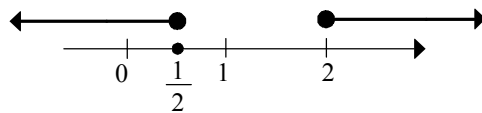
**【範例】**：解不等式： $|-4x+5| \geq 3$ ，並在數線上標示其範圍。

$$\text{解} : \quad |-4x+5| \geq 3 \Leftrightarrow -4x+5 \geq 3 \text{ 或 } -4x+5 \leq -3$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 當 } -4x+5 \geq 3 &\Leftrightarrow 2 \geq 4x \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 當 } -4x+5 \leq -3 &\Leftrightarrow 8 \leq 4x \\ &\Leftrightarrow 2 \leq x \end{aligned}$$

故其解為 $x \geq 2$ 或 $x \leq \frac{1}{2}$ 。

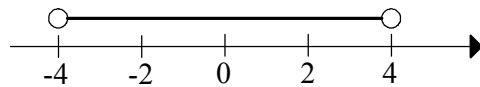


**注意**：我們知道  $-4 < x < 4 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow |x-0| < 4$ 。

如果是不等式  $-4 < x < 2$ ，我們將如何改為含絕對值的不等式？

我們先計算2與-4的中點為-1，-1與2及4都相差3，因此

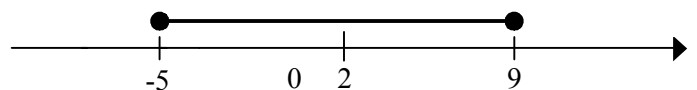
我們有 $|x - (-1)| < 3 \Leftrightarrow |x + 1| < 3$



**【範例】**：將  $-5 < x < 9$  改為含絕對值的不等式？

**解**：-5與9的距離為 $|9 - (-5)| = 14$ ，其一半的距離為7，故其中點為2。

因此我們有 $|x - 2| < 7$

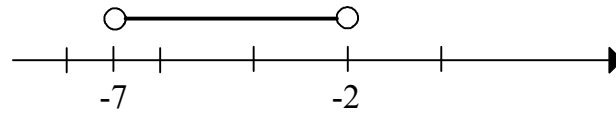


**【範例】**：將  $-7 < x < -2$  改為含絕對值的不等式？

解：-7 與 -2 的距離為  $|-7 - (-2)| = 5$ ，其一半的距離為  $\frac{5}{2}$ ，

故其中點為  $-2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$ 。

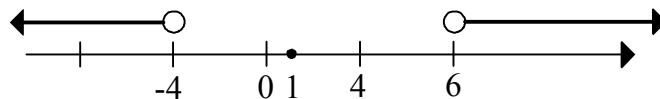
因此我們有  $|x - (-\frac{9}{2})| < 5 \Leftrightarrow |x + \frac{9}{2}| < 5$



**注意**：我們知道  $x < -4$  或  $x > 4 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow |x - 0| > 4$ 。

如果是不等式  $x < -4$  或  $x > 6$ ，我們將如何改為含絕對值的不等式？

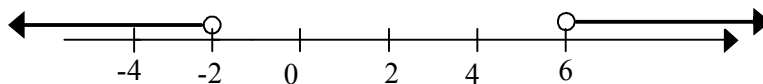
我們先計算 6 與 -4 相距為 10，故其兩點的中點為 1，-4 與 1 及 6 與 1 都相差 5，因此我們有  $|x - 1| > 5$



**【範例】**：將  $x < -2$  或  $x > 6$  改為含絕對值的不等式？

解：-2 與 6 的距離為  $|6 - (-2)| = 8$ ，其一半的距離為 4，故其中點為 2。

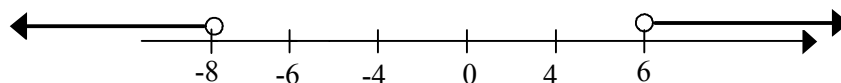
因此我們有  $|x - 2| > 4$ 。



**【範例】**：將  $x < -8$  或  $x > 6$  改為含絕對值的不等式？

解：-8 與 6 的距離為  $|6 - (-8)| = 14$ ，其一半的距離為 7，故其中點為 -1。

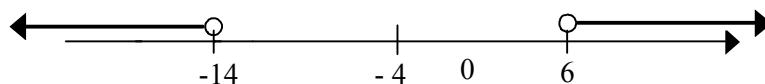
因此我們有  $|x - (-1)| > 7 \Leftrightarrow |x + 1| > 7$ 。



