

一元二次方程式

因式分解法解一元二次方程式

1. 一元二次方程式的定義：

(1) 一元二次方程式：

當一個方程式只有一個未知數，而此未知數的最高次數為 2 時，我們把它叫做一元二次方程式。

例如： $f(x) = x^2 + 3x + 2$ 為一元二次式，(一元二次多項式)

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$ 為一元二次方程式。

【範例】： $x^2 + 2x + 1 = 0$ ， $-3x^2 + 11x = 6$ ， $2x^2 = 5x$ ，這些都是一元二次方程式。

【補充】： $x^3 + 2x - 3 = 0$ ……一元三次方程式，

$x^2 + y^2 + 2x - y + 9 = 0$ ……二元二次方程式。

(2) 一元二次方程式的標準式：

$ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a \neq 0$ 。

(3) 解(根)：

若 $x = x_0$ 代入一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，滿足 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ ，

則稱 $x = x_0$ 為此一元二次方程式的根。

【範例】：對於一元二次方程式 $x^2 - 2x - 8 = 0$ ，

將 $x = 4$ 代入原方程式得 $4^2 - 2 \times 4 - 8 = 0$ ，故 $x = 4$ 為此方程式的根。

將 $x = -2$ 代入原方程式 $(-2)^2 - 2 \times (-2) - 8 = 0$ ，故 $x = -2$ 為此方程式的根。

在此 $x = 4$ 或 $x = -2$ 都為此方程式 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 之解或根。

(4) 一元二次方程式的次數與根的個數之關係：

一元一次多項式有一個根；一元二次多項式有兩個根；一元三次多項式有三個根；一般而言，一元 n 次多項式會有 n 個根。也就是說，多項式的根的個數會與多項式的次數相同。

【範例】： $x + 2 = 0$ 為一元一次方程式，有一個解或稱有一個根。

【範例】： $x^2 - 3x + 2 = 0$ 為一元二次方程式，將其分解成兩個一次式的乘積，

$(x - 2)(x - 1) = 0$ ，則其解為 $x = 1$ 或 $x = 2$ ，

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$ 有兩個解或稱有兩個根。

【範例】： $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 為一元三次方程式，將其分解成三個一次式的乘積，

$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ ，則其解為 $x = 1, 2, 3$ 。

$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 有三個解或稱有三個根。

(5) 解一元二次方程式的法則：

設法將一元二次式改寫為兩個一元一次式的乘積。

【範例】：如果將 $x^2 + x - 6 = 0$ 改寫為 $(x - 2)(x + 3) = 0$ ，

則 $(x - 2) = 0$ 或 $(x + 3) = 0$ ， $\therefore x = 2$ 或 $x = -3$ 。

2. 一元二次方程式的解題步驟：

a. 移項：先把式中各項移到等號左邊，使等號右邊為 0，並且合併同類項
化成標準式： $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)。

b. 將多項式分解：等號左邊的二次式分解成兩個一次因式的乘積。

例如： $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 。

c. 再令兩個一次因式分別等於 0，即可解得 $x = \alpha$ 及 $x = \beta$ 。

【範例】：求出方程式 $x^2 + x = 6$ 的解。

解： $\therefore x^2 + x - 6 = 0$

$\therefore (x - 2)(x + 3) = 0$ ，則 $x - 2 = 0$ 或 $x + 3 = 0$

$\therefore x = 2$ 或 -3 。

【範例】：求出方程式 $2x^2 + 5x = 3x^2 - x - 2$ 的解。

解： $\therefore 5x^2 + 4x = 3x^2 - x - 2$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 3x^2 + x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\therefore (x + 2)(2x + 1) = 0$ ，則 $x + 2 = 0$ 或 $2x + 1 = 0$ 。

$\therefore x = -2$ 或 $-\frac{1}{2}$ 。

【範例】：求出方程式 $15x^2 - x - 2 = 0$ 的解。

解： $\therefore (5x - 2)(3x + 1) = 0$ ，則 $5x - 2 = 0$ 或 $3x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{2}{5}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 。

3. 在上面的步驟中，可能發生的情況：

(1) 若 $c = 0$ ，標準式 $ax^2 + bx + c = 0$ 改寫為 $x(ax + b) = 0$ ：

$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$

\therefore 解為 $x = 0$ 或 $x = -\frac{b}{a}$ 。

【範例】：解方程式： $2x^2 - 5x = 0$ 。

解： $2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0$

\therefore 解為 $x = 0$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 。

【範例】：解方程式： $4x^2 + 6x = 0$ 。

$$\text{解} : 4x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x + 3) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{3}{2}。$$

