

平方根與立方根

平方根

國小學過「正方形的面積＝邊長×邊長」，可以表示成「正方形的面積＝邊長的平方」或寫成「正方形的面積＝(邊長)²」。因此只要知道正方形的邊長就可以算出它的面積。如果反過來問，只知道正方形的面積，我們能不能算出正方形的邊長呢？

例如：邊長是4公分的正方形，面積是16平方公分。反過來說，面積是16平方公分的正方形，則邊長是4公分。試問正方形面積是20平方公分，我們要如何求出其邊長呢？這就是我們這一節所要學的平方根。

1. 認識平方根：

我們知道 $6^2=36$ ， $11^2=121$ ……，那麼多少的平方等於49呢？

倒過來給定一數 a ，如果有一數 x 會使得 $x^2=a$ ，則此 x 稱為 a 的平方根。

例如：我們給一個數為49，那麼那些 x 滿足 $x^2=49$ 呢？

我們知道 $x=7$ 或是 $x=-7$ 滿足 $x^2=49$ ，在此7與-7我們稱為49的平方根。

【範例】：求下列各數的平方根：

- (1) 100 (2) 81 (3) 10 (4) 15。

解：(1) $10^2=10\times 10=100$ ， $(-10)^2=(-10)\times(-10)=100$ ，
故100的平方根為 ± 10 。

(2) $9^2=9\times 9=81$ ， $(-9)^2=(-9)\times(-9)=81$ ，故81的平方根為 ± 9 。

(3) $10=1\times 10=2\times 5$ ，在此我們無法利用學過的，相同的兩個整數相乘為10。
所以10的平方根要利用『根號』來表示。

(4) $15=1\times 15=3\times 5$ ，在此我們無法利用學過的，相同的兩個整數相乘為15。
所以15的平方根要利用『根號』來表示。

【範例】：列出1到18的平方根。

解：

1 → 1×1 ， $(-1)\times(-1)$ ，故1的平方根為 ± 1 。

2 →

3 →

4 → 2×2 ， $(-2)\times(-2)$ ，故4的平方根為 ± 2 。

5 →

6 →

7 →

8 →

- 9 → 3×3 , $(-3) \times (-3)$, 故 9 的平方根為 ± 3 。
 10 →
 11 →
 12 →
 13 →
 14 →
 15 →
 16 → 4×4 , $(-4) \times (-4)$, 故 16 的平方根為 ± 4 。
 17 →
 18 →

2. 平方根的意義：

(1) 平方根：

設 a 、 x 都是實數, 若 $x^2 = a$, 則 x 就叫做 a 的平方根, 一般我們有兩個 x 會滿足 $x^2 = a$ 分別以 $x = \pm \sqrt{a}$ 來表示, 讀作 x 等於正負根號 a 。

例如：9 的平方根為 ± 3 。 10 的平方根為 $\pm \sqrt{10}$ 。

15 的平方根為 $\pm \sqrt{15}$ 。 16 的平方根為 ± 4 。

(2) 平方根的表示法：

a. \sqrt{a} (讀做根號 a) 表示正數 a 的正平方根。

b. $-\sqrt{a}$ (讀做負根號 a) 表示正數 a 的負平方根。

c. 零的平方還是為零, 所以零的平方根以 $\sqrt{0}$ (讀做根號零) 表示, 即 $\sqrt{0} = 0$ 。

d. \sqrt{a} 為一個整數, 則 a 為完全平方數。也就是 $a = x^2$, 其中 x 為整數, 則稱 a 為完全平方數。

【範例】：列出 1 到 25 的平方根。

解：

- 1 → ± 1 。
 2 → $\pm \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$; $(-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 2$ 。
 3 → $\pm \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$; $(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$ 。
 4 → $\pm \sqrt{4} = \pm 2$, 4 為完全平方數。
 5 → $\pm \sqrt{5}$, $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$; $(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{5}) = 5$ 。
 6 → $\pm \sqrt{6}$, $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$; $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{6}) = 6$ 。
 7 → $\pm \sqrt{7}$, $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$; $(-\sqrt{7}) \times (-\sqrt{7}) = 7$ 。
 8 → $\pm \sqrt{8}$, $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$; $(-\sqrt{8}) \times (-\sqrt{8}) = 8$ 。
 9 → $\pm \sqrt{9} = \pm 3$, 9 為完全平方數。
 10 → $\pm \sqrt{10}$, $\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$; $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{10}) = 10$ 。
 11 → $\pm \sqrt{11}$, $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11$; $(-\sqrt{11}) \times (-\sqrt{11}) = 11$ 。

- 12 \longrightarrow $\pm\sqrt{12}$, $\sqrt{12}\times\sqrt{12}=12$; $(-\sqrt{12})\times(-\sqrt{12})=12$ 。
- 13 \longrightarrow $\pm\sqrt{13}$, $\sqrt{13}\times\sqrt{13}=13$; $(-\sqrt{13})\times(-\sqrt{13})=13$ 。
- 14 \longrightarrow $\pm\sqrt{14}$, $\sqrt{14}\times\sqrt{14}=14$; $(-\sqrt{14})\times(-\sqrt{14})=14$ 。
- 15 \longrightarrow $\pm\sqrt{15}$, $\sqrt{15}\times\sqrt{15}=15$; $(-\sqrt{15})\times(-\sqrt{15})=15$ 。
- 16 \longrightarrow $\pm\sqrt{16}=\pm 4$, 16 為完全平方數。
- 17 \longrightarrow $\pm\sqrt{17}$, $\sqrt{17}\times\sqrt{17}=17$; $(-\sqrt{17})\times(-\sqrt{17})=17$ 。
- 18 \longrightarrow $\pm\sqrt{18}$, $\sqrt{18}\times\sqrt{18}=18$; $(-\sqrt{18})\times(-\sqrt{18})=18$ 。
- 19 \longrightarrow $\pm\sqrt{19}$, $\sqrt{19}\times\sqrt{19}=19$; $(-\sqrt{19})\times(-\sqrt{19})=19$ 。
- 20 \longrightarrow $\pm\sqrt{20}$, $\sqrt{20}\times\sqrt{20}=20$; $(-\sqrt{20})\times(-\sqrt{20})=20$ 。
- 21 \longrightarrow $\pm\sqrt{21}$, $\sqrt{21}\times\sqrt{21}=21$; $(-\sqrt{21})\times(-\sqrt{21})=21$ 。
- 22 \longrightarrow $\pm\sqrt{22}$, $\sqrt{22}\times\sqrt{22}=22$; $(-\sqrt{22})\times(-\sqrt{22})=22$ 。
- 23 \longrightarrow $\pm\sqrt{23}$, $\sqrt{23}\times\sqrt{23}=23$; $(-\sqrt{23})\times(-\sqrt{23})=23$ 。
- 24 \longrightarrow $\pm\sqrt{24}$, $\sqrt{24}\times\sqrt{24}=24$; $(-\sqrt{24})\times(-\sqrt{24})=24$ 。
- 25 \longrightarrow $\pm\sqrt{25}=\pm 5$, 25 為完全平方數。

【範例】：常用的完全平方數列表：

$(\pm 1)^2 = 1$, 1 的平方根為 ± 1 。	$(\pm 11)^2 = 121$, 121 的平方根為 ± 11 。
$(\pm 2)^2 = 4$, 4 的平方根為 ± 2 。	$(\pm 12)^2 = 144$, 144 的平方根為 ± 12 。
$(\pm 3)^2 = 9$, 9 的平方根為 ± 3 。	$(\pm 13)^2 = 169$, 169 的平方根為 ± 13 。
$(\pm 4)^2 = 16$, 16 的平方根為 ± 4 。	$(\pm 14)^2 = 196$, 196 的平方根為 ± 14 。
$(\pm 5)^2 = 25$, 25 的平方根為 ± 5 。	$(\pm 15)^2 = 225$, 225 的平方根為 ± 15 。
$(\pm 6)^2 = 36$, 36 的平方根為 ± 6 。	$(\pm 16)^2 = 256$, 256 的平方根為 ± 16 。
$(\pm 7)^2 = 49$, 49 的平方根為 ± 7 。	$(\pm 17)^2 = 289$, 289 的平方根為 ± 17 。
$(\pm 8)^2 = 64$, 64 的平方根為 ± 8 。	$(\pm 18)^2 = 324$, 324 的平方根為 ± 18 。
$(\pm 9)^2 = 81$, 81 的平方根為 ± 9 。	$(\pm 19)^2 = 361$, 361 的平方根為 ± 19 。
$(\pm 10)^2 = 100$, 100 的平方根為 ± 10 。	$(\pm 20)^2 = 400$, 400 的平方根為 ± 20 。

【範例】：利用質因數分解求下列各數的平方根：

- (1) 169 (2) 324 (3) 0

解 : (1) $169=13\times 13$

169 的平方根為 $\pm\sqrt{169}=\pm\sqrt{13\times 13}=\pm 13$ 。

- (2) $324=2^2\times 3^4=(3^2\times 2)\times(3^2\times 2)=18\times 18$

324 的平方根為 $\pm\sqrt{324}=\pm\sqrt{18\times 18}=\pm 18$ 。

- (3) 0 的平方根為 $\pm\sqrt{0}=0$ 。

【範例】：下列那些是完全平方數：24、25、37、100、121、256、300、400。

解： $\sqrt{24} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{2 \times 3} = 2\sqrt{6}$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5 \times 5} = 5$$

$\sqrt{37}$ ，37 為質數不能再分解

$$\sqrt{100} = \sqrt{10 \times 10} = 10$$

$$\sqrt{121} = \sqrt{11 \times 11} = 11$$

$$\sqrt{256} = \sqrt{16 \times 16} = 16$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{10 \times 10 \times 3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{10 \times 10 \times 2 \times 2} = 20$$

