

乘法公式與多項式

■ 乘法公式

藉由以前對數字的運算規則，我們對符號運算也給定一些遵循的運算規則：

(1) 交換律：

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

【範例】： $7 + 4 = 4 + 7$ 。

【範例】： $7 \times 4 = 4 \times 7$ 。

(2) 結合律：

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

【範例】： $2 + 3 + 5 = 2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5$ 。

【範例】： $2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$ 。

(3) 分配律：

1. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2. $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

3. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

4. $(a - b) \times c = a \times c - b \times c$

5. $(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$

6. $(a - b) \times (c + d) = (a - b) \times c + (a - b) \times d = a \times c - b \times c + a \times d - b \times d$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

1. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2. $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

3. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

4. $(a - b) \times c = a \times c - b \times c$

5. $(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d$
 $= a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$

6. $(a - b) \times (c + d) = (a - b) \times c + (a - b) \times d$
 $= a \times c - b \times c + a \times d - b \times d$

【範例】： $2 \times (3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$ 。

【範例】： $2 \times (3 - 5) = 2 \times 3 - 2 \times 5 = 6 - 10 = -4$ 。

【範例】： $(3 + 5) \times 7 = 3 \times 7 + 5 \times 7 = 21 + 35 = 56$ 。

【範例】： $(3 - 5) \times 7 = 3 \times 7 - 5 \times 7 = 21 - 35 = -14$ 。

【範例】： $(2 + 5) \times (3 + 6) = (2 + 5) \times 3 + (2 + 5) \times 6$
 $= 2 \times 3 + 5 \times 3 + 2 \times 6 + 5 \times 6$
 $= 6 + 15 + 12 + 30$
 $= 63$ 。

【範例】： $(2 - 5) \times (3 + 6) = (2 - 5) \times 3 + (2 - 5) \times 6$
 $= 2 \times 3 - 5 \times 3 + 2 \times 6 - 5 \times 6$
 $= 6 - 15 + 12 - 30$
 $= -27$ 。

【範例】： 求 $123 \times 279 + 127 \times 121 + 123 \times 121 + 127 \times 279$ 的值。

解： 在上面的算式中，我們觀察到 123×279 與 123×121 有公因數 123，
 127×121 與 127×279 有公因數 127，因此它是 $(123 + 127) \times (121 + 279)$
的乘積展開：

$$\begin{aligned} & 123 \times 279 + 127 \times 121 + 123 \times 121 + 127 \times 279 \\ &= 123 \times 279 + 123 \times 121 + 127 \times 279 + 127 \times 121 \\ &= (123 + 127) \times (121 + 279) \\ &= 250 \times 400 \\ &= 100000。 \end{aligned}$$

【範例】： 利用公式展開下列各式：

(1) $(1 + a)(1 + b)$ (2) $(x + 2)(x + 3)$ (3) $(2x + y)(3x - y)$

解： (1) $(1 + a)(1 + b) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot b + 1 \cdot a + a \cdot b$
 $= 1 + a + b + ab$

(2) $(x + 2)(x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3$
 $= x^2 + 5x + 6$

(3) $(2x + y)(3x - y) = (2x + y)[3x + (-y)]$
 $= 2x \cdot 3x + 2x \cdot (-y) + y \cdot 3x + y \cdot (-y)$
 $= 6x^2 - 2xy + 3xy - y^2$
 $= 6x^2 + xy - y^2$

【範例】：問 $1999 \times 20002000 \times 200120012001$ 是否與 $2001 \times 19991999 \times 200020002000$ 相等？

