因式分解

因式的判別

(1)**因式分解的意義**：

在前一章中，我們知道兩個 x 的一次式乘積展開後成為 x 的二次多項式。反過來說，如果能將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式的乘積，我們稱這樣的過程為這個二次式的**因式分解**。此時，這兩個一次式都稱為二次多項式的**因式**，而這個二次多項式則稱為這兩個一次式的**倍式**。

在國中的課程中，我們也將一個多項式寫成幾個一次或二次的多項式的連乘積，這種過程也稱為這個多項式的因式分解。例如：

$$x^2-x-2 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x-1)(x-2)(x-3)$$

像這樣將 x^2-x-2 表示成 $(x+1)(x-2)$ 的兩個一元一次式乘積，稱為 x^2-x-2 的因式分解。

【範例】：乘積展開：$(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$

因式分解：$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$

【範例】：乘積展開：$(x-2)(3x+2)(x+3)=3x^3+5x^2-16x-12$

因式分解：$3x^3+5x^2-16x-12=(x-2)(3x+2)(x+3)$

(2)**因式與倍式**：

（1）因式與倍式的定義：

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 為多項式，$g(x)\neq 0$，$h(x)\neq 0$，若 $f(x)=g(x)\times h(x)$，則 $g(x)$、$h(x)$ 均為 $f(x)$ 的**因式**，而 $f(x)$ 分別為 $g(x)$、$h(x)$ 的**倍式**。

【範例】：$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

所以 $(x+3)$ 和 $(x-2)$ 是 x^2+x-6 的因式；

亦可說 x^2+x-6 是 $(x+3)$ 和 $(x-2)$ 的倍式。

【範例】：$3x^3+5x^2-16x-12=(x-2)(3x+2)(x+3)$

所以 $(x-2)$、$(3x+2)$ 和 $(x+3)$ 是 $3x^3+5x^2-16x-12$ 的因式；

亦可說 $3x^3+5x^2-16x-12$ 是 $(x-2)$、$(3x+2)$ 和 $(x+3)$ 的倍式。

（2）因式的判別：(利用多項式除法)

