數列與級數

數量的樣式與規律

I. 數量關係：

1. 奇數與偶數的關係

a. 兩個連續整數必有一個奇數與一個偶數，它們之間的差為 1。

b. 奇數與偶數的一般化(或形式化)。

偶數：因為偶數都是 2 的倍數，而 2 的 n 倍即為 $2\times n$，故記為 $2n$，
n 表所有整數；所以 $2n$ 可為偶數的一般式。

【範例】$4=2\times2$，$6=2\times3$，$8=2\times4$，$10=2\times5$...
因此可推得所有偶數皆可記為：$2n=2\times n$，
其中 n 為大於 1 之整數。

奇數：因為奇數都是 2 的倍數減 1，而 2 的 n 倍減 1，故記為 $2n-1$，
n 表所有整數；所以 $2n-1$ 可為奇數的一般式。

【範例】$3=2\times2-1$，$5=2\times3-1$，$7=2\times4-1$，$9=2\times5-1$...
因此可推得所有奇數皆可記為：$2n-1=2\times n-1$，
其中 n 為大於 1 之整數。

2. 兩數量間的關係

同種類的連續兩數間會有某種不變的關係或規律。

【範例 1】父子和兄弟間的年齡差距永遠不變。

【範例 2】台灣的街道號碼必定是一邊為連續奇數，另一邊為連續偶數。

3. 由數字方陣中觀察數的關係

數字方陣中，直排稱為行，橫排稱為列，可尋找同一列、同一行或
對角線上各數間的關係。

【範例】$\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$

如上之數字方陣中，直排的數字彼此差 1；
左下到右上對角線的數次彼此差 2；
橫排的數字彼此差 3；
左上到右下對角線的數字彼此差 4。

小 試 身 手

【例題 1】

如果奇數 1、3、5、7、9…的第 k 個數寫為 $2k-1$，那麼偶數 2、4、6、8、10、Λ 的第 k 個數寫為多少?

【例題 2】

一	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
二	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
三	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

某郵局內 30 個信箱號碼排列如上圖：

(1) 第三列第 n 個信箱是幾號?

(2) 第二列第 n 個信箱是幾號?

(3) 第一列第 n 個信箱是幾號?

【例題 3】

下圖為亞利安星球的月曆，任意取其中 2×2 的數字方陣，回答下列各題：

日	一	二	三	四	五	六	七	八	九
		1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
39	40								

(1) 在 2×2 的方框內，每一行的數字和有何關係?

(2) 在 2×2 的方框內，每一列的數字和有何關係?

(3) 在 2×2 的方框內，兩對角線的數字和有何關係?

【練習 1】

如果奇數 3、5、7、9…的第 k 個數寫為 $2k+1$，那麼偶數 4、6、8、10、Λ 的第 k 個數寫為多少?

【練習 2】

一	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
二	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
三	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

某郵局內 30 個信箱號碼排列如上圖：

(1) 第三列第 $n+1$ 個信箱是幾號?

(2) 第二列第 $n+1$ 個信箱是幾號?

(3) 第一列第 $n+1$ 個信箱是幾號?

【練習 3】

下圖為那美克星球的月曆，任意取其中 2×2 的數字方陣，回答下列各題：

日	一	二	三	四	五	六	七	八	九
			1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40							

(1) 在 2×2 的方框內，每一行的數字和有何關係?

(2) 在 2×2 的方框內，每一列的數字和有何關係?

(3) 在 2×2 的方框內，兩對角線的數字和有何關係?