所以完全平方數有：25、100、121、256、400。

【範例】：利用質因數分解求下列各數的平方根：

(1) 98 (2) 72 (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{121}{144}$

解：(1) $98 = 7 \times 7 \times 2 = 7 \times 7 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (7\sqrt{2}) \times (7\sqrt{2}) = (-7\sqrt{2}) \times (-7\sqrt{2})$ ，
所以 98 的平方根為 $\pm 7\sqrt{2}$ 。

(2) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 3 \times \sqrt{2}) \times (2 \times 3 \times \sqrt{2})$
 $= (6\sqrt{2}) \times (6\sqrt{2}) = (-6\sqrt{2}) \times (-6\sqrt{2})$ ，

所以 72 的平方根為 $\pm 6\sqrt{2}$ 。

(3) $\frac{4}{9}$ 的平方根為 $\pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \sqrt{\frac{2 \times 2}{3 \times 3}} = \pm \frac{2}{3}$

(4) $\frac{121}{144}$ 的平方根為 $\pm \sqrt{\frac{121}{144}} = \pm \sqrt{\frac{11 \times 11}{12 \times 12}} = \pm \frac{11}{12}$

(3) 負數沒有實數的平方根。

【範例】：-4 沒有平方根。若 x 為 -4 的平方根，則 $x^2 = -4$ (不可能)，故 -4 沒有平方根。

【註】： $\sqrt{-4}$ 在國中的課程中我們不考慮，我們只考慮 \sqrt{x} ，其中 $x \geq 0$ 。

(4) 設 a 是實數，則 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a > 0 \\ -a, & \text{當 } a < 0 \\ 0, & \text{當 } a = 0 \end{cases}$ 。

也就是在此 $x \geq 0$ ，則我們有 $\sqrt{x} \geq 0$ 。

【範例】： $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = -(-9) = 9$ ，

$$\sqrt{(-12)^2} = |-12| = -(-12) = 12。$$

$$\sqrt{(25)^2} = |25| = 25。$$

【範例】： $\sqrt{(x-3)} + \sqrt{(y-4)} = 0$ ，則 $\sqrt{(x-3)} = 0$ ， $\sqrt{(y-4)} = 0$
 $\therefore \sqrt{(x-3)} \geq 0$ ， $\sqrt{(y-4)} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{(x-3)} = 0$ ， $\sqrt{(y-4)} = 0$
 $\therefore x-3=0$ ， $y-4=0$ 。
 即 $x=3$ ， $y=4$ 。

(5) 特殊的“無理數” $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$ ：

$\sqrt{2} = 1.414$ ， $\sqrt{3} = 1.732$ ，經常使用，請同學熟記。

注意： $14 = 2 \times 7 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7}$
 $= (\sqrt{2} \times \sqrt{7}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{7})$
 $= (-\sqrt{2} \times \sqrt{7}) \times (-\sqrt{2} \times \sqrt{7})$

14 的平方根為 $\pm \sqrt{2} \times \sqrt{7}$ ，

前面也有提到 14 的平方根為 $\pm \sqrt{14}$ ，所以 $\pm \sqrt{14} = \pm \sqrt{2 \times 7} = \pm \sqrt{2} \times \sqrt{7}$ 。

詳細的平方根號運算規則，我們在下個部份介紹。

3. 平方根運算常用公式：

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。 ($a \geq 0, b \geq 0$)

$\therefore (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) \times (\sqrt{b} \times \sqrt{b})$
 $\therefore (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b = ab \quad \therefore \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。 ($a \geq 0, b > 0$)

$\therefore \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \quad \therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

(3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ 。 ($a \geq 0, b > 0$)

【範例】： $\sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{6 \times 2} = \sqrt{12}$ 。

【範例】： $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ 。

【範例】： $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2 \times 7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ 。

4. 最簡根式：

一個二次方根，根號內的數，其因數不再含有大於1的完全平方數，且分母不含根號，即無法再進一步化簡，此種方根叫做最簡根式。

例如： $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ 不是最簡根式， $\frac{\sqrt{14}}{7}$ 是最簡根式。

【範例】： $\sqrt{18}$ 與 $3\sqrt{2}$ 那個為最簡根式？

解： $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ， $3\sqrt{2}$ 即為 $\sqrt{18}$ 的最簡根式。
∴ 答： $3\sqrt{2}$ 為最簡根式。

【範例】：判斷下列何者為最簡根式：

$$(1) \sqrt{\frac{64}{289}} \quad (2) \sqrt{34} \quad (3) \sqrt{68} \quad (4) \sqrt{252}$$

解：(1) $\sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$ (2) $\sqrt{34} = \sqrt{2 \times 17}$
(3) $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ (4) $\sqrt{252} = 6\sqrt{7}$
∴ 答： $\sqrt{34}$ 為最簡根式。

【範例】：化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{125} \quad (2) \sqrt{48} \quad (3) \sqrt{216} \quad (4) \sqrt{\frac{16}{27}}$$

解：(1) $\sqrt{125} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$ 。

$$(2) \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3} = 4\sqrt{3}。$$

$$(3) \sqrt{216} = \sqrt{6^2 \times 6} = 6\sqrt{6}。$$

$$(4) \sqrt{\frac{16}{27}} = \sqrt{\frac{4^2}{3^2 \times 3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times 3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}。$$

5. 平方根四則運算：平方根四則運算的結果務必化為最簡方根

同類根號：兩個或兩個以上的根式，經化簡後它們根號內的數相同，且開方次數也相同，此種根號叫做同類方根或同類根號，否則為不同類根號。同類根號一定是同次根號，同類根式可以做加、減、乘、除運算。

例如： $2\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{2}$ 都有 $\sqrt{2}$ ，所以 $2\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{2}$ 是同類根號。

例如： $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{5}$ 其根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{5}$ 不是同類根號。

【範例】：判斷下列何者為同類根號：

(1) $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{12}$ 與 $3\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{6}$ 與 $\sqrt{24}$ 。

解：(1) $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 其根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 不是同類根號。

(2) $\because \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore \sqrt{12}$ 與 $3\sqrt{3}$ 是同類根號。

(3) $\because \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ ， $\therefore \sqrt{6}$ 與 $\sqrt{24}$ 是同類根號。

【範例】：判斷下列何者為同類根號： $\sqrt{32}$ ， $\sqrt{42}$ ， $\sqrt{48}$ ， $\sqrt{12}$ ， $\sqrt{75}$ 。

解： $\because \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ， $\sqrt{42} = \sqrt{2 \times 3 \times 7}$ ， $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ， $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ 。

$\therefore \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ， $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ ，為同類根號。

(1) 根號的加減運算：

先將方根化為最簡方根，再將同類根號的最簡方根作加減運算，即對最簡方根的係數作加減即可。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ (2) $4\sqrt{3} - \sqrt{12}$ 。

解：(1) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

答： $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$ 。

(2) $4\sqrt{3} - \sqrt{12} = 4\sqrt{3} - \sqrt{4 \times 3} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

答： $4\sqrt{3} - \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{24} + \sqrt{75}$ (2) $2\sqrt{7} - 3\sqrt{63}$

解：(1) $\sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

答： $\sqrt{48} + \sqrt{75} = 9\sqrt{3}$ 。

(2) $2\sqrt{7} - 3\sqrt{63} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{9 \times 7} = 2\sqrt{7} - 3 \times 3\sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 9\sqrt{7} = -7\sqrt{7}$

答： $2\sqrt{7} - 3\sqrt{63} = -7\sqrt{7}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{48} + \sqrt{12} = ?$

解： $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{48} + \sqrt{12} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= (2+5)\sqrt{2} - (4-2)\sqrt{3}$

$= 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{18} + \sqrt{125} + \sqrt{8} - \sqrt{20} = ?$

解： $\sqrt{18} + \sqrt{125} + \sqrt{8} - \sqrt{20} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

$= (3+2)\sqrt{2} + (5-2)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{16} + \sqrt{100} - \sqrt{25} - \sqrt{\frac{1}{9}} = ?$

解： $\sqrt{16} + \sqrt{100} - \sqrt{25} - \sqrt{\frac{1}{9}} = 4 + 10 - 5 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ 。

【範例】：化簡 $3\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{4}} = ?$

解： $3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}$ 。

(2) 根號的乘除法運算及有理化：

1. $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = a \times c \sqrt{b \times d}$ ， $(b \geq 0, d \geq 0)$ 。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{6} \times \sqrt{27}$

解：(1) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \sqrt{3 \times 2} = 6\sqrt{6}$

(2) $2\sqrt{6} \times \sqrt{27} = 2\sqrt{6} \times 3\sqrt{3} = 2 \times 3 \sqrt{6 \times 3} = 6\sqrt{18} = 6 \times 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

【範例】：化簡 $\sqrt{16} \times \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{6}} = ?$

解： $\sqrt{16} \times \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{6}} = 4 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

2. $m\sqrt{a} \div n\sqrt{b} = m\sqrt{a} \times \frac{1}{n\sqrt{b}} = \frac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}$ ， $(a \geq 0, b > 0, m, n \text{ 為實數})$ 。

有理化：使分母不含根號，且分子為最簡根式，此過程即為分母有理化。

通常我們會將 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 給有理化： $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ ， $(a \geq 0, b > 0)$ 。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{3} \div \sqrt{5}$ (2) $\sqrt{6} \div 2\sqrt{3}$ (3) $3\sqrt{5} \div 2\sqrt{6}$ 。