$$\begin{aligned} \text{解} : & 1999 \times 20002000 \times 200120012001 \\ &= (2000 - 1) \times 20002000 \times 200120012001 \\ &= (2000 \times 20002000 - 20002000) \times 200120012001 \\ &= (2000 \times 20002000 - 20002000) \times (200020002000 + 100010001) \\ &= 2000 \times 20002000 \times 200020002000 - 20002000 \times 200020002000 \\ &\quad + 2000 \times 20002000 \times 100010001 - 20002000 \times 100010001 \\ &= 2000 \times 20002000 \times 200020002000 - 20002000 \times 200020002000 \\ &\quad + 20002000 \times 200020002000 - 20002000 \times 100010001 \\ &= 2000 \times 20002000 \times 200020002000 - \underline{20002000 \times 100010001} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2001 \times 19991999 \times 200020002000 \\ &= (2000 + 1) \times (20002000 - 10001) \times 200020002000 \\ &= (2000 \times 20002000 + 20002000 - 2000 \times 10001 - 10001) \times 200020002000 \\ &= (2000 \times 20002000 + 20002000 - 20002000 - 10001) \times 200020002000 \\ &= (2000 \times 20002000 - 10001) \times 200020002000 \\ &= 2000 \times 20002000 \times 200020002000 - \underline{10001 \times 200020002000} \end{aligned}$$

問 $(\underline{20002000 \times 100010001})$ 是否與 $(\underline{10001 \times 200020002000})$ 相等。

若相等，則兩數相除為 1。

$$\text{因為 } \frac{20002000 \times 100010001}{10001 \times 200020002000} = \frac{20002 \times 100010001}{10001 \times 200020002} = \frac{2 \times 10001 \times 100010001}{10001 \times 2 \times 100010001} = 1$$

所以 $(\underline{20002000 \times 100010001}) = (\underline{10001 \times 200020002000})$ 。

則： $1999 \times 20002000 \times 200120012001 = 2001 \times 19991999 \times 200020002000$ 。

答：兩數相等。

平方公式

(1) 平方公式：

二項式相乘特殊公式：

【公式 1】： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}\because (a+b)(a+b) &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

則可得到完全平方和的公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ (a+b) \times & (a+b) & \\ & \curvearrowleft & \end{array} \\ = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ = a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

【範例】：利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(x+1)^2$ (2) $(2x+3y)^2$

解：(1) $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2$
 $= x^2 + 2x + 1$

(2) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2$
 $= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

【公式 2】： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}\because (a-b)(a-b) &= a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

則可得到完全平方差的公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ (a-b) \times & (a-b) & \\ & \curvearrowleft & \end{array} \\ = a \times a - a \times b - b \times a - b \times (-b) \\ = a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

【範例】：利用公式 2 展開下列各式：

(1) $(x-1)^2$ (2) $(x-a)^2$ (3) $(2x-3y)^2$

解：(1) $(x-1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2$
 $= x^2 - 2x + 1$

(2) $(x-a)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2$
 $= x^2 - 2ax + a^2$

(3) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$
 $= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

【公式 3】： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\because (a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - b^2$$

則可得到平方差公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a+b) \times (a-b) = a \times a - a \times b + b \times a + b \times (-b) \\ = a^2 - b^2$$

【範例】：利用公式 3 展開下列各式：

(1) $(x-2)(x+2)$ (2) $(3x+4y)(3x-4y)$ (3) $(a+b-c)(a-b+c)$

解：(1) $(x-2)(x+2) = x^2 - (2)^2$
 $= x^2 - 4$

(2) $(3x+4y)(3x-4y) = (3x)^2 - (4y)^2$
 $= 9x^2 - 16y^2$

(3) 因為 $a+b-c = a+(b-c)$ 和 $a-b+c = a-(b-c)$ ，所以可以得到：

$$(a+b-c)(a-b+c) = [a+(b-c)][a-(b-c)] \\ = a^2 - (b-c)^2 \\ = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$$

【範例】：求出 $117^2 - 17^2$ 的值。

解：如同平方和公式，我們也常利用平方差公式來簡化數的計算。

我們觀察到 $117 = 100 + 17$ ，所以可得到下列算式：

$$117^2 - 17^2 = (117+17)(117-17) \\ = 134 \times 100 \\ = 13400$$

【公式 4】： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

我們知道 $a+b+c = (a+b)+c$ ，所以利用和的完全平方公式，即可得到：

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 \\ = [(a+b)+c] \cdot [(a+b)+c] \\ = (a+b)^2 + 2 \cdot (a+b) \cdot c + c^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \circ$$