若 $f(x)\div g(x)$能整除，則 $g(x)$為 $f(x)$的因式。

例如: $(x^3+8x^2+6x-12)\div(x+2)=x^2+6x-6$

【範例】：請判別 $x-2$ 是否為 $2x^2+x-10$ 的因式。

解：因為 $(2x^2+x-10)\div(x-2)=2x+5\ \cdots\cdots 0$

可以整除，所以 $x-2$ 是 $2x^2+x-10$ 的因式。

【範例】：請判別 $x+3$ 是否為 x^3+4x^2+4x+3 的因式。

解：因為 $(x^3+4x^2+4x+3)\div(x+3)=x^2+x+1\ \cdots\cdots 0$

可以整除，所以 $x+3$ 是 x^3+4x^2+4x+3 的因式。

（3）因式定理：

(a)若 $x-c$ 是多項式 $f(x)$的因式，則 $f(c)=0$。

也就是說，$x-c$ 是 $f(x)$的因式，會有一個多項式 $g(x)$，

使得 $f(x)=(x-c)\times g(x)$，所以當我們令 $x=c$ 代入時

$f(c)=(c-c)\ g(c)=0\times g(c)=0$。

【範例】：請判別 $x+5$ 是否為 $f(x)=x^2-4x-45$ 的因式。

解：若 $x+5$ 是 $f(x)=x^2-4x-45$ 的因式，則 $f(x)=(x+5)g(x)$

$f(x)=x^2-4x-45$

$\Rightarrow\ f(-5)=(-5)^2-4\times(-5)-45=25+20-45=0$

$\because\ f(-5)=(-5+5)g(-5)=0\times g(-5)=0$。

$\therefore\ x+5$ 是 $f(x)=x^2-4x-45$ 的因式。

【範例】：請判別 $x-2$ 是否為 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ 的因式。

解：若 $x-2$ 是 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ 的因式，

則 $f(x)=(x-2)g(x)$

$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$

$\Rightarrow\ f(2)=2^3+2\times2^2-5\times2-6=8+8-10-6=0$

$\because\ f(2)=(2-2)g(2)=0\times g(2)=0$。

$\therefore\ x-2$ 是 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ 的因式。

(b)若 $ax+b$ 是多項式 $f(x)$的因式，則 $f(-\frac{b}{a})=0$。

當 $ax+b$ 是多項式 $f(x)$的因式時，會有一個多項式 $g(x)$，

使得 $f(x)=(ax+b)\ g(x)$，所以當我們令 $x=-\frac{b}{a}$ 代入時

$f(-\frac{b}{a})=[a(-\frac{b}{a})+b]\ g(x)=(-b+b)g(x)=0$。

【範例】：請判別 $2x-3$ 是否為 $f(x)=4x^2-2x-6$ 的因式。

解　：

若 $2x-3$ 是 $f(x)=4x^2-2x-6$ 的因式，

則 $f(x)=4x^2-2x-6=(2x-3)g(x)$

$f(x)=4x^2-2x-6$

$\Rightarrow f(\frac{3}{2})=4\times(\frac{3}{2})^2-2\times\frac{3}{2}-6=4\times\frac{9}{4}-3-6=9-9=0$

所以 $2x-3$ 是 $f(x)=4x^2-2x-6$ 的因式。

【範例】：請判別 $4x+1$ 是否為 $f(x)=8x^2-10x-3$ 的因式。

解　：

若 $4x+1$ 是 $f(x)=8x^2-10x-3$ 的因式，

則 $f(x)=8x^2-10x-3=(4x+1)g(x)$

$f(x)=8x^2-10x-3$

$\Rightarrow f(-\frac{1}{4})=8\times(-\frac{1}{4})^2-10\times(-\frac{1}{4})-3$

$=8\times\frac{1}{16}+\frac{5}{2}-3=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3=0$