解：(1) $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

(2) $\sqrt{6} \div 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}}{2 \times 3} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(3) $3\sqrt{5} \div 2\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5 \times 6}}{2 \times 6} = \frac{3\sqrt{30}}{12} = \frac{\sqrt{30}}{4}$ 。

【範例】：求解 $3\sqrt{8}x=2\sqrt{3}$

$$\text{解} : x = \frac{2\sqrt{3}}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

【範例】：化簡 $\sqrt{125} \times \sqrt{75} \div \sqrt{54} = ?$

$$\text{解} : \sqrt{125} \times \sqrt{75} \div \sqrt{54} = 5\sqrt{5} \times 5\sqrt{3} \div 3\sqrt{6} = \frac{25}{3} \sqrt{\frac{15}{6}} = \frac{25\sqrt{10}}{6}$$

【範例】：化簡 $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 5\sqrt{\frac{1}{3}} = ?$

$$\text{解} : \frac{1}{2}\sqrt{48} - 5\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} - 5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【範例】：化簡 $\frac{1}{3}\sqrt{72} - \sqrt{4\frac{1}{6}} = ?$

$$\text{解} : \frac{1}{3}\sqrt{72} - \sqrt{4\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} - \sqrt{\frac{25}{6}} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{\frac{6}{6 \times 6}} = 2\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{6} = \frac{12\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{6}$$

【範例】：化簡 $\sqrt{20} \times \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{3} = ?$

$$\text{解} : \sqrt{20} \times \sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{3} = \sqrt{20 \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{10}{3}$$

【範例】：化簡 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}} \div \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = ?$

$$\text{解} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}} \div \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{5}{18} \times \frac{2}{9 \times 5} \times \frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{36}$$

【範例】：化簡 $\sqrt{36} \div \sqrt{2} \div \sqrt{6} \div \sqrt{1\frac{1}{2}} = ?$

$$\text{解} : \sqrt{36} \div \sqrt{2} \div \sqrt{6} \div \sqrt{1\frac{1}{2}} = \sqrt{36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

【範例】：將 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 化成 $\sqrt{2} + 1$ 。

解 : 利用乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

【範例】：將 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 有理化。

解：利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}。$$

【範例】：將 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 有理化。

解：利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}。$$

6. 商高定理：

若有一個直角三角形三邊長為 a 、 b 、 c ，其中 c 為斜邊，則： $c^2 = a^2 + b^2$

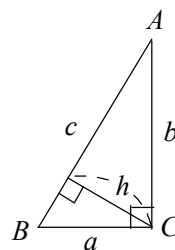
如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

則：(1) 斜邊 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) 一股 $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

(3) 另一股 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

直角三角形斜邊上的高 = $\frac{\text{兩股長的乘積}}{\text{斜邊長}} \rightarrow h = \frac{a \times b}{c}$ 。

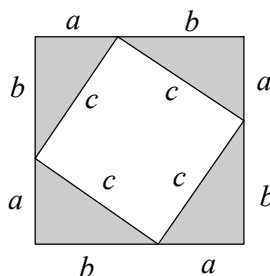


【範例】：如右圖，試利用面積公式推導出商高定理。

解：中間的正方形面積 = c^2

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2 - 4 \times a \times b \times \frac{1}{2} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

因此可推得商高定理： $a^2 + b^2 = c^2$ 。



【範例】：請利用商高定理，判斷下列各組，哪些組為直角三角形？

(1) 3、4、5 (2) 4、5、6 (3) 6、8、10。

解：(1) $5^2 = 3^2 + 4^2$ ， \therefore 3、4、5 為直角三角形的三邊長。

(2) $6^2 \neq 4^2 + 5^2$ ， \therefore 4、5、6 不是直角三角形的三邊長。

(3) $10^2 = 6^2 + 8^2$ ， \therefore 6、8、10 為直角三角形的三邊長。

【範例】：若直角三角形的兩股長分別為1、1，那斜邊長為多少？

解：利用商高定理：斜邊 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

\therefore 斜邊 $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 答：斜邊長為 $\sqrt{2}$ 。

【範例】：設直角三角形的三邊長為8、15、 x ，請問 x 為多少？

解：(1) 當 x 為斜邊時， $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$

(2) 當 x 為一股時， $x = \sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{225 - 64} = \sqrt{161}$

答： $x = 17$ 或 $\sqrt{161}$ 。

【範例】：直立在地面的竹竿，有一條繩子由竿頂垂下，繩子比竿子長1公尺，把繩子往竿底的地面外拉了7公尺後，繩子才拉直，求竿子的高度為多少公尺？

解：設竿子的高度為 x 公尺，則繩子的長度為 $(x + 1)$ 公尺

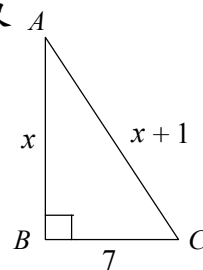
依題意可列式為： $(x + 1)^2 = x^2 + 7^2$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 49$$

$$2x = 48$$

$$x = 24$$

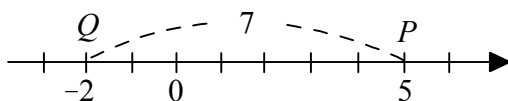
答：竿子的高度為24公尺。



7. 座標平面上兩點間的距離公式：

在介紹座標平面上兩點間的距離公式之前，讓我們先來介紹利用絕對值來表示數線上兩點之間的距離。

【範例】：如圖，求出 $P(5)$ 和 $Q(-2)$ 是數線上的兩點，這兩點之間的距離為多少？



解： $\because 5 - (-2) = 7, (-2) - 5 = -7$ 。

且 $|7| = |-7| = 7$ ，

$\therefore \overline{PQ} = |5 - (-2)| = |(-2) - 5| = 7$ 。

則 P 與 Q 兩點的距離等於它們的座標差的絕對值。

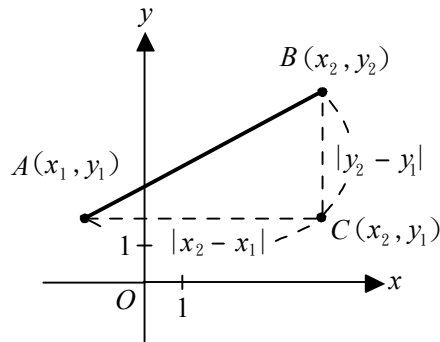
在上面的範例中， $P(a)$ 與 $Q(b)$ 是一數線上的兩點，不論 a 、 b 是何數， P 與 Q 兩點的距離都是等於它們的座標差的絕對值，即：

$$\overline{PQ} = |b - a|。$$

至於座標平面上任意兩點的距離與兩點的座標之間又有什麼關係呢？

以下就來討論座標平面上任意兩點的距離與兩點的座標之間的關係。

若 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是座標平面上的兩點，從 A 、 B 分別作 y 軸與 x 軸的垂直線，設其交點為 C ，如圖所示：



因為 $\triangle ABC$ 是直角三角形， \overline{AB} 為其斜邊，由商高定理可知：

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

因為 \overline{AB} 是正數，所以：

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

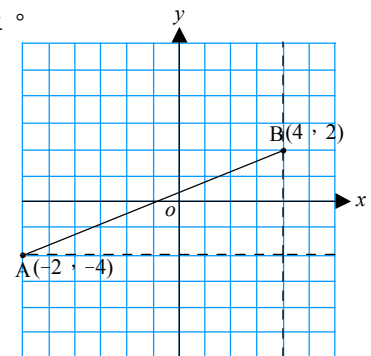
這就是座標平面上兩點間的距離公式，此公式即使在 $x_2 = x_1$ 或 $y_2 = y_1$ 時也會成立。

【範例】：(1) 已知 $A(-2, -6)$ 和 $B(4, 2)$ 兩點，求 \overline{AB} 的長。

(2) 已知 $C(3, 1)$ 和 $D(4, -3)$ 兩點，求 \overline{CD} 的長。

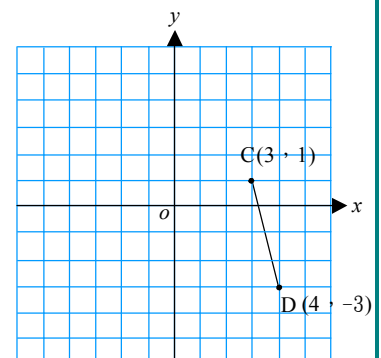
解：(1) 由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{[4 - (-2)]^2 + [2 - (-6)]^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \quad \text{答：}\overline{AB} = 10。 \end{aligned}$$



(2) 由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \sqrt{(4 - 3)^2 + [(-3) - 1]^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{1 + 16} \\ &= \sqrt{17} \quad \text{答：}\overline{CD} = \sqrt{17}。 \end{aligned}$$



【範例】：座標平面上有一個三角形，其三個頂點的座標為 $A(4, 3)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(-5, 0)$ ，如下圖。請利用座標平面上兩點間的距離公式，分別求出三角形的三邊長為何？

解：∵ $A(4, 3)$ 、 $B(2, -3)$ ，

∴ 由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(2-4)^2 + [(-3)-3]^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{。}\end{aligned}$$

∵ $A(4, 3)$ 、 $C(-5, 0)$ ，

∴ 由兩點距離公式可得知：

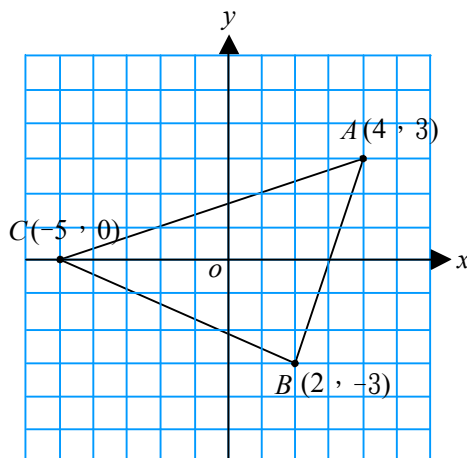
$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{[(-5)-4]^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{81+9} \\ &= \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{。}\end{aligned}$$