因此，得到三項和的完全平方公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

【範例】：利用公式 4 展開下列各式：(1) $(x+y+3)^2$ (2) $(a+2b-3c)^2$ 。

解：(1) $(x+y+3)^2 = x^2 + y^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot x$

$$= x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6y + 6x$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y + 9$$

(2) $(a+2b-3c)^2 = [a+(2b)+(-3c)]^2$

$$= a^2 + (2b)^2 + (-3c)^2 + 2a(2b) + 2(2b)(-3c) + 2a(-3c)$$

$$= a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab - 12bc - 6ac$$

※公式整理：1. 完全平方和： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. 完全平方差： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. 平方差： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4. 三項完全平方和： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$



小 試 身 手

【例題一】

展開下列各式：

(1) $(1+2a)(2-3b)$ (2) $(-x+5y)(2x-y)$

【練習一】

展開下列各式：

(1) $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b)^2$ (2) $(2x-y+3)^2$

【例題二】

展開下列各式：

(1) $(a-b-c)(a+b+c)$
(2) $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

【練習二】

展開下列各式：

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$
(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

【例題三】

展開下列式子： $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

【練習三】

展開下列式子： $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

【例題四】

求下列各題的值：

(1) $\frac{176^2}{138^2 - 38^2}$

(2) $2001 \times 2003 - 1998 \times 2006$

【練習四】

求下列各題的值：

(1) $\frac{99^2}{201^2 - 102^2}$

(2) $301 \times 199 + 499^2$

【例題五】

已知 $(6825.5)^2 = 6825^2 + x$ ，求 x 的值。

【練習五】

已知 $(7999)^2 = 8000^2 - x$ ，求 x 的值。

【例題六】

若 $(x^3 + ax + 2)(2x - a)$ 的展開式中， x^3 的係數為 9，求 a 的值。

【練習六】

若 $(x + a)^2(x^2 + x + 1)$ 的展開式中， x^3 的係數為 5，求 a 的值。

【例題七】

若 $1007^2 = 1000000 + 2000x + 49$ ，
 $995^2 = 1000000 + 2000y + 25$ ，求 xy ？

【練習七】

$(987 + 218)^2 - (567 - 362)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題八】

若 $(100 + a)^2 = 100^2 + 800 + b$ ，則
 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習八】

設 $a - b = 5$ ， $ab = 6$ ，求：

(1) $a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

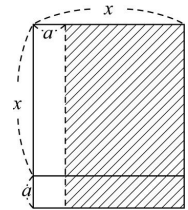
(2) $3a^2 - 4ab + 3b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題九】

如附圖，將邊長為 x 公分的正方形，一邊增加 a 公分，一邊減少 a 公分，則

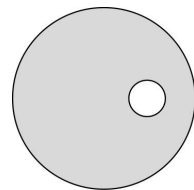
(1) 斜線部分的面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 平方公分（以 x 、 a 表示）

(2) 若 $x = 996$ ， $a = 4$ ，則斜線部分面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 平方公分。



【練習九】

如附圖，大圓半徑 12.95 公分，小圓半徑 2.95 公分，則灰色部分面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 平方公分。



【例題九】

計算 $15.02^2 - 2 \times 15.02 \times 0.02$ 的值為何？

【練習九】

利用乘法公式求得 $998^2 = 1000^2 + m + 2^2$ ，
則 $m = ?$ 。

立方公式

立方公式

1. 立方和與立方差：

【公式 1】： $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

我們可利用分配律來展開一次式與二次式的乘積。

例如，展開 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 即可得到：

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

因此，得到立方和公式： $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$\begin{aligned}(a+b) \times (a^2-ab+b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

【範例】：利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

解：(1) $(x+2)(x^2-2x+4) = (x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$

$$= x^3 - 2^3$$

$$= x^3 - 8$$

(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

$$= (2a+5b)[(2a)^2 - (2a)(5b) + (5b)^2]$$

$$= (2a)^3 + (5b)^3$$

$$= 8a^3 + 125b^3$$

【公式 2】： $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

同樣的，我們可以展開 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 並經合併化簡後，

可得到立方差公式： $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

其實，只要把公式 1 中的 b 以 $-b$ 代入，即可得上式。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$\begin{aligned}(a-b) \times (a^2+ab+b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

