多項式的四則運算

【範例】：王老先生打算在河岸邊用 40 公尺長的鐵絲圍成一個矩形菜圃(河岸邊不圍)，請問：這塊菜圃的面積為多少平方公尺？

解　：設寬為 x 公尺，則長為$(40-2x)$公尺。

菜圃面積$=x(40-2x)=40x-2x^2$(平方公尺)。

答：當寬為 x 公尺時，菜圃面積為 $40x-2x^2$(平方公尺)。

在上面的範例中，$(40x-2x^2)$是我們這一節所要學的多項式。

現在讓我們先來認識一下多項式。

(1) **多項式的定義**：

1. 多項式：

像 x^2+2x+2 這類由數和文字符號 x 進行加法和乘法運算所構成的式子，稱為 x 的多項式。

2. 一元一次式：

當一個式子只含有一個未知數(一元)，而此未知數的次方是一次，我們稱為一元一次多項式，例如：$-3x-5$，$y+3$。

3. 一元二次式：

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 2 時，我們稱為一元二次多項式，例如：$f(x)=x^2+3x+2$ 為一元二次多項式。

4. 一元三次式：

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 3 時，我們稱為一元三次多項式，例如：$f(x)=2x^3-3x^2+x+2$ 為一元三次多項式。

5. 項：

多項式中，被加、減號分開的每一部份，包括其前面的符號叫做項。

例如：多項式 $5x^2+2x-1$ 寫成 $5x^2+2x+(-1)$ 有三個項 $5x^2$、$2x$、(-1)。

6. 常數項：

多項式中的項，如果只是一個數，而不含任何其他文字符號 x，叫做常數項。

7. 次數：

a. 含一個文字的多項式；此文字的最高指數叫做此多項式的次數(次方)。

b. 含多文字的多項式；各項中，諸文字次數之最高者叫做這多項式的次數(次方)。

例如：x^2+2x+2 文字 x 的最高次數是 2，則此多項式為二次多項式簡稱二次式。

8. 升冪排列或升次排列：

把多項式的各項按 x 的次數由小到大排列，如果有常數項時，把它放在最前面。

例如：$-2x-3x^2+4$ 的升冪排列是 $4-2x-3x^2$。

9. 降冪排列或降次排列：

把多項式的各項按 x 的次數由大到小排列，如果有常數項時，把它放在最後面。

例如：$-2x-3x^2+4$ 的升冪排列是 $-3x^2-2x+4$。

10. 同類項：

在多項式中，x 的次數相同的項，稱為同類項;常數項也是同類項。

例如：$3x^2-2x+4$ 與 $5x^2+2x-1$，3 和 5 是 x^2 的同類項係數，-2 和 2 是 x 的同類項係數，4 和 -1 是常數項係數。

(2) **多項式的加、減運算：**

有關多項式的加減運算，基本上就是將同類項的係數對應相加或相減，所以需要將同類項對齊，再將係數相加或相減。通常我們會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

1. 在用橫式做多項式的加法、減法運算時，事實上就是將同類項的係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(-x+2x^2+2)+(1+2x+3x^2)$。

解：

$$\begin{aligned} & (-x+2x^2+2)+(1+2x+3x^2) \\ =\ & (2x^2-x+2)+(3x^2+2x+1) \\ =\ & (2+3)x^2+(-1+2)x+(2+1) \\ =\ & 5x^2+x+3 \end{aligned}$$

2. 在用直式做多項式的加法、減法運算時，須將同類項對齊，再將係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(2x^2-x+2)+(3x^2+2x+1)$。

解：

$$\begin{array}{rr} & 2x^2-x+2 \\ + & 3x^2+2x+1 \\ \hline & 5x^2+x+3 \end{array}$$

3. 分離係數法是將直式中各項的係數與文字符號分離開，只寫出係數作運算的一種方法。在寫出係數時，遇到缺項，通常都補 0。

【範例】：請化簡 $(5x^2-2x+1)+(2x^2+4x+3)$。

解：

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & x^1 & x^0 \\ & 5 & -2 & 1 \\ +) & 2 & 4 & 3 \\ \hline & 7 & 2 & 4 \end{array}$$

所以 $(5x^2-2x+1)+(2x^2+4x+3)=7x^2+2x+4$

通常我們也會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

【範例】：請化簡$(7x^2+3x+1)-(4x^2-2x+5)$。

解　：

$$
\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 7 & 3 & 1 \\
-) & 4 & -2 & 5 \\
\hline
 & 3 & 5 & -4
\end{array}
$$

所以$(7x^2+3x+1)-(4x^2-2x+5)=3x^2+5x-4$

【範例】：請化簡$(5x^2+2)-(x^2-3x-7)$。

解　：

$$
\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 5 & 0 & 2 \\
-) & 1 & -3 & -7 \\
\hline
 & 4 & 3 & 9
\end{array}
$$