∵ $B(2, -3)$ 、 $C(-5, 0)$ ，

∴ 由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{[(-5)-2]^2 + [0-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{49+9} \\ &= \sqrt{58}\end{aligned}$$

答：三邊長分別是 $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ ， $\overline{AC} = 3\sqrt{10}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{58}$ 。



8. 方根的應用：

【範例】： $3x-5$ 的平方根是 ± 7 ，則 x 是多少？

解：∵ $3x-5 = (\pm 7)^2$

$$\therefore 3x-5 = 49$$

$$\therefore 3x = 54$$

$$\therefore x = 18$$

【範例】：比較 $3\sqrt{5}$ 、 $2\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{23}$ 之大小。

解：∵ $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{45}$

$$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \times 7} = \sqrt{28}$$

$$\therefore 3\sqrt{5} > 2\sqrt{7} > \sqrt{23}$$

- 【範例】**：(1) 如果 \sqrt{a} 為正整數且 $a < 30$ ，則 $a = ?$
 (2) 如果 \sqrt{a} 為兩位數的正整數，則 a 的最小值= $?$
 (3) 承第(2)題，滿足 \sqrt{a} 為兩位正整數的 a 值共有幾個？

解：(1) $\because \sqrt{a}$ 為正整數， $\therefore a$ 一定為完全平方數，

又 $\because a < 30$ ， $\therefore a = 1, 4, 9, 16, 25$ 。

(2) $\sqrt{a} = 10$ ， $\therefore a = 100$ 為最小值。

(3) $\because \sqrt{a}$ 為兩位數的正整數，

$\therefore \sqrt{a}$ 可能是 10, 11, 12, ..., 99。

則 a 值為 100, 121, 144, ..., 9801，

共有 $99 - 10 + 1 = 90$ (個)。

答：(1) $a = 1, 4, 9, 16, 25$ (2) a 的最小值為 100 (3) 90(個)。

【範例】：設下列各方根之值為整數，求 x 的最小正整數值：

(1) $\sqrt{30x}$ (2) $\sqrt{150x}$ (3) $\sqrt{540x}$

解：(1) $\because \sqrt{30x} = \sqrt{2 \times 3 \times 5 \times x}$ 為整數，

$$\therefore x = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

(2) $\because \sqrt{150x} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2 \times x}$ 為整數，

$$\therefore x = 2 \times 3 = 6$$

(3) $\because \sqrt{540x} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 5 \times x}$ 為整數，

$$\therefore x = 3 \times 5 = 15$$

答：(1) $x = 30$ (2) $x = 6$ (3) $x = 15$ 。

9. 平方根的近似值計算：

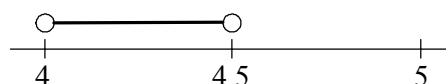
十分逼近法：利用“十等分”的方法在數線上逐步逼近根號內的數，這種逼近的方法叫做十分逼近法。

【範例】：求 $\sqrt{18}$ 的近似值，以四捨五入法取到小數第二位。

解：由 $4^2 = 16 < 18 < 25 = 5^2$ ，

$$\therefore 18 < 20.25 = (4.5)^2，$$

$\therefore \sqrt{18}$ 應在 4.0 到 4.5 之間

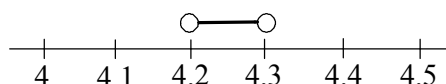


$$4.1^2 = 16.81 < 18，$$

$$4.2^2 = 17.64 < 18，$$

$$4.3^2 = 18.49 > 18，$$

$$17.64 < 18 < 18.49。$$



$$\therefore 4.2 < \sqrt{18} < 4.3$$

$$\therefore 18 < 18.0625 = (4.25)^2,$$

$\therefore \sqrt{18}$ 應在 4.20 到 4.25 之間

$$4.21^2 = 17.7241 < 18,$$

$$4.22^2 = 17.8084 < 18,$$

$$4.23^2 = 17.8929 < 18,$$

$$4.24^2 = 17.9776 < 18,$$

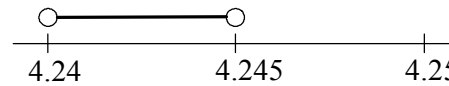
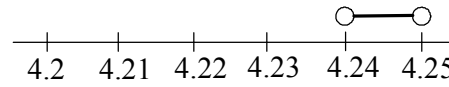
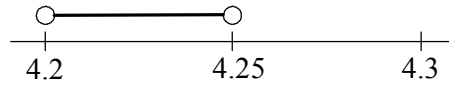
$$4.25^2 = 18.0625 > 18,$$

$$\therefore 4.24 < \sqrt{18} < 4.25$$

$$\text{又 } 18 < 4.245^2 = 18.020025。$$

$$\therefore 4.24\sqrt{18} < 4.245$$

$$\therefore \sqrt{18} \doteq 4.24 \text{ (取四捨五入到小數第二位)。}$$



查表法：利用乘方開方表找出平方根與立方根的值，此種查表的方法就叫做**查表法**。

將根號內的數化為 \sqrt{N} ， $\sqrt{10N}$ 或 $\sqrt{a^2N} = a\sqrt{N}$ ，在查表則可得。

【範例】：

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$	$\sqrt{N^3}$	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
28	784	5.291503	16.73320	219.52	3.036589	6.542133	14.09460

則由上表可得知， $\sqrt{28} = 5.291503$ ， $\sqrt{280} = 16.73320$ ，

$$\sqrt{2800} = 10\sqrt{28} = 52.91503。$$

【範例】：利用上一個範例中的表格，求出下列平方根的值。

$$(1) \sqrt{252} = ? \quad (2) \sqrt{2.8} = ?$$

解：(1) $\sqrt{252} = \sqrt{9 \times 28} = 3\sqrt{28} = 3 \times 5.291503 = 15.874509。$

$$(2) \sqrt{2.8} = \sqrt{\frac{28}{10}} = \frac{\sqrt{280}}{10} = \frac{16.7332}{10} = 1.67332。$$



小 試 身 手

【例題一】

求出下列各式的值，並且化簡之：

(1) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sqrt{0.04} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $-\sqrt{(-3.2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習一】

求出下列各式的值，並且化簡之：

(1) $\sqrt{\frac{49}{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sqrt{0.64} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\sqrt{\frac{100}{289}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) $-\sqrt{(-5.6)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題二】

(1) 求 $\sqrt{16}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 求 $\sqrt{\sqrt{81}}$ = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 求 $\sqrt{0.0081}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 求 $2\frac{1}{4}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $\sqrt{(-16)^2}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) $\sqrt{39\frac{1}{16}}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習二】

(1) 求 $\sqrt{\frac{16}{625}}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 求 $\sqrt{\sqrt{256}}$ = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 求 1.21 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 求 $2\frac{7}{9}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) $\sqrt{(-23)^2}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(6) $\sqrt{3\frac{13}{81}}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題三】

求 $\sqrt{100} + \sqrt{0.09} + \sqrt{\frac{1}{25}} - \sqrt{784} - \sqrt{64} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習三】

求 $\sqrt{400} + \sqrt{0.09} + \sqrt{18\frac{1}{16}} - \sqrt{784} + \sqrt{64} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題四】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{49} - \sqrt{10^2} = ?$

(2) $\sqrt{16} - \sqrt{6^2} + \sqrt{(-5)^2} = ?$

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}} = ?$

(4) $\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{2\frac{2}{5}} = ?$

【練習四】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{64} - \sqrt{11^2} = ?$

(2) $\sqrt{144} - \sqrt{7^2} + \sqrt{(-13)^2} = ?$

(3) $\sqrt{\frac{5}{7}} = ?$

(4) $\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{3\frac{1}{6}} = ?$

【例題五】化簡 $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 5\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{12} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$ 為最簡分式。**【練習五】**化簡 $\frac{1}{3}\sqrt{72} - 4\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{8} - \sqrt{4\frac{1}{6}}$ 為最簡分式。

【例題六】

先把 27225 作質因數分解，再求 27225 的平方根。

【練習六】

先把 1296 作質因數分解，再求 1296 的平方根。

【例題六】

若 $2x-7$ 的平方根是 ± 5 ，則

(1) $x = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\sqrt{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習六】

若 $2x-3$ 的平方根是 ± 3 ，則

(1) $x = \underline{\hspace{2cm}}$;
(2) $4x+1$ 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題七】

(1) 若 $2x-1$ 的平方根為 ± 7 ，

求 $3x+6$ 的平方根。

(2) 若 $(3x+2)^2$ 的平方根為 ± 13 ，

求 $x = ?$

【練習七】

(1) 若 -5 是 $3x-2$ 的平方根，

求 $3x-11$ 的平方根。

(2) 若 $(2x+3)^2$ 的平方根為 ± 5 ，求 $x = ?$

【例題八】

設 a 、 b 為整數，若 $\sqrt{(a+b-3)^2} + \sqrt{(2a+b-5)^2} = 0$ ，求 $4a + b$ 之平方根。

【練習八】

設 a 、 b 、 c 為整數，若 $\sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a+b-1)^2} + \sqrt{2a-b+c+5} = 0$ ，則

$a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ，則 $\sqrt{a+b+c} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例題九】