【範例】：利用公式 7 展開下列各式：

$$(1) (2x-1)(4x^2+2x+1) \quad (2) \left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4}\right)$$

解：(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1) = (2x-1)[(2x)^2+(2x)\cdot 1+1^2]$
 $= (2x)^3-1^3$
 $= 8x^3-1$

$$(2) \left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4}\right) = \left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\left[\left(\frac{a}{3}\right)^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{b}{2}\right)^3$$
$$= \frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}$$

2. 完全立方公式：

【公式 3】： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

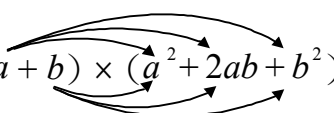
在展開 $(a+b)^3$ ，如同在做立方和與立方差一樣，可先將 $(a+b)^3$ 寫成 $(a+b)(a+b)^2$ ，

再利用和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$
$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

由此，我們可得到和的完全立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a+b) \times (a+b)^2 = (a+b) \times (a^2+2ab+b^2)$$

$$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

【範例】：展開下列各式：

$$(1) (x+2)^3 \quad (2) (3x+2y)^3$$

解：(1) $(x+2)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
 $= x^3+6x^2+12x+8$

$$(2) (3x+2y)^3 = (3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3$$
$$= 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$$

【公式 4】： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

同樣的，展開 $(a-b)^3$ 的乘積，可先將 $(a-b)^3$ 寫成 $(a-b)(a-b)^2$ ，再利用和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\ &= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

可得到差的完全立方公式： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

其實，只要將公式 3 中的 b 以 $-b$ 代入，同樣可得上式。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$\begin{aligned}(a-b) \times (a-b)^2 &= (a-b) \times (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

【範例】：展開下列各式：

(1) $(x-1)^3$ (2) $(4a-5b)^3$

解：(1) $(x-1)^3 = x^3 - 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 - 1^3$
 $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(2) $(4a-5b)^3 = (4a)^3 - 3(4a)^2(5b) + 3(4a)(5b)^2 - (5b)^3$
 $= 64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$

※立方公式整理及補充：

1. 立方和： $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ 。

2. 立方差： $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ 。

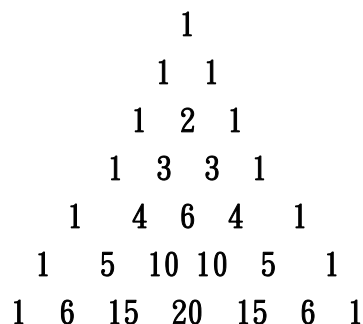
3. 完全立方和： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。

4. 完全立方差： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

5. $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。

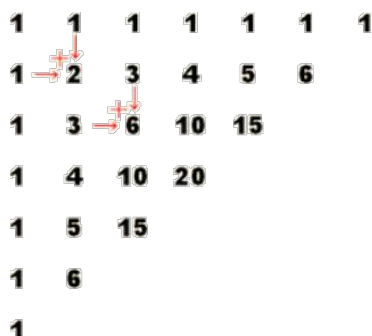
6. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + ab + b^4$ 。

有關 $(a+b)^n$ 的展開式：（巴斯卡三角形）



這個像金字塔一樣的數字三角形，一般叫做「巴斯卡三角形」，在中國叫做「賈憲三角」或「楊輝三角」。巴斯卡是十七世紀的一位法國數學家，他造出「巴斯卡三角形」的方法是這樣的：

先在紙上寫出一行和一列的「1」，然後在各個位置中填入數字，每一個位置上的數字都是它上面一個數和左邊一個數的和。接下來，把這個表右轉 45° ，放正了，就得到上面的數字三角形了！



現在的數學書裡，都把這個三角形稱為「巴斯卡三角形」，事實上，在南宋楊輝所寫的數學書裡面，早就介紹了由北宋賈憲所創造出來的相同三角形了（所以在中國稱為「賈憲三角」或「楊輝三角」），時間可要比巴斯卡早了約六百年呢！