**【範例】**：將  $x < -14$  或  $x > 6$  改為含絕對值的不等式？

解：-14 與 6 的距離為  $|6 - (-14)| = 20$ ，其一半的距離為 10，故其中點為 -4。

因此我們有  $|x - (-4)| > 10$ 。



**解不等式應用問題的方法：**

**【範例】：**想買每個售價 45 元的茶杯  $x$  個，和每個售價 80 元的桌墊 4 個，若總價要在 500 元以下，則茶杯最多有幾個？

解：

茶杯  $x$  個共售  $45x$  元

茶杯加桌墊的總售價為  $(45x + 80 \times 4)$  元

總價要在 500 元以下也就是說要小於等於 500 元

所以依題意可列式為：

$$45x + 80 \times 4 \leq 500$$

$$\Rightarrow 45x + 320 \leq 500$$

$$\Rightarrow 45x \leq 500 - 320$$

$$\Rightarrow x \leq 180 \div 45$$

$$\Rightarrow x \leq 4$$

答：茶杯最多有 4 個

**【範例】：**已知山路長  $x$  公里，若上山每小時走 3 公里，沿原路下山每小時走 5 公里，且上山與下山的來回時間不超過 6 小時，則山路長幾公里？

解：

上山的時間為  $\frac{x}{3}$  小時；下山的時間為  $\frac{x}{5}$  小時不到 6 小時也就是小於 6 小時。

所以依題意可列式為：

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 6$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{15} + \frac{3x}{15} < 6$$

$$\Rightarrow \frac{8x}{15} < 6$$

$$\Rightarrow 8x < 6 \times 15$$

$$\Rightarrow 8x < 90$$

$$\Rightarrow x < 90 \div 8$$

$$\Rightarrow x < \frac{45}{4}$$

答：山路長小於  $\frac{45}{4}$  公里

**【範例】**：水梨 1 公斤 70 元，蘋果 1 公斤 60 元，小誠家請客，至少需要買 6 公斤的水果，如果小誠的爸爸已經挑選 2 公斤的水梨，在總價不超過 500 元的條件下，爸爸最多可以買到多少公斤的蘋果？最少需要買多少公斤的蘋果？

**解**：設爸爸需要買  $x$  公斤的蘋果。

依題意可列不等式如下：

$$x + 2 \geq 6 \cdots \cdots (1) \quad (\text{至少需要買 6 公斤的水果})$$

$$70 \cdot 2 + 60 \cdot x \leq 500 \cdots \cdots (2) \quad (\text{總價不超過 500 元})$$

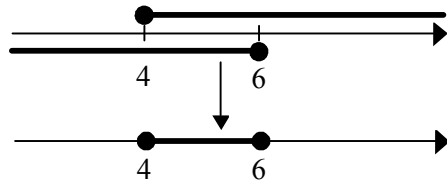
由(1)可得： $x \geq 4$

由(2)可得： $140 + 60x \leq 500 \Rightarrow 60x \leq 360$

$$\Rightarrow x \leq 6$$

$\therefore x \geq 4$  且  $x \leq 6$  將兩不等式合併為： $4 \leq x \leq 6$

所以爸爸最多可以買 6 公斤的蘋果，最少需要買 4 公斤的蘋果。



**【範例】**：如果有一個長方體紙箱，他的三邊長為  $(x - 30)$  公分、 $x$  公分、 $(x + 30)$  公分。如果要符合「最長邊不得超過 150 公分，且另外兩邊和的兩倍加上最長邊不得超過 300 公分。」請問  $x$  的範圍是多少？

**解**：最長邊為  $x + 30$ ，

依題意可列不等式如下：

$$x + 30 \leq 150 \cdots \cdots (1) \quad (\text{最長邊不得超過 150 公分})$$

$$x + 30 + 2(x - 30 + x) \leq 300 \cdots \cdots (2)$$

(另外兩邊和的兩倍加上最長邊不得超過 300 公分)

$$\text{又} \because \text{邊長一定為正數}, \therefore \text{最小邊 } x - 30 > 0 \cdots \cdots (3)$$