按照下列各種情形，分別求 $\sqrt{(2x-1)^2}$ 的值：

- (1) $x < \frac{1}{2}$ 。 (2) $x = \frac{1}{2}$ 。 (3) $x > \frac{1}{2}$ 。

【練習九】

按照下列各種情形，分別求 $\sqrt{(4x-1)^2}$ 的值：

(1) $x < \frac{1}{4}$ 。 (2) $x = \frac{1}{4}$ 。 (3) $x > \frac{1}{4}$ 。

【例題十】

已知 $-3 < x < 2$ ，則 $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} = ?$

【練習十】

已知 $-1 < x < 6$ ，則 $\sqrt{(x-6)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = ?$

【例題十一】

若 $a=2\sqrt{7}$ ， $b=3\sqrt{5}$ ， $c=\sqrt{37}$ ，比較 a 、 b 、 c 的大小為何？

【練習十一】

若 $a=2\sqrt{5}$ ， $b=3\sqrt{2}$ ， $c=\sqrt{23}$ ，比較 a 、 b 、 c 的大小為何？

【例題十二】

計算下列各式：

- (1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = ?$
- (2) $(\sqrt{12} + \sqrt{8})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = ?$
- (3) $(\sqrt{15} + \sqrt{3})^2 = ?$

【練習十二】

計算下列各式：

- (1) $(\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{50}) \times \sqrt{2} = ?$
- (2) $(\sqrt{18} - \sqrt{8})^2 = ?$
- (3) $\left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = ?$

【例題十三】

設 a 、 b 、 c 、 d 皆為正整數，若 $\sqrt{360} \doteq 18.9\dots$ ，欲使 $\sqrt{360a}$ 、 $\sqrt{\frac{360}{b}}$ 、 $\sqrt{360+c}$ 、 $\sqrt{360-d}$ 均為正整數，當 a 、 b 、 c 、 d 均為最小正整數時，求 $\sqrt{a+b+c+d-8} = ?$

【練習十三】

設 $\sqrt{720} \doteq 26.8\dots$ ，欲使 $\sqrt{720a}$ 、 $\sqrt{\frac{720}{b}}$ 、 $\sqrt{720+c}$ 、 $\sqrt{720-d}$ 均為正整數，當 a 、 b 、 c 、 d 均為最小正整數時，求 $\sqrt{a+b+c+d+1} = ?$

【例題十四】

設 a 為正整數，且 $1 < a < 50$ ，則滿足 $\sqrt{4+a}$ 為整數之 a 共有幾個？

【練習十四】

設 $\sqrt{10-a}$ 為正整數，且 a 為正整數，則 a 可為多少？

【例題十五】

下列各方根的值，何者介於 6 與 7 之間？

$\sqrt{35}$ 、 $\sqrt{36}$ 、 $\sqrt{37}$ 、 $\sqrt{41}$ 、 $\sqrt{43}$ 、 $\sqrt{45}$ 、 $\sqrt{47}$ 、 $\sqrt{49}$ 、 $\sqrt{50}$ 。

【練習十五】

下列各方根的值，何者介於 12 與 13 之間？

$\sqrt{110}$ 、 $\sqrt{120}$ 、 $\sqrt{130}$ 、 $\sqrt{140}$ 、 $\sqrt{150}$ 、 $\sqrt{160}$ 、 $\sqrt{170}$ 、 $\sqrt{180}$ 、 $\sqrt{190}$ 。

【例題十六】

滿足 $10 \leq \sqrt{n} \leq 15$ 的正整數 n 共有多少個？

【練習十六】

滿足 $20 \leq \sqrt{n} < 25$ 的自然數共有多少個？

【例題十七】

- (1) 已知 $A(0, 0)$ 和 $B(-8, -6)$ 兩點，求 \overline{AB} 的長。
- (2) 已知 $C(-2, 0)$ 和 $D(-7, -12)$ 兩點，求 \overline{CD} 的長。

【練習十七】

- (1) 已知 $A(5, -3)$ 和 $B(-2, 21)$ 兩點，求 \overline{AB} 的長。
- (2) 已知 $C(1, 1)$ 和 $D(2, 3)$ 兩點，求 \overline{CD} 的長。

【例題十八】

試利用右表乘方開方表回答問題：

(1) $\sqrt{290} = ?$

(2) $\sqrt{1.8} = ?$

(3) $\sqrt{261} = ?$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
18	324	4.242	13.416
23	529	4.795	15.165
29	841	5.385	17.029

【練習十八】

試利用右表乘方開方表回答問題：

(1) $\sqrt{210} = ?$

(2) $\sqrt{880} = ?$

(3) $\sqrt{1.7} = ?$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
17	289	4.123	13.038
21	441	4.582	14.491
22	484	4.690	14.832

【例題十九】

設 $\sqrt{65}$ 的整數部份為 a ， $\sqrt{300}$ 的整數部份為 b ，求(1) $\sqrt{a+b} = ?$ (2) $b-a$ 的平方根=?

【練習十九】

設 $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}$ ，且 $a_1 = \sqrt{10}$ 則 $a_1、a_2、a_3、\dots、a_{1000}$ 當中是整數的有多少個？

【例題二十】

(1) 已知 $\sqrt{2} = 1.414$ ，求下列各數的值：

a. $\sqrt{0.0072} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

b. $\sqrt{8000000} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 由表查知 $\sqrt{875} = 29.58$ ，

$\sqrt{8750} = 93.54$ ，求 $\sqrt{\frac{7}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【練習二十】

(1) 已知 $\sqrt{21} = 4.5826$ ， $\sqrt{210} = 14.4914$

求下列各數的值：

a. $\sqrt{210000} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

b. $\sqrt{21000} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

c. $\sqrt{2.1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

d. $\sqrt{0.0021} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

立方根

1. 認識立方根：

我們知道 $3^3=27$ ， $5^3=125$ ……，那麼多少的立方等於 343 呢？

倒過來給定一數 a ，如果有一數 x 會使得 $x^3=a$ ，則此 x 稱為 a 的立方根。

例如：我們可以用 $x^3=343$ 來表示，那些 x 滿足 $x^3=343$ 呢？

我們知道 $x=7$ 滿足 $x^3=343$ ，在此 7 我們稱為 343 的立方根，

但是， $(-7)^3=-343$ ，所以 (-7) 不是 343 的立方根。

【範例】：求下列各數的立方根：

(1) 512 (2) -216 (3) 36 (4) 242。

解：(1) $512=8 \times 8 \times 8=8^3$ ，故 512 的立方根為 8。

(2) $(-216)=(-6) \times (-6) \times (-6)=(-6)^3$ ，故 (-216) 的立方根為 (-6) 。

(3) $36=2 \times 3 \times 3$ ，在此我們無法利用相同的三個整數相乘，找出 36 的立方根。
所以 36 的立方根要利用『立方根號』來表示。

(4) $242=2 \times 11 \times 11$ ，在此我們無法利用相同的三個整數相乘為 242，找出 242 的立方根。所以 242 的立方根要利用『立方根號』來表示。

2. 立方根的意義：

(1) 立方根：

設 a 、 x 都是實數，若 $x^3=a$ ，則 x 就叫做 a 的立方根，以 $x=\sqrt[3]{a}$ 來表示，讀作 x 等於正負根號 a 。

例如： $4^3=64$ ，就稱「4 是 64 的立方根」。

$(-4)^3=(-64)$ ，就稱「 (-4) 是 (-64) 的立方根」。

【範例】：試找出 9 的平方根和 27 的立方根。

解：9 的平方根是 (-3) 和 3，因為 $(-3)^2=3^2=9$ 。

27 的立方根是 3，因為 $3^3=27$ 。

此範例中，27 是正數，所以立方根也是正數。

因為 $(-3)^3=(-3) \times (-3) \times (-3)=(-27)$ ，

所以 (-27) 的立方根是 (-3) 。

※結論：若 $x^3=a$ ，則 x 就叫做 a 的立方根。 a 只會有一個立方根，以 $x=\sqrt[3]{a}$ 來表示。
若 $x^2=a$ ，則 x 就叫做 a 的平方根。 a 會有二個平方根，以 $x=\pm\sqrt{a}$ 來表示。

(2) 立方根的表示法：

- a. 一個數 a 的立方根記作 $\sqrt[3]{a}$ ，讀做『三次根號 a 』。
- b. 設 a 是任意數， a 可以是正數或負數，則 $\sqrt[3]{a^3} = a$ 或 $\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$ 。
- c. 零的立方還是為零，所以零的立方根以 $\sqrt[3]{0}$ （讀做三次根號零）表示，即 $\sqrt[3]{0} = 0$ 。
- d. 若 $\sqrt[3]{a}$ 為一個整數，則 a 為完全立方數。也就是 $a = x^3$ ，其中 x 為整數，則稱 a 為完全立方數。

【範例】：一個數 8 的立方根記作 $\sqrt[3]{8}$ ，讀做『三次根號 8』。

【範例】：(1) $\sqrt[3]{5^3} = 5$ (2) $\sqrt[3]{10^3} = 10$ (3) $\sqrt[3]{(-7)^3} = -7$ 。

【範例】：2 是否為 8 的立方根？

解： $\because 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ ， $\therefore 2$ 是為 8 的立方根。

【範例】：-3 是否為 27 的立方根？

解： $\because (-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$ ，
 $\therefore -3$ 不是 27 的立方根。

【範例】：利用質因數分解求出下列各式的立方根：

(1) 27 (2) -512 (3) 125 (4) -1000 (5) 0。

解：(1) $27 = 3 \times 3 \times 3$ ，27 的立方根為 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$ 。

(2) $-512 = (-8) \times (-8) \times (-8)$ ，
 -512 的立方根為 $\sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{(-8) \times (-8) \times (-8)} = -8$ 。