【範例】：解方程式： $-3x^2 + 6x = 0$ 。

$$\text{解} : -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = 2。$$

【範例】：解方程式： $5x^2 + 20x = 0$ 。

$$\text{解} : 5x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 5x(x + 4) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = -4。$$

(2) 若 $b = 0$ ，標準式 $ax^2 + bx + c = 0$ 改寫為 $ax^2 + c = 0$ ：

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}，$$

$$\text{如果 } -\frac{c}{a} > 0，\text{則解為 } x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}。$$

$$\text{如果 } -\frac{c}{a} < 0，\text{則 } x \text{ 為無實數解。}$$

【範例】：解方程式： $4x^2 - 9 = 0$ 。

$$\text{解} : 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

【範例】：解方程式： $9x^2 - 4 = 0$ 。

$$\text{解} : 9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

【範例】：解方程式： $(2x - 3)^2 - 16 = 0$ 。

$$\text{解} : (2x - 3)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = \pm 4$$

$$\therefore \text{當 } 2x - 3 = 4 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\text{當 } 2x - 3 = -4 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{答：} x = \frac{7}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

【範例】：解方程式： $(3x-1)^2 - 25 = 0$ 。

$$\begin{aligned}\text{解} : (3x-1)^2 - 25 &\Rightarrow (3x-1)^2 = 25 \\ &\Rightarrow 3x-1 = \pm 5\end{aligned}$$

$$\therefore \text{當 } 3x-1=5 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

$$\text{當 } 3x-1=-5 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

$$\text{答： } x=2 \text{ 或 } -\frac{4}{3}$$

【範例】：解方程式： $x^2 + 4 = 0$ 。

$$\text{解} : x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$$

$\therefore x^2$ 的值一定為正， \therefore 此題無實數解。

(3) 若 $b \neq 0$ 、 $c \neq 0$ ，則 $ax^2 + bx + c = 0$ ：

可以用以前學過的十字交乘法，先將方程式因式分解之後求解。

【範例】： $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$ ， $\therefore x = -2, -3$ 。

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0, \therefore x = 2, -3。$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0, \therefore x = -2, 3。$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0, \therefore x = 2, 3。$$

【範例】：解方程式： $x^2 + 6x + 8 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +2 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x \quad \quad \quad +4 \\ \hline 2x + 4x = 6x \end{array}$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } -4。$$

【範例】：解方程式： $x^2 - x - 12 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +3 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ x \quad \quad \quad -4 \\ \hline 3x - 4x = -x \end{array}$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } 4。$$

【範例】：解方程式： $x^2 + 3x - 10 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -2 \\ x \quad \quad \quad +5 \\ \hline -2x + 5x = 3x \end{array}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } -5。$$

【範例】：解方程式： $x^2 - 9x + 20 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -4 \\ x \quad \quad \quad -5 \\ \hline -4x - 5x = -9x \end{array}$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } 5。$$

【範例】：解方程式： $2x^2 + 7x + 6 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad \quad +3 \\ x \quad \quad \quad +2 \\ \hline 3x + 4x = 7x \end{array}$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } -2。$$

【範例】：解方程式： $3x^2 + 5x - 12 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +3 \\ 3x \quad \quad \quad -4 \\ \hline 9x - 4x = 5x \end{array}$$

$$3x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(3x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } \frac{4}{3}。$$

【範例】：解方程式： $5x^2 - 6x - 8 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 5x \quad \quad \quad + 4 \\ x \quad \quad \quad \quad - 2 \\ \hline 4x - 10x = -6x \end{array}$$

$$5x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(5x+4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } -\frac{4}{5}。$$

【範例】：解方程式： $6x^2 - 11x + 4 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad \quad - 1 \\ 3x \quad \quad \quad \quad - 4 \\ \hline -3x - 8x = -11x \end{array}$$

$$6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow (2x-1)(3x-4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{4}{3}。$$