所以 $4x+1$ 是 $f(x)=8x^2-10x-3$ 的因式。

（4）餘式定理：

假設 $f(x)$是 x 的多項式，c 是常數，則 $f(x)$除以$(x-c)$所得的餘式為 $f(c)$。

這個結果可以表示成：

$$f(x)=(x-c)\times g(x)+f(c)$$

例如：多項式$(x^2+4x+2)\div(x+1)=(x+3)\cdots(-1)$

可以表示成：$x^2+4x+2=(x+3)\times(x+1)+(-1)$

定理推論公式：

$f(x)\div(ax+b)\Rightarrow f(x)=(ax+b)\times$商式＋餘式

$\Rightarrow f(-\frac{b}{a})=(a\times(-\frac{b}{a})+b)\times$商式＋餘式＝餘式

若 $f(x)$為 x 的 n 次多項式，則 $f(x)$除以$(ax+b)$所得之餘式(數)為 $f(-\frac{b}{a})$。

【範例】：設 x^2-2x+k 以 $x+1$ 除之餘 6，求 k 之值。

解　：利用餘式定理：$f(x)=(x-c)\times g(x)+f(c)$

$f(x)=x^2-2x+k=(x+1)\times g(x)+6$

令 $x+1=0$，$x=-1$

代入 x^2-2x+k 得：$(-1)^2-2\times(-1)+k=6$

$1+2+k=6$

$k=3$　　答：$k=3$

【範例】：若 $x-1$ 能整除 $4x^3-3x^2+kx-5$，試求 k 之值。

解　：利用餘式定理：$f(x)=(x-c)\times g(x)+f(c)$

$f(x)=4x^3-3x^2+kx-5=(x-1)\times g(x)+0$

令 $x-1=0$，$x=1$

代入 $4x^3-3x^2+kx-5$

得：$4(1)^3-3(1)^2+k(1)-5=0$

$4-3+k-5=0$

$k=4$　　　　答：$k=4$

【範例】：若 $5x-3$ 能整除 $5x^3+kx^2-x-3$，試求 k 之值。

解　：利用餘式定理：$f(x)=(x-c)\times g(x)+f(c)$

$f(x)=5x^3+kx^2-x-3=(5x-3)\times g(x)+0$

令 $5x-3=0$，$x=\frac{3}{5}$ 代入 $5x^3+kx^2-x-3$

得：$5(\frac{3}{5})^3+k(\frac{3}{5})^2-\frac{3}{5}-3=0$

$\frac{27}{25}+\frac{9}{25}k-\frac{90}{25}=0$

$\frac{9}{25}k=\frac{90}{25}-\frac{27}{25}=\frac{63}{25}$

$\therefore$ $k=7$　　　　答：$k=7$

【範例】：設 $x^3+mx^2+nx-12$ 能被 $x-2$ 整除，若以 $x-1$ 除之則餘 -4，試求：

(1)m＋n 之值；（2）以 $2x-1$ 除之的餘式為何?

解　：(1) $\because$ $x^3+mx^2+nx-12$ 能被 $x-2$ 整除

$\therefore$ $8+4m+2n-12=0$ $\Rightarrow$ $2m+n=2$……①

$\because$ 以 $x-1$ 除之則餘 -4

$\therefore$ $1+m+n-12=-4$ $\Rightarrow$ $m+n=7$……②

將①－②得到　$m=-5$　$\therefore$　$m=-5$ 代入②得到 $n=12$

$\therefore$ $m+n=-5+12=7$

(2) $\therefore$ 令 $f(x)=x^3-5x^2+12x-12$，

利用因式定理 $f(x)=x^3-5x^2+12x-12=(2x-1)\times g(x)$

所以令 $x=\frac{1}{2}$ 代入：

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-5\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{2}-12=-\frac{57}{8}$

答：(1) $m+n=7$　(2) 餘式為 $-\frac{57}{8}$。

（5）因式與倍式的應用：

【範例】：設 $x-3$ 為 $3x^2-8x+a$ 的因式，試求常數 a 值？

解　：令 $f(x)=3x^2-8x+a$，

因為 $x-3$ 為 $3x^2-8x+a$ 的因式，

利用因式定理 $f(x)=3x^2-8x+a=(x-3)\times g(x)$

所以令 $x=3$ 代入：

$f(3)=3\times3^2-8\times3+a=0$

$\Rightarrow\ 27-24+a=0$

$\Rightarrow\ a=-3$

答：$a=-3$

【範例】：若 $3x^2-4x+b$ 為 $3x^3-7x^2+ax-2$ 的因式，試求 a、b 值？

解　：

因為 $3x^2-4x+b$ 為 $3x^3-7x^2+ax-2$ 的因式，

所以 $(3x^3-7x^2+ax-2)\div(3x^2-4x+b)=0$

$$
\begin{array}{rllll}
 & & & x & -1\\ \cline{2-5}
3x^2-4x+b \big) & 3x^3 & -7x^2 & +ax & -2\\
 & 3x^3 & -4x^2 & +bx & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +(a-b)x & -2\\
 & & -3x^2 & +4x & -b\\ \cline{2-5}
 & & & (a-b-4)x & -2+b
\end{array}
$$

$$0$$

利用除法計算得到的餘式：$(a-b-4)x-2+b=0$

所以先令 $-2+b=0$，則 $b=2$。

令 $(a-b-4)=0$，$b=2$ 代入

$a-2-4=0$，則 $a=6$

答：$a=6$，$b=2$

小 試 身 手

【例題一】

(1)試用除法判別 $x-2$ 是不是 $x^2+8x-20$ 的因式？

(2)試用除法判別 $2x-3$ 是不是 $4x^3+4x^2-9x-9$ 的因式？

解：

【練習一】

(1)試用除法判別 $3x^2+2$ 是不是 $9x^4-3x^2-2x+8$ 的因式?

(2)試用除法判別 $x-4$ 是不是 x^3-6x^2-x+36 的因式?