到底這個三角形有什麼用處呢？其實，這個三角形的每一列數字，剛好就是乘法公式學到的 $(a+b)^n$ 的展開式的係數表：

第 n 列	$(a+b)^n$	將 $(a+b)^n$ 展開	<u>巴斯卡三角形</u>
$n=0$	$(a+b)^0$	1	1
$n=1$	$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$n=2$	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$n=3$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$n=4$	$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$n=5$	$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1
\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}

所以，想知道 $(a+b)^n$ 展開後的係數，只要查一下巴斯卡三角形的第 n 列就行了。

【範例】：求 $(x+2)^4$ 的展開式。

解：利用帕斯卡三角形， $n=4$ 的係數為：1、4、6、4、1。

$$\begin{aligned} \text{則 } (x+2)^4 &= x^4 + 4(x^3 \cdot 2) + 6(x^2 \cdot 2^2) + 4(x \cdot 2^3) + 2^4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16。 \end{aligned}$$

【範例】：求 $(x-2)^4$ 的展開式。

解：利用帕斯卡三角形， $n=4$ 的係數為：1、4、6、4、1。

$$\begin{aligned} \text{則 } (x-2)^4 &= x^4 + 4(x^3) \cdot (-2) + 6(x^2) \cdot (-2)^2 + 4(x) \cdot (-2)^3 + (-2)^4 \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16。 \end{aligned}$$

【範例】：求 $(2x+3y)^5$ 的展開式。

解：利用帕斯卡三角形， $n=5$ 的係數為：1、5、10、10、5、1。

$$\begin{aligned} \text{則 } (2x+3y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 \cdot (3y) + 10(2x)^3 \cdot (3y)^2 \\ &\quad + 10(2x)^2 \cdot (3y)^3 + 5(2x) \cdot (3y)^4 + (3y)^5 \\ &= 32x^5 + 5 \cdot 16x^4 \cdot 3y + 10 \cdot 8x^3 \cdot 9y^2 + 10 \cdot 4x^2 \cdot 27y^3 \\ &\quad + 5 \cdot 2x \cdot 81y^4 + 243y^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 \\ &\quad + 243y^5 \end{aligned}$$

【範例】：求 $(2x-3y)^5$ 的展開式。

解：利用帕斯卡三角形， $n=5$ 的係數為：1、5、10、10、5、1。

$$\begin{aligned} \text{則 } (2x-3y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4 \cdot (-3y) + 10(2x)^3 \cdot (-3y)^2 \\ &\quad + 10(2x)^2 \cdot (-3y)^3 + 5(2x) \cdot (-3y)^4 + (-3y)^5 \\ &= 32x^5 - 5 \cdot 16x^4 \cdot 3y + 10 \cdot 8x^3 \cdot 9y^2 - 10 \cdot 4x^2 \cdot 27y^3 \\ &\quad + 5 \cdot 2x \cdot 81y^4 - 243y^5 \\ &= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 \\ &\quad - 243y^5 \end{aligned}$$



小 試 身 手

【例題一】

試算出下列各式的值：

(1) $75^3 + 25^3$

(2) $(65 + 35)(65^2 - 65 \times 35 + 35^2)$

【練習一】

試算出下列各式的值：

(1) $75^3 - 25^3$

(2) $(100 - 3)(100^2 + 100 \times 3 + 3^2)$

【例題二】

試算出下列各式的值：

$99^3 + 3 \times 99^2 \times 1 + 3 \times 99 \times 1^2 + 1^3 = ?$

【練習二】

試算出下列各式的值：

$1001^3 - 3 \times 1001^2 + 3 \times 1001 - 1 = ?$

【例題三】

若 $a^2 + b^2 = 13$ 且 $ab = 6$ ，
試求 $a^4 + b^4$ 之值。

【練習三】

若 $(a+b)^2 = 25$ 且 $ab = 6$ ，
試求 $a^4 + b^4$ 之值。

【例題四】

已知 $a+b=10$ 且 $ab=15$ ，試求 $a^3 + b^3$ 之值。

【練習四】

已知 $a-b=15$ 且 $ab=30$ ，試求 $a^3 - b^3$ 之值。