(3) $125 = 5 \times 5 \times 5$ ，125 的立方根為 $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$ 。

(4) $-1000 = (-10) \times (-10) \times (-10)$ ，
 -1000 的立方根為 $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10) \times (-10) \times (-10)} = -10$ 。

(5) 0 的立方根為 $\sqrt[3]{0} = 0$ 。

【範例】：下列為 1 到 27 的立方根列表：

1 $\rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$ ，1 為完全立方數。

2 $\rightarrow \sqrt[3]{2}$ ； $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2$ 。

3 $\rightarrow \sqrt[3]{3}$ ； $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = 3$ 。

4 $\rightarrow \sqrt[3]{4}$ ； $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} = 4$ 。

5 $\rightarrow \sqrt[3]{5}$ ； $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = 5$ 。

6 $\rightarrow \sqrt[3]{6}$ ； $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} = 6$ 。

7 $\rightarrow \sqrt[3]{7}$ ； $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7} = 7$ 。

8 $\rightarrow 2$ ； $\because \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$ ， $\therefore 8$ 為完全立方數。

9 $\rightarrow \sqrt[3]{9}$ ； $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9} = 9$ 。

10 $\rightarrow \sqrt[3]{10}$ ； $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} = 10$ 。

11 $\rightarrow \sqrt[3]{11}$ ； $\sqrt[3]{11} \times \sqrt[3]{11} \times \sqrt[3]{11} = 11$ 。

$$\begin{aligned}
12 &\longrightarrow \sqrt[3]{12} ; \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{12} = 12。 \\
13 &\longrightarrow \sqrt[3]{13} ; \sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{13} = 13。 \\
14 &\longrightarrow \sqrt[3]{14} ; \sqrt[3]{14} \times \sqrt[3]{14} \times \sqrt[3]{14} = 14。 \\
15 &\longrightarrow \sqrt[3]{15} ; \sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{15} = 15。 \\
16 &\longrightarrow \sqrt[3]{16} ; \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{16} = 16。 \\
17 &\longrightarrow \sqrt[3]{17} ; \sqrt[3]{17} \times \sqrt[3]{17} \times \sqrt[3]{17} = 17。 \\
18 &\longrightarrow \sqrt[3]{18} ; \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{18} = 18。 \\
19 &\longrightarrow \sqrt[3]{19} ; \sqrt[3]{19} \times \sqrt[3]{19} \times \sqrt[3]{19} = 19。 \\
20 &\longrightarrow \sqrt[3]{20} ; \sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{20} = 20。 \\
21 &\longrightarrow \sqrt[3]{21} ; \sqrt[3]{21} \times \sqrt[3]{21} \times \sqrt[3]{21} = 21。 \\
22 &\longrightarrow \sqrt[3]{22} ; \sqrt[3]{22} \times \sqrt[3]{22} \times \sqrt[3]{22} = 22。 \\
23 &\longrightarrow \sqrt[3]{23} ; \sqrt[3]{23} \times \sqrt[3]{23} \times \sqrt[3]{23} = 23。 \\
24 &\longrightarrow \sqrt[3]{24} ; \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{24} = 24。 \\
25 &\longrightarrow \sqrt[3]{25} ; \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{25} = 25。 \\
26 &\longrightarrow \sqrt[3]{26} ; \sqrt[3]{26} \times \sqrt[3]{26} \times \sqrt[3]{26} = 26。 \\
27 &\longrightarrow 3 ; \because \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3, \therefore 27 \text{ 為完全立方數。}
\end{aligned}$$

【範例】： $125=5^3$ ，5 是 125 的立方根，則 125 即為完全立方數。

【範例】：常用的完全立方數列表。

解：

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1, \quad 1 \text{ 是 } 1 \text{ 的立方根, 則 } 1 \text{ 為完全立方數。} \\
2^3 &= 8, \quad 2 \text{ 是 } 8 \text{ 的立方根, 則 } 8 \text{ 為完全立方數。} \\
3^3 &= 27, \quad 3 \text{ 是 } 27 \text{ 的立方根, 則 } 27 \text{ 為完全立方數。} \\
4^3 &= 64, \quad 4 \text{ 是 } 64 \text{ 的立方根, 則 } 64 \text{ 為完全立方數。} \\
5^3 &= 125, \quad 5 \text{ 是 } 125 \text{ 的立方根, 則 } 125 \text{ 為完全立方數。} \\
6^3 &= 216, \quad 6 \text{ 是 } 216 \text{ 的立方根, 則 } 216 \text{ 為完全立方數。} \\
7^3 &= 343, \quad 7 \text{ 是 } 343 \text{ 的立方根, 則 } 343 \text{ 為完全立方數。} \\
8^3 &= 512, \quad 8 \text{ 是 } 512 \text{ 的立方根, 則 } 512 \text{ 為完全立方數。} \\
9^3 &= 729, \quad 9 \text{ 是 } 729 \text{ 的立方根, 則 } 729 \text{ 為完全立方數。} \\
10^3 &= 1000, \quad 10 \text{ 是 } 1000 \text{ 的立方根, 則 } 1000 \text{ 為完全立方數。}
\end{aligned}$$

【範例】：下列哪些是完全立方數：(-64)、121、192、500、1331、1728。

解： $\sqrt[3]{(-64)} = \sqrt[3]{(-4) \times (-4) \times (-4)} = (-4)$ 。

$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{11 \times 11}$ ，121 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^6 \times 3}$ ，192 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{5^3 \times 2^2}$ ，500 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11 \times 11 \times 11} = 11$ 。

$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = \sqrt[3]{(2 \times 2 \times 3)^3} = 12$ 。

所以完全立方數有：(-64)、1331、1728。

(3) 負數有一個實數的立方根：

不同於平方根的被開方數必須是非負的整數，立方根的被開方數可以是任意實數。

例如： $27 = 3^3$ 及 $-8 = (-2)^3$ ，所以 $\sqrt[3]{27} = 3$ 及 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。

顯然的，被開方數與它的立方根同號。

【範例】：求出 -125 以及 -64 的立方根。

解： $(-125) = (-5) \times (-5) \times (-5)$ ， $\therefore (-125)$ 的立方根為 (-5)。

$(-64) = (-4) \times (-4) \times (-4)$ ， $\therefore (-64)$ 的立方根為 (-4)。

(4) 設 a 是實數，則 $\sqrt[3]{a^3} = \begin{cases} a, & \text{當 } a > 0 \\ -a, & \text{當 } a < 0 \\ 0, & \text{當 } a = 0 \end{cases}$ 。

【範例】： $\sqrt[3]{(-27)^3} = (-3)$ 。

$\sqrt[3]{(-12)^3} = (-12)$ 。

$\sqrt[3]{(25)^3} = 25$ 。

3. 立方根運算常用公式：

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ 。

$\therefore (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}) \times (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}) \times (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})$

$= (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}) \times (\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b})$

$= ab$

$\therefore \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ 。

$$(2) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}。$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}。$$

$$(3) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b} \quad (b \neq 0)$$

【範例】： $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3 \times 2}。$

【範例】： $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{6}{10}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}。$

【範例】： $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}。$

4. 最簡立方根式：

一個三次方根，根號內的數，其因數不再含有大於1的完全立方數，且分母不含立方根號，即無法再進一步化簡，此種立方根叫做最簡立方根式。

例如： $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3}}$ 不是最簡根式， $\frac{\sqrt[3]{63}}{3}$ 是最簡根式。

【範例】： $\sqrt[3]{135}$ 與 $\sqrt[3]{225}$ 哪個為最簡立方根？

解 $\because \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 3\sqrt[3]{5}。$

$$\sqrt[3]{225} = \sqrt[3]{3^2 \times 5^2}。$$

$\therefore \sqrt[3]{225}$ 為最簡立方根。

【範例】： 判斷下列何者為最簡立方根：

(1) $\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$ (2) $\sqrt[3]{81}$ (3) $\sqrt[3]{68}$ (4) $\sqrt[3]{56}。$

解 (1) $\sqrt[3]{\frac{4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}。$

(2) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}。$

(3) $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{4 \times 17}。$

(4) $\sqrt[3]{56} = 2\sqrt[3]{7}。$

所以 $\sqrt[3]{68}$ 為最簡立方根。

【範例】：化簡下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{(-125)} \quad (2) \sqrt[3]{375} \quad (3) \sqrt[3]{\frac{27}{8}}。$$

解：(1) $\sqrt[3]{(-125)} = \sqrt[3]{(-5) \times (-5) \times (-5)} = (-5)。$

(2) $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{3 \times 5^3} = 5\sqrt[3]{3}。$

(3) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}。$

5. 立方根的四則運算：

同類立方根號：兩個或兩個以上的立方根式，經化簡後它們根號內的數相同，且開方次數也相同，此種立方根號叫做同類立方根或同類立方根號，否則為不同類立方根號。同類立方根號一定是同次根號，同類立方根式可以做加、減、乘、除運算。

例如： $2\sqrt[3]{3}$ 與 $5\sqrt[3]{3}$ 都有 $\sqrt[3]{3}$ ，所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $5\sqrt[3]{3}$ 是同類立方根號。

例如： $2\sqrt[3]{3}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 其立方根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 不是同類立方根號。

【範例】：判斷下列何者為同類立方根號：

$$(1) 2\sqrt[3]{3} \text{ 與 } 3\sqrt[3]{5} \quad (2) \sqrt[3]{24} \text{ 與 } 3\sqrt[3]{3} \quad (3) \sqrt[3]{7} \text{ 與 } \sqrt[3]{56}。$$