解：

【例題二】

(1)試用除法判別 $x^2+8x-20$ 是不是 $x-22$ 的倍式？

(2)試用除法判別 $x^3-4x-60$ 是不是 $x+6$ 的倍式？

解：

【練習二】

(1)試用除法判別 x^3+2x+8 是不是 $x-4$ 的倍式?

(2)試用除法判別 $4x^4+3x^3-10x^2-9x-6$ 是不是 x^2-3 的倍式?

解：

【例題三】

(1)設 $x+1$ 為 $2x^2-x+a$ 的因式，試求常數 a 值？

(2)設 $x-2$ 為 $2x^2+ax+6$ 的因式，試求 a 值？

解：

【練習三】

(1)若 $x-2$ 為 x^2-x+m 的因式，則 m＝__________。

(2)若 $x-1$ 與 $x+2$ 為 x^3-ax^2+bx+6 的因式，則 a＝_________，b＝_________。

解：

【例題四】

若 x^2-2x+b 為 $3x^3-2x^2+ax+12$ 的因式，試求 a、b 值？

解：

【練習四】

設 x^3+mx^2+nx+5 能被 $x+1$ 整除，若以 $x-2$ 除之則餘 -9，試求：

（1） m＋n 之值； （2）以 $x-1$ 除之的餘式為何?

解：

【例題五】

請判斷多項式 $5x^4+3x^3-4x^2+6x+9$ 是否為 x^2+1 的倍式？

解：

【練習五】

請判斷多項式 $6x^4+4x^3+3x^2-2x-3$ 是否為 $2x^2-1$ 的倍式？

解：

提公因式法因式分解

因式分解其實就像質因數分解一樣，質因數分解是將一個大數分解成多個質因數的連乘積，例如：$24=2^3\times3$。而因式分解是將多項式分解成若干個多項式的連乘積，例如：$x^3+4x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$。此目的在於，方便我們求出方程式的解(根)。

提公因式

1. 從各項提公因式：

如果發現每一項都有共同的因式(數)時，我們可先將此公因式提出。

【範例】：因式分解下列多項式：(1) x^2+5x　(2) $(a-b)^2-2(a-b)$　(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3$

解：(1) $x^2+5x=x\cdot x+5x=x(x+5)$

(2) $(a-b)^2-2(a-b)=(a-b)(a-b)-2(a-b)$
$=(a-b)[(a-b)-2]$
$=(a-b)(a-b-2)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3=(x-2y)^2-(x-2y)^3$
$=(x-2y)^2[1-(x-2y)]$
$=(x-2y)^2(1-x+2y)$