所以$(5x^2+2)-(x^2-3x-7)=4x^2+3x+9$

【範例】：請化簡$(1+x+3x^2)-(7x^2+5)$。

解　：

$$
\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 3 & 1 & 1 \\
-) & 7 & 0 & 5 \\
\hline
 & -4 & 1 & -4
\end{array}
$$

所以$(1+x+3x^2)-(7x^2+5)=-4x^2+x-4$

(3) **多項式的乘法：**

我們會採升冪或降冪排列，兩多項式相乘我們會使用下列規則：

1. 交換律：$a\times b=b\times a$
2. 結合律：$a\times b\times c=a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
3. 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

$(a+b)\times(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$

$a\times(b+c+d)=a\times b+a\times c+a\times d$

$(a+b)\times(c+d+e)=a\times c+a\times d+a\times e+b\times c+b\times d+b\times e$

通常我們也會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

【**範例**】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $-x(2x+5)$　(2) $x(2x^2-x+3)$　(3) $(3x^2-2x+1)\times 2x$

解：(1) $-x(2x+5)=(-x)\times 2x+(-x)\times 5$

$=-2x^2-5x$

(2) $x(2x^2-x+3)=x\times(2x^2)-x\times(x)+x\times 3$

$=2x^3-x^2+3x$

(3) $(3x^2-2x+1)\times 2x=3x^2\times 2x-2x\times 2x+1\times 2x$

$=6x^3-4x^2+2x$

【**範例**】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $(x+3)(x+2)$　(2) $(x-2)(x+3)$ 。

解：(1) $(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)$

$=x^2+2x+3x+6$

$=x^2+5x+6$

(2) $(x-2)(x+3)=x(x+3)-2(x+3)$

$=x^2+3x-2x-6$

$=x^2+x+6$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr} & & x & 3 \\ \times) & & x & 2 \\ \hline & & 2x & +6 \\ +) & x^2 & +3x & \\ \hline & x^2 & +5x & +6 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr} & & x & -2 \\ \times) & & x & 3 \\ \hline & & 3x & -6 \\ +) & x^2 & -2x & \\ \hline & x^2 & +x & -6 \end{array}$$

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & x^1 & x^0 \\ & & 1 & 3 \\ \times) & & 1 & 2 \\ \hline & & 2 & +6 \\ +) & 1 & +3 & \\ \hline & 1 & +5 & +6 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & x^1 & x^0 \\ & & 1 & -2 \\ \times) & & 1 & 3 \\ \hline & & 3 & -6 \\ +) & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & +1 & +6 \end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $(2x-3)(3x-5)$　(2) $(x+6)(3x-4)$

解：(1) $(2x-3)(3x-5)=2x(3x-5)-3(3x-5)$

$=6x^2-10x-9x+15$

$=6x^2-19x+15$

(2) $(x+6)(3x-4)=x(3x-4)+6(3x-4)$

$=3x^2-4x+18x-24$

$=3x^2+14x-24$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr}
 & & 2x & -3 \\
\times) & & 3x & -5 \\ \hline
 & & -10x & +15 \\
+) & 6x^2 & -9x & \\ \hline
 & 6x^2 & -19x & +15
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr}
 & & x & 6 \\
\times) & & 3x & -4 \\ \hline
 & & -4x & -24 \\
+) & 3x^2 & +18x & \\ \hline
 & 3x^2 & +14x & -24
\end{array}$$

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 2 & -3 \\
\times) & & 3 & -5 \\ \hline
 & & -10 & +15 \\
+) & 6 & -9 & \\ \hline
 & 6 & -19 & +15
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & 6 \\
\times) & & 3 & -4 \\ \hline
 & & -4 & -24 \\
+) & 3 & +18 & \\ \hline
 & 3 & +14 & -24
\end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開$(x+1)\times(3x+7)\times(2x-4)$。

解：　$(x+1)\times(3x+7)\times(2x-4)$

$=[x(3x+7)+(3x+7)]\times(2x-4)$

$=[3x^2+7x+3x+7]\times(2x-4)$

$=(3x^2+10x+7)\times(2x-4)$

$=2x(3x^2+10x+7)-4(3x^2+10x+7)$

$=6x^3+20x^2+14x-12x^2-40x-28$

$=6x^3+8x^2-26x-28$

【**範例**】：利用乘法運算展開$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$。

解　：　$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$

$= x^2\ (2x+1)-2x\ (2x+1)+(2x+1)$

$= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1$

$= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1$

$= 2x^3-3x^2+1$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & x & 2 \\
\times) & & & x & -3 \\
\hline
 & & -3x^2 & -3x & -6 \\
+) & x^3 & x^2 & +2x & \\
\hline
 & x^3 & -2x^2 & -\ x & -6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
\times) & & & 1 & -3 \\
\hline
 & & -3 & -3 & -6 \\
+) & 1 & 1 & +2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & -6
\end{array}
$$