Ⅱ. 數列與級數：

1. 數列

a. 將一些(通常為有限個)數(可重複的)依序排成一列，稱為(有限)數列。

【範例】以下數列:

$\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$

$\{0，2，4，6，8，10，12，14，16，18，20\}$

$\{1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23\}$

$\{-4，-1，2，5，8，11，14，17，20，23\}$

$\{1，-1，1，-1，1，-1，\Lambda，1，-1\}$

$\{-4，-1，2，5，8，11，14，17，20，23\}$

$\{1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89\}$

$\{-1，1，3，5，7，9，11，13\}$

$\{-1，1，3，5，7，9，11，13\}$

$\{\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\frac{1}{16}，\frac{1}{32}，\frac{1}{64}，\frac{1}{128}\}$

$\{\frac{1}{2}，-\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，-\frac{1}{16}，\frac{1}{32}，-\frac{1}{64}，\frac{1}{128}\}$

仔細觀察這些數列，是否可以找出各數列有其規律性。

注意：一般數列不一定都有規則性可循，皆必須透過觀察其數列中的數字變化才可推論出是否有規則可循。

b. 在一數列中，每一個數稱為項；稱第一個數為第一項或首項(通常記為 a_1)，第二個數為第二項(通常記為 a_2)，Λ 。

當數列為有限項時，最後一個數為末項。

【範例】在數列$\{20，30，40，50，60，70\}$中，首項為 20，第二項為 30，末項為 70。

2. 等差數列

定義：如果在相鄰兩項的後面的項減去前面的項，所得的差都是一樣，就稱此數列為等差數列，並稱所得的差為公差。通常以 d 代表公差，a_1 代表首項，a_n 代表第 n 項。

【範例】數列$\{20，30，40，50，60，70\}$，公差為 $30-20=10$ 。

$$20 \xrightarrow[10]{} 30 \xrightarrow[10]{} 40 \xrightarrow[10]{} 50 \xrightarrow[10]{} 60 \xrightarrow[10]{} 70$$

因為後面的項減去前面的項所得的差都是10，所以這是一個公差為10的等差數列。

則 $a_4 = 20+10+10+10 = 20+3\times 10$

【公式】(1) 設等差數列的首項是a_1，公差是d，第n項是a_n，

則第n項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$。

【範例】有一等差數列$\{-4，-1，2，5，8，11\}$，公差$=-1-(-4)=3$

，$a_1=-4$、$a_2=-1$、$a_3=2$、$a_4=5$、$a_5=8$、$a_6=11$。

則 $a_5 = a_1+(5-1)d = -4+(5-1)\cdot 3 = -4+12 = 8$

則 $a_6 = a_1+(6-1)d = -4+(6-1)\cdot 3 = -4+15 = 11$

(2) 若a、b、c三數成等差數列，則b叫做a與c的等差中項

或算術中項 $\Rightarrow$ $b=\dfrac{a+c}{2}$(或$a+c=2b$)。

【範例】有一等差數列$\{12，16，20\}$，公差為$16-12=4$，

則等差中項$16=\dfrac{12+20}{2}$。

【範例 1】有一等差數列，其首項為 20，公差為 10，則

$a_6 = 20+10+10+10+10+10 = 20+5\times 10$

$= 20+(6-1)\times 10 = a_1+(6-1)\cdot d$

【範例 2】數列$\{2，5，8，11，14，17\}$，其首項為 2，公差為$5-2=3$，

則求第 6 項之求法為：$a_6 = 2+(6-1)\times 3 = 17$。

【範例 3】數列$\{3，6，9\}$，其等差中項 6 之求法為：$\dfrac{3+9}{2}=6$。

【類題練習】 在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1) 5，8，_____，_____。

(2) 3，-1，_____，_____。

(3) 5，_____，11，_____，_____。

(4) -2，-9，_____，_____。

(5) $\frac{3}{4}$，_____，$1\frac{3}{4}$，_____。

(6) 6，_____，_____，_____，21。

3. 等差級數

問題：一等差數列為{ a_1，a_2，a_3，Λ ，a_{n-1}，a_n }，我們是否可以利用等差數列的規則性或公式來算出此數列的總和呢?