【範例】：因式分解下列多項式：

(1) $3x^3+2x^2$　(2) $10x^4-6x^3$　(3) $6ax^3-15ax^2$

解：(1) $3x^3+2x^2=x^2(3x+2)$

(2) $10x^4-6x^3=2(5x^4-3x^3)$
$=2x^3(5x-3)$

(3) $6ax^3-15ax^2=3a(2x^3-5x^2)$
$=3ax^2(2x-5)$

2. 分組提公因式：當各項沒有公因式時，可嘗試重新分組，再觀察每組之間是否有公因式。

【範例】：因式分解多項式 x^3+x^2+x+1。

解：方法一：$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)$
$=(x+1)(x^2+1)$

方法二：$x^3+x^2+x+1=x^3+x+x^2+1$
$=x(x^2+1)+(x^2+1)$
$=(x+1)(x^2+1)$

【範例】：因式分解多項式 $2xy+5x+4y+10$。

解　：方法一：$2xy+5x+4y+10=(2xy+5x)+(4y+10)$

$=x(2y+5)+2(2y+5)$

$=(x+2)(2y+5)$

方法二：$2xy+5x+4y+10=(2xy+4y)+(5x+10)$（交換律）

$=2y(x+2)+5(x+2)$

$=(x+2)(2y+5)$

【範例】：因式分解多項式 $2ax^2-3x+2ax-3$。

解　：方法一：$2ax^2-3x+2ax-3=(2ax^2-3x)+2ax-3$

$=x(2ax-3)+2ax-3$

$=(2ax-3)(x+1)$

方法二：$2ax^2-3x+2ax-3=2ax^2+2ax-3x-3$

$=2ax(x+1)-3(x+1)$

$=(x+1)(2ax-3)$

【範例】：因式分解多項式 $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$。

解　：可嘗試展開後，再做分組。

$xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)=xy+xyz^2+zx^2+zy^2$

$=(xy+zx^2)(xyz^2+zy^2)$

$=x(y+zx)+yz(xz+y)$

$=x(y+zx)+yz(y+zx)$

$=(y+zx)(x+yz)$

【範例】：因式分解多項式 $27x^3-9x^2+3x-1$。

解　：方法一：$27x^3-9x^2+3x-1=(27x^3-9x^2)+(3x-1)$

$=9x^2(3x-1)+(3x-1)$

$=(3x-1)(9x^2+1)$

方法二：$27x^3-9x^2+3x-1=(27x^3+3x)-(9x^2+1)$

$=3x(9x^2+1)-(9x^2+1)$

$=(3x-1)(9x^2+1)$

【範例】：因式分解多項式 $12x^2-3a^2x-4xy+a^2y$。

解　：方法一：$12x^2-3a^2x-4xy+a^2y=(12x^2-3a^2x)-(4xy-a^2y)$

$=3x(4x-a^2)-y(4x-a^2)$

$=(4x-a^2)(3x-y)$

方法二：$12x^2-3a^2x-4xy+a^2y=12x^2-4xy-3a^2x+a^2y$

$=4x(3x-y)-a^2(3x-y)$

$=(4x-a^2)(3x-y)$

【範例】：因式分解多項式 $(x-2)a-(a^2-2x)$。

解：方法一：$(x-2)a-(a^2-2x)=ax-2a-a^2+2x$

$=(ax-a^2)+(2x-2a)$

$=a(x-a)+2(x-a)$

$=(x-a)(a+2)$

方法二：$(x-2)a-(a^2-2x)=ax-2a-a^2+2x$

$=(ax+2x)-(2a+a^2)$

$=x(a+2)-a(2+a)$

$=(x-a)(a+2)$

【範例】：因式分解多項式 $x^2-ax+bx-ab$。

解：方法一：$x^2-ax+bx-ab=(x^2-ax)+(bx-ab)$

$=x(x-a)+b(x-a)$

$=(x-a)(x+b)$

方法二：$x^2-ax+bx-ab=(x^2+bx)-(ax+ab)$

$=x(x+b)-a(x+b)$

$=(x-a)(x+b)$

注意：從上面的例子我們可以看出，可能有不只一種分組的方式來進行因式分解。

3. **拆項後分組提公因式**：有時候，可嘗試先將某一項拆開後，再利用分組提公因式。

【範例】：因式分解多項式 x^2+3x+2。

解：將多項式中 $3x$ 改寫成 $x+2x$

$x^2+3x+2=x^2+x+2x+2$

$=(x^2+x)+(2x+2)$

$=x(x+1)+2(x+1)$

$=(x+1)(x+2)$

【範例】：因式分解多項式 x^3+2x^2+2x+1。

解：將多項式中 $2x^2$ 改寫成 x^2+x^2，$2x$ 改寫成 $x+x$。

$x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+x+x+1$

$=(x^3+x^2)+(x^2+x)+(x+1)$

$=x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(x^2+x+1)$

【範例】：因式分解多項式 $x^4-x^3+2x^2-x+1$。

解　：將多項式中 $2x^2$ 改寫成 x^2+x^2。

$$\begin{aligned}x^4-x^3+2x^2-x+1&=x^4-x^3+x^2+x^2-x+1\\&=(x^4-x^3+x^2)+(x^2-x+1)\\&=x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)\\&=(x^2-x+1)(x^2+1)\end{aligned}$$