【**範例**】：利用乘法運算展開$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$。

解　：　$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$

$= x^2\ (2x+1)-2x\ (2x+1)+(2x+1)$

$= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1$

$= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1$

$= 2x^3-3x^2+1$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -2x & +1 \\
\times) & & & 2x & +1 \\
\hline
 & & +x^2 & -2x & +1 \\
+) & 2x^3 & -4x^2 & +2x & \\
\hline
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & -2 & +1 \\
\times) & & & 2 & +1 \\
\hline
 & & +1 & -2 & +1 \\
+) & 2 & -4 & +2 & \\
\hline
 & 2 & -3 & 0 & +1
\end{array}
$$

(4) <u>**多項式的除法：**</u>

在小學時，我們會以下面的長除法（直式計算法）來求出 58 除以 13 得到商數 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 13\overline{)\,58} \\ 52 \\ \hline 6 \end{array}$$

同時，我們也知道：$58=13\times4+6$。

事實上，在自然數的除法中，我們有下列的規則：

被除數＝除數 × 商數＋餘數，

其中，商數和餘數為非負整數，且餘數小於除數。

同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

被除式＝除式 × 商式＋餘式，

其中，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數。

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式計算法（長除法）。為了簡化計算，也常使用分離係數法。這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

【範例】：求$(x^2+x+1)\div x$的商式及餘式。

解　：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} x\ \ +1 \\ x\overline{)\,x^2+x+1} \\ x^2\qquad\ \ \\ \hline x+1 \\ x\ \ \ \ \\ \hline 1 \end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} 1+1 \\ 1\overline{)\,1+1+1} \\ 1\qquad\ \ \\ \hline 1+1 \\ 1\ \ \ \ \\ \hline 1 \end{array}$$

商式為$(x+1)$，餘式為 1。

$\because\ (x^2+x+1)\div x=(x+1)\cdots\cdots1$，

$\therefore\ (x^2+x+1)=x\cdot(x+1)+1$。

【範例】：求$(2x^4+0x^3-4x^2+0x+2)\div(x^2+0x-1)$的商式及餘式。

解　：步驟 a. 將原式改變成降冪排列，且缺項部分補零:

$$(2x^4+0x^3-4x^2+0x+2)\div(x^2+0x-1)$$

步驟 b.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \longrightarrow \text{首商} \\ \hline
x^2+0x-1 & 2x^4+0x^3-4x^2+0x+2 \\
 & 2x^4+0x^3-2x^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad -2x^2
\end{array}
$$

步驟 c.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \qquad -2 \longrightarrow \text{次商} \\ \hline
x^2+0x-1 & 2x^4+0x^3-4x^2+0x+2 \\
 & 2x^4+0x^3-2x^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad -2x^2+0x+2 \\
 & \qquad\qquad -2x^2+0x+2 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

故可知$(-4x^2+2+2x^4)\div(-1+x^2) = 2x^2-2$ 。

【範例】：求$(6x^4+7x^3-x^2-5x-2) \div (2x^3+x^2-x-1)$的商式及餘式。

**解　**：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad 3x+2 \\ \hline
2x^3+x^2-x-1 & 6x^4+7x^3-x^2-5x-2 \\
 & 6x^4+3x^3-3x^2-3x \\ \hline
 & \qquad 4x^3+2x^2-2x-2 \\
 & \qquad 4x^3+2x^2-2x-2 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

故可知$(6x^4+7x^3-x^2-5x-2) \div (2x^3+x^2-x-1)$

的商式為 $3x+2$，餘式為 0。

【範例】：求$(x^2+4x+2) \div (x+1)$的商式及餘式。

**解　**：

方法一：直式計算法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad x+3 \\ \hline
x+1 & x^2+4x+2 \\
 & x^2+\ \ x \\ \hline
 & \qquad 3x+2 \\
 & \qquad 3x+3 \\ \hline
 & \qquad\quad -1
\end{array}
$$

方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+3 \\ \hline
1+1 & 1+4+2 \\
 & 1+1 \\ \hline
 & \quad 3+2 \\
 & \quad 3+3 \\ \hline
 & \qquad -1
\end{array}
$$