解：(1) $2\sqrt[3]{3}$ 與 $3\sqrt[3]{5}$ 其立方根號內的數都不相同，

所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $3\sqrt[3]{5}$ 不是同類立方根號。

(2) $\because \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$ ， $\therefore \sqrt[3]{24}$ 與 $3\sqrt[3]{3}$ 是同類立方根號。

(3) $\because \sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} = 2\sqrt[3]{7}$ ， $\therefore \sqrt[3]{7}$ 與 $\sqrt[3]{56}$ 是同類立方根號。

【範例】：判斷下列何者為同類立方根號： $\sqrt[3]{32}$ ， $\sqrt[3]{168}$ ， $\sqrt[3]{375}$ ， $\sqrt[3]{108}$ ， $\sqrt[3]{432}$ 。

解： $\because \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$ ， $\sqrt[3]{168} = 2\sqrt[3]{21}$ ， $\sqrt[3]{375} = 5\sqrt[3]{3}$ ， $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$ ， $\sqrt[3]{432} = 6\sqrt[3]{2}$ 。

$\therefore \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$ ， $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$ 為同類立方根號。

(1) 立方根的加減運算：

先將立方根化為最簡立方根，再將同類立方根號的最簡立方根作加減運算，

即對最簡立方根的係數作加減即可。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3}$ (2) $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}$ 。

解：(1) $\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} = (1+4)\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}。$

(2) $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = (5-2)\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}。$

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{3}$ (2) $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{16}$ 。

解：(1) $\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \times 3} - 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = 0$ 。

(2) $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{125 \times 2} - 2\sqrt[3]{8 \times 2} = 5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$ 。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{40} + 5\sqrt[3]{6}$ (2) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{72} - 3\sqrt[3]{7}$ 。

解：(1) $\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{40} + 5\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \times 6} + \sqrt[3]{2^3 \times 5} + 5\sqrt[3]{6}$
 $= 2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{6}$
 $= (2+5)\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{5}$
 $= 7\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{5}$ 。

(2) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{72} - 3\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} + \sqrt[3]{2^3 \times 9} - 3\sqrt[3]{7}$
 $= 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{7}$
 $= 2\sqrt[3]{9} + (2-3)\sqrt[3]{7}$
 $= 2\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{7}$ 。

(2) 根號的乘除法運算及有理化：

1. $a\sqrt[3]{b} \times c\sqrt[3]{d} = a \times c \sqrt[3]{b \times d}$ 。

2. $m\sqrt[3]{a} \div n\sqrt[3]{b} = m\sqrt[3]{a} \times \frac{1}{n\sqrt[3]{b}} = \frac{m\sqrt[3]{a}}{n\sqrt[3]{b}} = \frac{m}{n} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ，(b ≠ 0)。

有理化：使分母不含根號，且分子為最簡根式，此過程即為分母有理化。

通常我們會將 $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 有理化： $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$ ，(a ≥ 0, b > 0)。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $-3\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt[3]{2}$ (2) $2\sqrt[3]{6} \times 5\sqrt[3]{3}$

解：(1) $-3\sqrt[3]{2} \times 2\sqrt[3]{2} = -3 \times 2 \sqrt[3]{2 \times 2} = -6\sqrt[3]{4}$ 。

(2) $2\sqrt[3]{6} \times 5\sqrt[3]{3} = 2 \times 5 \sqrt[3]{6 \times 3} = 10\sqrt[3]{18}$ 。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{72} \times 2\sqrt[3]{21}$ (2) $\sqrt[3]{96} \times \sqrt[3]{108}$

解：(1) $\sqrt[3]{72} \times 2\sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{8 \times 9} \times 2\sqrt[3]{21} = 2\sqrt[3]{9} \times 2\sqrt[3]{21} = 2 \times 2 \sqrt[3]{9 \times 21}$
 $= 4\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 7} = 4 \times 3 \sqrt[3]{7} = 12\sqrt[3]{7}$ 。

(2) $\sqrt[3]{96} \times \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^5 \times 3} \times \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 2\sqrt[3]{2^2} \times 3 \times \sqrt[3]{2^2} = 6\sqrt[3]{2^2 \times 3 \times 2^2}$
 $= 6 \times 2 \sqrt[3]{2 \times 3} = 12\sqrt[3]{6}$ 。

【範例】：請化簡： $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = ?$

$$\begin{aligned}\text{解} : (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) &= (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) \{ (\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2 \} \\ &= (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 \\ &= 2 + 3 \\ &= 5.\end{aligned}$$

【範例】：請化簡： $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) ?$

$$\begin{aligned}\text{解} : (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \{ (\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2 \} \\ &= (\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{3})^3 \\ &= 2 - 3 \\ &= -1.\end{aligned}$$

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{9}$ (2) $\sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{15}$ (3) $3\sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{4}$

$$\begin{aligned}\text{解} : (1) \sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{9} &= \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}} = \frac{\sqrt[3]{4 \times 3}}{\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{3}。 \\ (2) \sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{15} &= \sqrt[3]{\frac{25}{15}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3}} = \sqrt[3]{\frac{45}{9}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}。 \\ (3) 3\sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{4} &= \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{25 \times 2}}{\sqrt[3]{4 \times 2}} = \frac{3\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{50}}{2}。 \end{aligned}$$

【範例】：有理化下列各根式的分母：

$$(1) \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad (2) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}。$$

$$\text{解} : (1) \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}。$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2 \times 2}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}。$$

【範例】：有理化下列各根式的分母：

$$(1) \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1} \quad (2) \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}。$$

解：(1) 由立方公式，我們知道 $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3$ 。
所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以 $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$ 即可。
因此得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} &= \frac{1 \times (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}.\end{aligned}$$

(2) 由立方公式，我們知道

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1。$$

所以，我們對分子與分母同乘以 $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ ，即得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} &= \frac{1 \times (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

【範例】：請試著將 $\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$ 有理化。

解：由立方公式，我們知道：

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 5 - 2 = 3。$$

所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以 $(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$ 即可。

因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})} = \frac{(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{3}。$$

【範例】：請試著將 $\frac{1}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}}$ 有理化。

解：由立方公式，我們知道：

$$(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 7 + 3 = 10。$$

所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以 $(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$ 即可。

因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})} = \frac{(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})}{10}。$$

【範例】：請化簡下列各式：(1) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = ?$ (2) $\sqrt[3]{54} = ?$ (3) $\sqrt[3]{\frac{7}{12}} = ?$

解：(1) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 5^2}{5 \times 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{75}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5}。$

(2) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}。$

(3) $\sqrt[3]{\frac{7}{12}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2^2 \times 3}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 2 \times 3^2}{2^2 \times 3 \times 2 \times 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 2 \times 3^2}{(2 \times 3)^3}} = \frac{\sqrt[3]{126}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt[3]{126}}{6}。$

【範例】：求解 $3\sqrt[3]{9}x = 6\sqrt[3]{15}$ 。

解： $x = \frac{6\sqrt[3]{15}}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{15 \times 3}}{\sqrt[3]{9 \times 3}} = \frac{2\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2\sqrt[3]{45}}{3}。$

答： $x = \frac{2\sqrt[3]{45}}{3}。$

【範例】：化簡 $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}} \div \frac{2\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} = ?$

解： $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}} \div \frac{2\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{15}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$
 $= \sqrt[3]{\frac{5}{18} \times \frac{2}{8 \times 15} \times \frac{4}{9}}$
 $= \sqrt[3]{\frac{5 \times 2^3}{2^4 \times 3^5 \times 5}}$
 $= \frac{2}{2 \times 3} \sqrt[3]{\frac{1}{2 \times 3^2}}$
 $= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2^2 \times 3}{2 \times 3^2 \times 2^2 \times 3}}$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt[3]{12}}{6}$
 $= \frac{\sqrt[3]{12}}{18}。$

6. 平方根與立方根的比較大小：

- (1) 將根號前的係數移入根號內。
- (2) 化不同次方根為同次方根。
- (3) 比較被開方數的大小順序, 即為方根的大小順序。

【範例】：試比較 $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 的大小順序。

$$\text{解} : 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$$

因為 $12 < 18$, 所以 $\sqrt{12} < \sqrt{18}$, 故可知 $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ 。

【範例】：試比較 $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt[3]{3}$ 的大小順序。

$$\text{解} : \sqrt{2} = (2^{\frac{1}{2}}) = (2^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{3} = (3^{\frac{1}{3}}) = (3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

因為 $8 < 9$, 所以 $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, 故可知 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ 。

【範例】：試比較 $3\sqrt[3]{2}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$ 的大小順序。

$$\text{解} : 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = \sqrt[3]{2 \times 27} = \sqrt[3]{54}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \times 2^3} = \sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{24}$$

因為 $54 > 24$, 所以 $\sqrt[3]{54} > \sqrt[3]{24}$, 故可知 $3\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{3}$ 。

7. 立方根的近似值計算：

查表法：利用乘方開方表找出平方根與立方根的值，此種查表的方法就叫做查表法。
將根號內的數化為 \sqrt{N} ， $\sqrt{10N}$ 或 $\sqrt{a^2N} = a\sqrt{N}$ ，在查表則可得。

【範例】：

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$	$\sqrt{N^3}$	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
28	784	5.291503	16.73320	219.52	3.036589	6.542133	14.09460

則由上表可得知， $\sqrt{28} = 5.291503$ ， $\sqrt[3]{28} = 3.036589$ ， $\sqrt[3]{280} = 6.542133$ ， $\sqrt[3]{2800} = 14.09460$ 。

