

## ■ 利用乘法公式因式分解

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來做因式分解。

(1) 完全平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $a^2 + 2a + 1$  (2)  $x^2 - 10x + 25$

解：(1)  $a^2 + 2a + 1$   
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2$   
 $= (a+1)^2$

(2)  $x^2 - 10x + 25$   
 $= x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$   
 $= (x-5)^2$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $a^2 + 6a + 9$  (2)  $4x^2 - 20x + 25$

解：(1)  $a^2 + 6a + 9$   
 $= a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$   
 $= (a+3)^2$

(2)  $4x^2 - 20x + 25$   
 $= (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2$   
 $= (2x-5)^2$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $4x^2 - 12xy + 9y^2$  (2)  $4x^2 - 20x + 25$

解：(1)  $4x^2 - 12xy + 9y^2$   
 $= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$   
 $= (2x-3y)^2$

(2)  $(x+2y)^2 + 6(x+2y)(y-x) + 9(x-y)^2$   
 $= (x+2y)^2 - 2 \cdot (x+2y) \cdot 3(x-y) + [3(x-y)]^2$   
 $= [(x+2y) - 3(x-y)]^2$   
 $= (-2x+5y)^2$  或寫成  $(2x-5y)^2$

(2)平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $4x^2 - 9$  (2)  $x^4 - y^4$

$$\begin{aligned} \text{解} : (1) \quad & 4x^2 - 9 \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x-3)(2x+3) \\ (2) \quad & x^4 - y^4 \\ &= (x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ &= (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $x^2 - 16$  (2)  $4x^2 - 25y$

$$\begin{aligned} \text{解} : (1) \quad & x^2 - 16 \\ &= x^2 - 4^2 \\ &= (x-4)(x+4) \\ (2) \quad & 4x^2 - 25y \\ &= (2x)^2 - (5y)^2 \\ &= (2x-5y)(2x+5y) \end{aligned}$$

【範例】：因式分解下列各式：

$$(1) x^2 - (x+2y)^2 \quad (2) 9 - (a+2)^2 \quad (3) x^2 - y^2 + 2yz - z^2$$

$$\begin{aligned} \text{解} : (1) \quad & x^2 - (x+2y)^2 = [x+(x+2y)][x-(x+2y)] \\ &= (2x+2y)(x-x-2y) \\ &= 2(x+y)(-2y) \\ &= -4y(x+y) \\ (2) \quad & 9 - (a+2)^2 = 3^2 - (a+2)^2 \\ &= [3+(a+2)][3-(a+2)] \\ &= (3+a+2)(3-a-2) \\ &= (a+5)(1-a) \\ (3) \quad & x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= x^2 - (y-z)^2 \\ &= [x+(y-z)][x-(y-z)] \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

(3)立方和、立方差公式： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$   
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $x^3 - 1$  (2)  $a^3 + 8b^3$  (3)  $x^6 - 1$

解：

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3 - 1 &= x^3 - 1^3 \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1^2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (2) \quad a^3 + 8b^3 &= a^3 + (2b)^3 \\ &= (a+2b)[a^2 - a \cdot 2b + (2b)^2] \\ &= (a+2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 \\ &= (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $8x^3 + 27$  (2)  $\frac{1}{27} - 8a^3$  (3)  $x^6 - y^6$

解：

$$\begin{aligned} (1) \quad 8x^3 + 27 &= (2x)^3 + 3^3 \\ &= (2x+3)[(2x)^2 - 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x+3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{27} - 8a^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - (2a)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right) \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2a + (2a)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right) \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ &= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

【範例】：因式分解下列各式：(1)  $8x^3 + 27$  (2)  $\frac{1}{27} - 8a^3$  (3)  $x^6 - y^6$

解：

$$\begin{aligned}(1) \quad & 8x^3 + 27 \\ &= (2x)^3 + 3^3 \\ &= (2x + 3)[(2x)^2 - 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & \frac{1}{27} - 8a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - (2a)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2a + (2a)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$



## 小 試 身 手

### 【例題一】《平方差公式》

因式分解下列多項式：

(1)  $x^2 - 81$                       (2)  $36 - 25x^2$

解：

### 【練習一】《平方差公式》

因式分解下列多項式：

(1)  $16x^2 - 49$                       (2)  $4a^2 - 9b^2$

解：

### 【例題二】《利用平方差公式求值》

求出下列各式的值：

(1)  $198^2 - 98^2$                       (2)  $40.8 \times 39.2$

解：

### 【練習二】《利用平方差公式求值》

求出下列各式的值：

(1)  $9 - 997^2$                       (2)  $59\frac{1}{3} \times 60\frac{2}{3}$

**【例題三】《利用平方差公式因式分解》**

因式分解下列多項式：

(1)  $9x^2 - 1$

(2)  $(3x - 5)^2 - (x + 1)^2$

(3)  $2(x^2 - y^2) - (x - y)$

解：

**【練習三】《利用平方差公式因式分解》**

因式分解下列多項式：

(1)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

(2)  $x(x + z) - y(y - z)$

(3)  $x^2(y - z) + y^2(z - x)$

解：

**【例題四】《利用完全平方公式因式分解》**

因式分解下列多項式：

(1)  $2xy^2 - y^3 - x^2y$

(2)  $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

解：

**【練習四】《利用完全平方公式因式分解》**

因式分解下列多項式：

(1)  $x^2 - xy - 2x + y + 1$

(2)  $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$

解：

**【例題五】**分解  $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$ 

解：

**【練習五】**分解  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ 

解：

**【例題六】**若  $2a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 8b - 10c + 59 = 0$ ，求  $2a + 3b + 4c$  為多少？

解：

**【練習六】**設  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ ， $ab + bc + ac = 1$ ，求  $a + b + c$  之值。

解：

**【例題七】《利用乘法公式求值》**若  $a - b = 4$ ， $ab = -3$ ，求：(1)  $a^2 + b^2$  之值    (2)  $a + b$  之值    (3)  $a^4 + b^4$  之值    (4)  $a^4 - b^4$  之值。

解：

**【練習七】《利用乘法公式求值》**

若  $a-b=8$ ， $ab=20$ ，求：

(1)  $a^2+b^2$  之值    (2)  $a+b$  之值    (3)  $a^4+b^4$  之值    (4)  $a^4-b^4$  之值。

解：

**【例題八】《利用乘法公式求值》**

(1)  $12^3+8^3$

(2)  $7^3-5^3$

解：

**【練習八】《利用乘法公式求值》**

(1)  $7^3+3^3$

(2)  $6^3-14^3$

解：