【範例】：因式分解多項式 $x^4+x^3+2x^2+x+1$。

解　：將多項式中 $2x^2$ 改寫成 x^2+x^2。

$$\begin{aligned}x^4+x^3+2x^2+x+1&=x^4+x^3+x^2+x^2+x+1\\&=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\&=(x^2+x+1)(x^2+1)\end{aligned}$$

【範例】：因式分解多項式 $x^4+3x^3+x^2-3x-2$。

解　：將多項式中 x^2 改寫成 $2x^2-x^2$。

$$\begin{aligned}x^4+3x^3+x^2-3x-2&=x^4+3x^3+2x^2-x^2-3x-2\\&=x^2(x^2+3x+2)-(x^2+3x+2)\\&=(x^2+3x+2)(x^2-1)\\&=(x+1)(x+2)(x-1)(x+1)\\&=(x+1)^2(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

事實上，此範例也可用分組的方式來因式分解：

$$\begin{aligned}x^4+3x^3+x^2-3x-2&=(x^4+x^2+2)+(3x^3-3x)\\&=(x^2-1)(x^2+2)+3x(x^2-1)\\&=(x^2-1)(x^2+3x+2)\\&=(x-1)(x+1)(x+1)(x+2)\\&=(x+1)^2(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

小 試 身 手

【例題一】《提出公因式》

因式分解下列多項式：

(1) $6x^2+5x$　(2) $ax+ab$　(3) $2x^2-x$

(4) $3x^2-9ax+15x$　(5) $ax+bx$　(6) $-3ax+6ay-12a$

解：

【練習一】《提出公因式》

因式分解下列多項式：

(1) x^2-5x　(2) $(x+5)(x-5)-(x-5)$

(3) $4a^4b-7a^2b^3+5a^3b^2$　(4) $a(x-2)-(x^2-2x)$

(5) $(a-b)^2-6a+6b$　(6) $x^2+ax+bx+ab$

解：

【例題二】《分組提出公因式》

（1）因式分解 $a(x-y)-b(y-x)$　　（2）因式分解 $xy-2y+2x-y^2$

（3）因式分解 $4a^2+3b-3ab-4a$

解：

【練習二】《分組提出公因式》

（1）因式分解 x^3-2x^2-3x+6　　（2）因式分解 $a^3x-ax-a^2+1$

（3）因式分解 $\frac{1}{6}axy+\frac{1}{2}a^2y-\frac{1}{4}a^2b-\frac{1}{12}abx$

解：

【例題三】《先去括號再分組提出公因式》

（1）因式分解 $(a-b)x-(x^2-ab)$　　（2）因式分解 $(3xy-4)-2(x-3y)$

解：

【練習三】《先去括號再分組提出公因式》

（1）因式分解 $2x^2-(a-2b)x-ab$　　（2）因式分解 $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$

解：

【例題四】《先拆項再分組提出公因式》

因式分解 $x^4+x^3+2x^2+x+1$。

解：

【練習四】《先拆項再分組提出公因式》

因式分解 $x^4-x^3-3x^2+4x-4$。

解：

【例題五】《先變號再提出公因式》

（1）因式分解（m－n）$(x-y)-c$（n－m）$(x-y)$

（2）因式分解 $(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$

（3）因式分解 $5b(a-b)-(b-a)^2$

解：

【練習五】《按係數比例分組》

（1）因式分解 $3a^2-6ax-5ac-8bx+4ab+10cx$

（2）因式分解 $a^2-4ax+2ab+3ac-12cx-8bx$

解：

【例題六】

（1）因式分解$(3x+1)^2+6(3x+1)+9$

（2）因式分解$(3x+1)(x-2)-(2x-1)(x-2)$

解：

【練習六】

因式分解下列各式：

(1) $4a^2-9b^2$

(2) $5(2x-1)^2-3x(2x-1)$

(3) $(x+1)^3(x+2)-(x+1)(x+2)^3$

解：