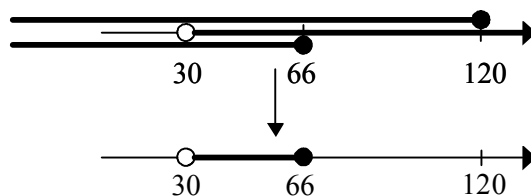
由(1)可得： $x \leq 120$

由(2)可得： $5x \leq 330 \Rightarrow x \leq 66$

由(3)可得： $x > 30$

將  $x \leq 120$ 、 $x \leq 66$ 、 $x > 30$  合併可得： $30 < x \leq 66$

所以  $x$  的範圍是  $30 < x \leq 66$ 。





## 小 試 身 手

### 【例題 1】

解下列不等式：

$$(1) 2x - 4 < x - 28 \quad (2) 5x + 20 > 25$$

答：

### 【例題 2】

解下列不等式：

$$(1) 3x - 2 > x - 2 \quad (2) 7x - 28 \leq 49$$

答：

### 【例題 3】

解下列不等式：

$$(1) \frac{3}{5}x - 5 \leq 55 + \frac{1}{5}x$$

$$(2) \frac{1}{2}x - 4 \geq 32$$

答：

### 【例題 4】

解下列不等式：

$$(1) \frac{1}{2}x + 22 \geq 2x - 11$$

$$(2) 15x + 20 \leq 5x - 30$$

答：

### 【例題 5】

解下列不等式：

$$(1) x + 1 < 3x - 9 < x - 1$$

$$(2) 2x < 4x + 8 < 20$$

解：

### 【例題 6】

解下列不等式：

$$(1) 3x < 3x + 7 < 6x - 2$$

$$(2) 2x - 3 < 3x + 5 < 13$$

解：



**【例題 7】**

解下列不等式：

(1)  $\frac{1}{2}x + 6 < 2x - 33 < \frac{3}{4}x + 2$

(2)  $3x + 2 < \frac{1}{3}x + 1 < \frac{3}{4}x - 2$

解：

**【例題 8】**

解下列不等式：

(1)  $\frac{1}{2}x - 10 < 3x < \frac{1}{5}x + 28$

(2)  $\frac{1}{2}x - 1 < 2\frac{1}{2}x + 1 < 2x$

解：

**【例題 9】**

解下列不等式：

(1)  $2|x + 1| \leq 8$

(2)  $|4x - 1| < 31$

解：

**【例題 10】**

解下列不等式：

(1)  $-|2x - 1| \leq -19$

(2)  $-3|x + 8| > -102$

解：

**【例題 11】**

解下列不等式：

(1)  $|\frac{1}{2}x - 4| \geq 5$

(2)  $|\frac{2}{3}x + 1| \leq \frac{3}{4}$

解：

**【例題 12】**

解下列不等式：

(1)  $|\frac{1}{2}x - 4| \leq 5$

(2)  $-|\frac{2}{5}x - 3| \geq -1\frac{1}{4}$

解：

**【例題 13】**設  $0 < a < 7$ ，且  $ax - x + 9 \geq 3(2x - 1)$  的解為  $x \leq 6$ ，則  $a =$ \_\_\_\_\_。

解：

**【例題 14】**設  $a < 1$ ，解  $x$  的不等式  $ax + a - x - 1 > 0$ ，得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

解：

**【例題 15】**

解不等式  $\frac{2x-3}{3} < \frac{x+4}{4} - \frac{27}{4}$

解：

**【例題 16】**

解不等式  $\frac{1}{5}x - \frac{2x-3}{3} + 1 \leq 0$

解：

**【例題 17】**

不等式  $x - 1 > -2(8 - 3x)$  的正整數解共有 \_\_\_\_\_ 個。

解：

**【例題 19】**

阿達比小倩高，小倩比吉米高，偉恩比阿達高，所以四個人的身高（依序由高到低）是 \_\_\_\_\_。

解：

**【例題 21】**

有甲、乙兩容器，甲容器內裝有  $60\ell$  的水，乙容器內裝有  $15\ell$  的水。請問最少要從甲容器中取多少  $\ell$  的水到乙容器中，甲容器內的水才會是乙容器內水的 2 倍以下？

解：

**【例題 18】**

若  $7x + 10 \leq 9x + 4$ ，則在  $x$  的範圍中，不滿 7 的所有整數為 \_\_\_\_\_。

解：

**【例題 20】**

若某次數學競賽中，明華的成績不比美英差，美英的成績也不比明華差，則兩人的成績誰比較好？

答：\_\_\_\_\_。

解：

**【例題 22】**

想買每個售價 50 元的咖啡杯  $x$  個，和每個售價 90 元的水壺 6 個，若總價要在 900 元以下，則咖啡杯最多可以買幾個？

解：

**【例題 23】**

解下列不等式：

$$\frac{5x-2}{3} - (4x+3) \geq \frac{x-7}{5}$$

解：

**【例題 25】**

回答下列各題：

(1) 解  $|4x-2| < 7$ 。

(2) 若  $|x-m| \leq n$  的解為  $2 \leq x \leq 6$ ，求  $m$ 、 $n$  的值。(3) 若  $|ax-b| < 4$  的解為  $1 < x < 5$ ，求  $a$ 、 $b$  的值。

解：

**【例題 24】**

解下列不等式：

$$0.8(x+2) - (2x-1) < 0.1(3x+5)$$

解：

**【例題 26】**

回答下列各題：

(1) 解  $|5x-4| < 61$ 。

(2) 若  $|x-m| \leq n$  的解為  $7 \leq x \leq 13$ ，求  $m$ 、 $n$  的值。(3) 若  $|ax+b| < 7$  的解為  $2 < x < 9$ ，求  $a$ 、 $b$  的值。

解：