商式為 $x+3$ ，餘式為-1。

※注意：在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述的概念來驗算。例如：

$(x+1)(x+3)+(-1)$　　（除式×商式＋餘式）

$= x^2+4x+3-1$

$= x^2+4x+2$　　（被除式）

【範例】：求$(2x^3+5x^2+x+5)\div(x+2)$的商式及餘式。

解　：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r}
2x^2+x-1\\
x+2\,\overline{)\,2x^3+5x^2+x+5}\\
\underline{2x^3+4x^2}\\
x^2+x\\
\underline{x^2+2x}\\
-x+5\\
\underline{-x-2}\\
7
\end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r}
2+1-1\\
1+2\,\overline{)\,2+5+1+5}\\
\underline{2+4}\\
1+1\\
\underline{1+2}\\
-1+5\\
\underline{-1-2}\\
7
\end{array}$$

商式為$2x^2+x-1$，餘式為7。

【範例】：求$(3x^2+2)\div(2x-1)$的商式及餘式。

解　：因為$(3x^2+2)=3x^2+0\cdot x+2$，所以用$3+0+2$來表示$3x^2+2$。

方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r}
\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\\
2x-1\,\overline{)\,3x^2+0x+2}\\
\underline{3x^2-\frac{3}{2}x}\\
\frac{3}{2}x+2\\
\underline{\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}}\\
2\frac{3}{4}
\end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r}
\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\\
2-1\,\overline{)\,3+0+2}\\
\underline{3-\frac{3}{2}}\\
\frac{3}{2}+2\\
\underline{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}\\
2\frac{3}{4}
\end{array}$$

商式為$\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$，餘式為$-2\frac{3}{4}$。

【範例】：求$(x^3+2x^2-3x+2)\div(x^2+x+1)$的商式及餘式。

解　：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r}
x+1\\
x^2+x+1\,\overline{)\,x^3+2x^2-3x+2}\\
\underline{x^3+x^2+x}\\
x^2-4x+2\\
\underline{x^2+x+1}\\
-5x+1
\end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0\\
 & 1 & +1 & & \\
1+1+1 & \overline{)\,1} & \overline{+2} & \overline{-3} & \overline{+2}\\
 & \underline{1} & \underline{+1} & \underline{+1} & \\
 & & 1 & -4 & +2\\
 & & \underline{1} & \underline{+1} & \underline{+1}\\
 & & & -5 & +1
\end{array}$$

所以$(x^3+2x^2-3x+2)\div(x^2+x+1)$的商式是$(x+1)$，餘式是$(-5x+1)$。

小　試　身　手

【例題一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

(1)$5x^2-3x+2$　　(2)$3x^2-7$。

【練習一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

(1)　$-7x^2-x+6$　　(2)$6x^2-15$。

【例題二】

以橫式化簡：

$(2x^2-3x+4)+(x^2+5x-2)$。

【練習二】

以橫式化簡：

$(4x^2-7x+10)+(2x^2-5)$。

【例題三】

利用直式及分離係數法：

化簡：$(x^3-2x^2+6)-(7x^2+3)$。

【練習三】

利用直式及分離係數法：

化簡：$(x^3-2x^2+6)+(7x^2+3)$。

【例題四】

設 $f(x)=2x^3+3x^2-4x+5$，$g(x)=x^4-3x^3+2x^2+x-3$，試求 $f(x)-g(x)$。

【練習四】

設 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+10$，$g(x)=2x^4-7x^3+12x^2+5x-13$，試求 $f(x)+g(x)$。

【例題五】

展開下列各式：

(1) $(2x-5)(x^2-3x+2)$。

(2) $(3x+1)(x^2+4x-1)$。

【練習五】

展開下列各式：

(1) $(x^2-1)(2x^2-5x+3)$。

(2) $(2x^2-3)(x^3+2x^2-x+1)$。

【例題六】

求 $(x^2+4x+4)\div(x+1)$ 的商式及餘式。

【練習六】

求 $(3x^2+5x+7)\div(2x+1)$ 的商式及餘式。

【例題七】

設 A 為多項式，且知 $\dfrac{x^2+3x+3}{A}=(x+2)+\dfrac{1}{A}$，求 A。

【練習七】

設 A 為多項式，且知 $\dfrac{2x^3-4}{A}=(x^2+x+1)-\dfrac{2}{A}$，求 A。

【例題八】

若 $3x^3-2x^2+ax+12$ 能被 x^2-2x+b 整除，試求 a 和 b 之值。

【練習八】

若 $4x^3+8x^2+ax+3$ 能被 $2x^2+x+b$ 整除，試求 a 和 b 之值。

【例題九】

若$(2x^2+x-4)-\mathrm{B}=8x^2-2x+2$，求 B 的值。

【練習九】

若$(x^2+5x-2)-\mathrm{B}=2x^2-6x-7$，求 B 的值。