意義:將一個等差數列的每一項依次用”＋”號連接,稱為一個等差級數。

【公式】若等差級數之項數為n，首項為a_1，公差為d，前n項的和為S_n，則:

(1) $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ …… 已知首項、項數、末項時使用(梯形公式)。

公式推導: 如果一個等差級數共有n項，其首項為a_1，末項為a_n，公差是d，則這各的等差級數的和通常以S_n表示，即:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\Lambda+a_n$$

由 $S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\Lambda+[a_1+(n-1)d]$ (1)

將(1)式等號右邊各項的順序重新排列成為:

$S_n=[a_1+(n-1)d]+\Lambda+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1$ (2)

再將(1)、(2)兩式相加，即可得到:

$$2S_n=\underbrace{[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\Lambda+[2a_1+(n-1)d]}_{共n組}$$

$$2S_n=n[2a_1+(n-1)d]$$

$$\Rightarrow\ S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\qquad (\Theta\ a_n=a_1+(n-1)d)$$

$$\Rightarrow\ S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

【範例 1】已知一等差級數的首項為 3，第 20 項為 88，求前 20 項的和。

【解】$\because$ 首項 $a_1=3$，$a_{20}=88$，項數 $n=20$

$$\therefore S_n=\frac{20\times(3+88)}{2}=910$$

【範例 2】已知一等差級數的首項為 22，第 30 項為 -65，求前 20 項。

【解】 $\because$ 首項 $a_1=22$，$a_{30}=-65$，項數 $n=30$

則 $a_{30}=a_1+(30-1)\times d \Rightarrow -65=22+29d$

$\Rightarrow 29d=-87 \Rightarrow d=-3$

$\therefore a_{20}=a_1+(20-1)\times d=22+19\times(-3)=-35$

$$\therefore S_{20}=\frac{20\times[22+(-35)]}{2}=-130$$

(2) $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ …… 已知首項、項數、公差時使用。

公式推導：由前面可知 $a_n=a_1+(n-1)d$，再由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 之公式加以推導可得

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

【範例 1】已知一等差級數的首項為 3 且公差 5，求前 20 項的和。

【解】$\because$ 首項 $a_1=3$，公差 $d=5$，項數 $n=20$

$$\therefore \quad S_{20}=\frac{20\times[2a_1+(20-1)d]}{2}$$

$$=\frac{20\times[2\times3+(20-1)\times5]}{2}$$

$$=1010$$

【範例 2】已知一等差級數的首項為 20 且公差為$-\frac{2}{3}$，求前 30 項之和。

【解】 $\because$ 首項$a_1=20$，公差$d=-\frac{2}{3}$，項數$n=30$

$$\therefore S_{30}=\frac{30\left[2a_1+(30-1)d\right]}{2}$$

$$=\frac{30\times\left[2\times20+(30-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]}{2}=310$$

【範例 3】已知等差級數$(-6)+(-2)+2+\Lambda+a_n$的和為 64，求n的值。

【解】 $\because a_1=-6$，$d=(-2)-(-6)=4$

$$\therefore S_n=\frac{n[2\times(-6)+(n-1)\times4]}{2}=64$$

$$\Rightarrow \frac{n(-12+4n-4)}{2}=64$$

$$\Rightarrow \frac{4n^2-16n}{2}=64$$

$$\Rightarrow 4n^2-16n-128=0$$

$$\Rightarrow n^2-4n-32=0$$

$$\Rightarrow (n+4)(n-8)=0$$

$\Rightarrow n=8$ 或 $n=-4$ (不合，項數必須為正數)

【範例 4】100 到 300 的整數中，能被 7 整除的所有數的和等於多少？

【解】$\because$ 100 到 300 的整數中，7 最小的倍數為 105

，7 最大的倍數為 294。

$\therefore a_1=105$，$a_n=294$，$d=7$

$$\Rightarrow 294=105+(n-1)\times7$$

$$\Rightarrow n=28$$

$$\Rightarrow S_{28}=\frac{28\times(105+294)}{2}=14\times399=5586$$

4. 補充公式：

(1) 等差級數：$a_n = S_n - S_{n-1}$ 。

(2) 等差級數：$S_n =$ 項數 $\times$ 中央項。

【範例 1】一等差級數的 $S_{10} = 55$ 、$S_9 = 45$，則 $a_{10} = S_{10} - S_9 = 55 - 45 = 10$ 。