小 試 身 手

【例題一】

解下列各方程式的解。

(1) $6x^2 - 4x = 0$

(2) $9x^2 = 4x$

(3) $x^2 + 4x = 0$

解：

【練習一】

解下列各方程式的解。

(1) $16x^2 - 8x = 0$

(2) $10x^2 = -6x$

(3) $2x^2 + 8x = 0$

解：

【例題二】

解下列各方程式的解。

(1) $25x^2 - 4 = 0$

(2) $3x^2 = 27$

(3) $x^2 - 9 = 0$

解：

【練習二】

解下列各方程式的解。

(1) $4x^2 - 9 = 0$

(2) $x^2 = 16$

(3) $2x^2 - 8 = 0$

解：

【例題三】

解下列各方程式的解。

(1) $5x(2x+5)-4(2x+5)=0$

(2) $3x(x-3)-4(x-3)=0$

解：

【練習三】

解下列各方程式的解。

(1) $(x-5)^2=4(x-5)$

(2) $(x+1)+4x(x+1)=0$

解：

【例題四】

解下列各方程式的解。

(1) $x^2+3x-4=0$

(2) $2x^2-3x=5$

(3) $6x^2+7x-3=0$

(4) $12x^2-23x=24$

解：

【練習四】

解下列各方程式的解。

(1) $3x^2+18x+27=0$

(2) $2x^2-5x=-2$

(3) $15x^2-x-2=0$

(4) $3x^2-9x-14=0$

解：

【例題五】

解下列各方程式：

(1) $3x^2 - 4x - 1 = -9x - 3$ 。

(2) $(x+5)(x+3) = 8$ 。

(3) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 1 = 0$ 。

解：

【練習五】

解下列各方程式：

(1) $2x^2 = 5x$ 。

(2) $(x-3)(x-4) = 20$ 。

(3) $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}x)$ 。

解：

【例題六】

解下列各一元二次方程式：

(1) $(12x-5)^2 - (11x-4)^2 = 0$ 。

(2) $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 110$ 。

(3) $7(x-1)^2 + 10(x-1)(x+4) - 8(x+4)^2 = 0$ 。

解：

【練習六】

解下列各一元二次方程式：

(1) $(7x-3)^2 - (5x-9)^2 = 0$ 。

(2) $x^2 - (x-2)^2 = (x-4)^2$ 。

(3) $5(x+2)^2 - 7(x+2)(x-3) - 6(x-3)^2 = 0$ 。

解：

【例題七】

解下列各一元二次方程式：

(1) $(2x^2 - x)^2 + 4(x - 2x^2) + 3 = 0$ 。

(2) $(x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x - 5) - 35 = 0$ 。

(3) $(2x^2 + 3x)^2 - 8(2x^2 + 3x) - 9 = 0$ 。

解：

【練習七】

解下列各一元二次方程式：

(1) $(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 2 = 0$ 。

(2) $(2x^2 - 3x)^2 - 8(2x^2 - 3x) - 9 = 0$

(3) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$ 。

解：

【例題八】

(1) 解 $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

(2) $(x - 2)^2 - 3|x - 2| - 10 = 0$

解：

【練習八】

(1) 解 $x^2 + |x| - 12 = 0$

(2) $2(2x + 1)^2 - 4|2x + 1| - 48 = 0$

解：

【例題九】

- (1) 求以 3, 5 為二根之一元二次方程式。
 (2) 設 $x^2+px+q=0$ 之二根為 3, -2,
 求 p 、 q 之值。

解：

【練習九】

- (1) 求以 -3, -5 為二根之一元二次方程式。
 (2) 設 $x^2+bx+c=0$ 之二根為 -3, 5,
 求以 b 、 c 為二根為之一元二次方程式。

解：

【例題十】

設 1 為 $x^2+ax+2=0$ 之一根，且 a 、 b 是
 $x^2+5x+c=0$ 之兩根，求 $3a+2b+c$ 之值。

解：

【練習十】

設 2 為 $x^2-4x+p=0$ 之一根，且 p 為
 $qx^2+(p-2)x+2p=0$ 之一根，

求(1) p 、 q 之值。

(2) 以 p 、 q 為二根為之一元二次方程式。

解：

【例題十一】

甲、乙兩生同解一個 x^2 項係數是 1 的二次方程式，甲將一次項 x 的係數看錯，解得兩根為 2 與 7，乙將常數項看錯，解得兩根為 1、-10，若此外無其他的錯誤，求正確的方程式及兩根。

解：

【練習十一】

甲、乙兩生同解一個 x^2 項係數是 1 的二次方程式，甲將一次項 x 的係數看錯，解得兩根為 3 與 -6，乙將常數項看錯，解得兩根為 3、4，若此外無其他的錯誤，求正確的方程式及兩根。

解：

【例題十二】

設 x 、 y 均不為零，且 $2x^2 - xy - 3y^2 = 0$ ，
求 $x : y$ 的比值。

解：

【練習十二】

設 x 、 y 均不為零，且 $4x^2 - 8xy - 5y^2 = 0$ ，
求 $x : y$ 的比值。

解：