【範例】：利用上一個範例中的表格，求出下列立方根的值。

$$(1) \sqrt[3]{224} = ? \quad (2) \sqrt[3]{0.28} = ?$$

$$\text{解} : (1) \sqrt[3]{224} = \sqrt[3]{8 \times 28} = 2\sqrt[3]{28} = 2 \times 3.036589 = 6.073178。$$

$$(2) \sqrt[3]{0.28} = \sqrt[3]{\frac{280}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{280}}{10} = \frac{6.542133}{10} = 0.6542133。$$



小 試 身 手

【例題一】

計算下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{27} = \underline{\quad\quad} \quad (2) \sqrt[3]{1} = \underline{\quad\quad} \quad (3) \sqrt[3]{-125} = \underline{\quad\quad} \quad (4) \sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \underline{\quad\quad}$$

【練習一】

計算下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{0.008} = \underline{\quad\quad} \quad (2) \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \underline{\quad\quad} \quad (3) \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = \underline{\quad\quad}$$
$$(4) \sqrt[3]{(-0.3)^3} = \underline{\quad\quad}$$

【例題二】

$$\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{343} - \sqrt[3]{8000} = \underline{\quad\quad\quad}$$

【練習二】

$$\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{(-0.3)^3} + \sqrt[3]{-0.064} = \underline{\quad\quad\quad}$$

【例題三】

計算下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{-4}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \sqrt[3]{-56} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【練習三】

計算下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{-60} \times \sqrt[3]{18} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \sqrt[3]{-\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \sqrt[3]{250} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【例題四】

化簡下列各式：

$$(1) \sqrt[3]{(-x)^6} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \sqrt[3]{x^9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) x < 0, \sqrt[3]{(-x)^{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \text{設 } a > 0, b < 0, \text{ 求 } \sqrt[3]{-a^3b^3} + \sqrt{a^2b^2} = \underline{-ab} + \underline{(-ab)} = \underline{-2ab}$$

【練習四】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{(-x)^{15}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\sqrt[3]{x^{21}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $x < 0$, $\sqrt[3]{(-x)^{12}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) 設 $a < 0$, $b > 0$, 求 $\sqrt[3]{-a^3b^3} - \sqrt{a^2b^2} = \underline{\hspace{4cm}}$ 。

【例題五】

計算下列各式：

(1) 設 $x < 0$, 化簡 $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt[3]{-8x^6} - \sqrt{4x^4}$ 。

(2) 設 a 、 b 為任意數，化簡 $\sqrt[3]{-8a^3} - \sqrt[3]{(a-b)^3} + \sqrt[3]{(-8)(-b)^3}$

【練習五】

計算下列各式：

(1) 設 $x < 0$, 化簡 $\sqrt[3]{x^6} + \sqrt{x^4} + \sqrt[3]{-64x^9} - \sqrt{9x^6}$ 。

(2) 設 a 、 b 為任意數，化簡 $\sqrt[3]{-27a^3} - \sqrt[3]{(a+b)^6} + \sqrt[3]{(-0.125)(-b)^6}$

【例題六】

若 $a=2\sqrt{3}$ ， $b=3\sqrt{2}$ ， $c=2\sqrt[3]{3}$ ， $d=3\sqrt[3]{2}$ ，試比較 a 、 b 、 c 、 d 之大小順序。

【練習六】

若 $a=5\sqrt{3}$ ， $b=3\sqrt{5}$ ， $c=5\sqrt[3]{3}$ ， $d=3\sqrt[3]{5}$ ，試比較 a 、 b 、 c 、 d 之大小順序。

【例題七】

設 $3x+2y$ 的平方根為 ± 2 ， $2x-y+3$ 的立方根為 2 ，求：

(1) x 、 y 之值；

(2) $\sqrt{x+y} - \sqrt[3]{5x+2y}$ 之值。

【練習七】

設 $5x - 2y - 1$ 的平方根為 ± 3 ， $3x + y - 5$ 的立方根為 1 ，求：

(1) x 、 y 之值；

(2) $\sqrt{8x + 5y} - \sqrt[3]{(4x + 3y)^3}$ 之值。

【例題八】

若 -2 是 $2x - 3y - 4$ 的立方根， ± 2 是 $2x - y$ 的平方根，求：

(1) x 、 y 之值；

(2) $\sqrt{3x + y} - \sqrt[3]{6x - 4y}$ 之值。

【練習八】

若 -3 是 $-2x - y + 1$ 的立方根， ± 1 是 $x - 3y + 1$ 的平方根，求：

(1) x 、 y 之值。

(2) $\sqrt{2x + 3y} - \sqrt[3]{3x - y - 5}$ 之值。

【例題九】

若 $1 < x < 5$ ，則 $\frac{\sqrt[3]{(x-5)^3}}{\sqrt{(x-5)^2}} - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x} = ?$

【練習九】

若 $-1 < x < 3$ ，則 $\frac{\sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt{(x-3)^2}} - \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{1+x} = ?$

【例題十】

先把 9261 作質因數分解，再求 $\sqrt[3]{9261}$ 的值。

【練習十】

先把 91125 作質因數分解，再求 91125 的立方根。

【例題十一】

某數的平方與它的一半的乘積是 27436，
求某數 = ?

【練習十一】

某數的立方的一半是 864，求某數 = ?

【例題十二】

欲使 540 為一完全立方數，則應乘最小正整數為 a ，應除以最小正整數為 b ，求 a 、 b 之值為何？

【練習十二】

欲使 4725 化成一完全立方數，則應乘以最小正整數 a ，或應除以最小正整數 b ，求 $a+b=?$

【例題十三】

滿足 $10 \leq \sqrt[3]{n} < 15$ 的正整數 n 共有幾個？

【練習十三】

滿足 $7 \leq \sqrt[3]{3n} < 10$ 的正整數 n 共有幾個？

【例題十四】

設下列各方根為整數求 x 的最小正整數值：(1) $\sqrt[3]{12x}$ (2) $\sqrt[3]{90x}$ (3) $\sqrt[3]{1575x}$

【練習十四】

設下列各方根為整數求 x 的最小正整數值：(1) $\sqrt[3]{6x}$ (2) $\sqrt[3]{120x}$ (3) $\sqrt[3]{4356x}$

【例題十五】

設 x 為整數，求下列各方根中 x 的最小整數值與最大整數值：

(1) $2.5 < \sqrt[3]{x} \leq 3$ (2) $4 \leq \sqrt[3]{10x} \leq 8$

【練習十五】

設 x 為整數，求下列各方根中 x 的最小整數值與最大整數值：

(1) $3 < \sqrt[3]{2x} \leq 5$ (2) $-2 \leq \sqrt[3]{0.3x} \leq 3$

【例題十六】

設 a 、 b 、 c 、 d 皆為正整數，若 $\sqrt[3]{392} = 7.31\dots\dots$ ，欲使 $\sqrt[3]{392+a}$ 、 $\sqrt[3]{392-b}$ 、 $\sqrt[3]{392 \times c}$ 、 $\sqrt[3]{\frac{392}{d}}$ 均為正整數，當 a 、 b 、 c 、 d 均為最小正整數時，求 a 、 b 、 c 、 d 之最小值。

【練習十六】

欲使 $\sqrt[3]{360}$ 為正整數，則應乘的最小正整數為 a ，應除的最小正整數為 b ，則應加的最小正整數為 c ，應減的最小正整數為 d ，求 $\sqrt[3]{a-b+c+2d}$ 之值。

【例題十七】

設 $\sqrt[3]{70-a}$ 為正整數，且 a 為介於20與70之間的正整數，則 a 之值為何？

【練習十七】

設 $\sqrt[3]{150-a}$ 為正整數，且 a 為介於20與50之間的正整數，則 a 之值為何？

【例題十八】

設 $\sqrt[3]{3}=p$ ， $\sqrt[3]{5}=q$ ， $\sqrt[3]{7}=r$ ，
試以 p 、 q 、 r 表示 $\sqrt[3]{0.00084}$ 之值

【練習十八】

設 $\sqrt[3]{2}=p$ ， $\sqrt[3]{3}=q$ ， $\sqrt[3]{5}=r$ ，
試以 p 、 q 、 r 表示 $\sqrt[3]{810}$ 之值

【例題十九】

下列各方根的值，何者介於 4 與 5 之間？

$$\sqrt[3]{47}、\sqrt[3]{54}、\sqrt[3]{75}、\sqrt[3]{95}、\sqrt[3]{130}、\sqrt[3]{110}、\sqrt[3]{145}。$$

【練習十九】

下列各方根的值，何者介於 3 與 4 之間？

$$\sqrt[3]{7}、\sqrt[3]{17}、\sqrt[3]{30}、\sqrt[3]{45}、\sqrt[3]{55}、\sqrt[3]{60}、\sqrt[3]{70}。$$

【例題二十】

由表查知 $\sqrt[3]{54} = 3.779769$ ， $\sqrt[3]{540} = 8.143253$ ， $\sqrt[3]{5400} = 17.54411$

求(1) $\sqrt[3]{540000}$ (2) $\sqrt[3]{0.0054}$ (3) $\sqrt[3]{0.054}$

【練習二十】

由表查知 $\sqrt[3]{33} = 3.207534$ ， $\sqrt[3]{330} = 6.910423$ ， $\sqrt[3]{3300} = 14.88806$

求(1) $\sqrt[3]{330000}$ (2) $\sqrt[3]{0.0033}$ (3) $\sqrt[3]{0.033}$

【例題二十一】

設 $\sqrt[3]{53} = 3.756$ ，且 $\sqrt[3]{x} = 75.12$ ，求 x 之值

【練習二十一】

設 $\sqrt[3]{50} = 3.684$ ，且 $\sqrt[3]{x} = 11.052$ ，求 x 之值