【範例 2】一等差級數為 $1+2+3+\Lambda\ +9$，其項數為 9，中央項為 5，

則 $S_9 = 9 \times 5 = 45$ 。

5. 級數專用符號: $\sum$

【範例 1】要表示 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

的簡易式可用如右之符號: $\sum_{i=1}^{10} i$ 。

即 $\left(\sum_{i=1}^{10} i\right) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \dfrac{10\times(1+10)}{2} = 55$

（上面符號的 i 表示 $i=1$ 累加到 $i=10$ ）

【範例 2】$\sum_{10}^{100} i = 10+11+12+\Lambda\ +98+99+100$

$= (1+2+\Lambda\ +99+100) - (1+2+\Lambda\ +9+10)$

$= \dfrac{100\times(1+100)}{2} - \dfrac{10\times(1+10)}{2}$

$= 5050 - 55 = 4995$

【類題練習 1】有一等差級數 $17+25+33+\Lambda$ ，求前十項之和。

【類題練習 2】求等差數列 $\{-2，-5，-8，\cdots\}$，求前 20 項之和。

【類題練習 3】 求等差數列{ 3，6，9， Λ ，210 }之總和。

【類題練習 4】 設一等差級數的首項為 5，前十一項和為 440。
求公差及第十項。

【類題練習 5】 設某一三角形的三個角的度數成等差數列。若已知最大的角是 105 度，則最小的角是幾度?

【類題練習 6】 假設一等差數列的前十項和為 120，前九項和為 99。
求公差為何?

解:

等比數列與級數

1. 等比數列

意義：一個數列，如果它任意相鄰兩項的後項除以前項所得的數都一樣，亦即，後項比前項的比值都相同，則此數列稱為等比數列。

【範例】{ 1，1，1，1，1，1，1，1，1，1，1，1 }

$\{1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}, \frac{128}{2187}\}$

{ 2，1，0.5，0.25，0.125，0.0625，0.03125 }

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\}$

$\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}\}$

【公式】a. 設等比數列的首項為 a_1，公比為 r，第 n 項為 a_n，

則求出 a_n 之值公式：$a_n = a_1 r^{n-1}$。

公式推導：如果一個等比數列的首項為 a_1，公比為 r，則由等比數列的定義可知：

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \Lambda = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \;;$$

$$a_2 = a_1 r \;;$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 r \cdot r = a_1 r^2 = a_1 r^{3-1} \;;$$

$$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 \cdot r = a_1 r^3 = a_1 r^{4-1} \;;$$

M

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

【範例】等比數列{ 4，8，16，32 }，其首項為 4，而公比為 $8 \div 4 = 2$，

則第 4 項：$a_4 = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2^3 = 4 \times 2^{4-1} = 32$。

b. 若a、b、c三數成等比數列，則b叫做a與c的等比中項或幾何中項：$b^2=ac$ （或$b=\pm\sqrt{ac}$）。

【範例】一等比數列$\{3，12，48\}$，其公比為 4，

則等比中項為$\pm\sqrt{3\times48}=\pm\sqrt{144}=\pm12$(負不合)。

【類題練習 1】在下列各空格填入適當的數，使得每一數列成為等比數列：

(1) 5，10，_____，_____。

(2) -5，15，_____，_____。

(3) 2，_____，_____，$4\sqrt{2}$。

(4) 3，-15，_____，_____。

(5) -3，_____，_____，-81。

(6) -3，_____，_____，81。

(7) $\frac{2}{5}$，_____，_____，$-\frac{1}{20}$，_____。

【類題練習 2】(1) 已知某一等比數列的首項為 2，公比為 3，求第五項。

(2) 已知某一等比數列的首項為 4，第四項為 32。

寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第二項為8，第五項為1。

求首項及公比。

【類題練習 3】(1) 已知 -2，m，-8 三數成等比數列，求 m 之值。

(2) 已知 5，m，20 三數成等比數列，求 m 之值。

2. 等比級數

問題：一等比數列為$\{a_1，a_2，a_3，\cdots，a_{n-1}，a_n\}$，我們是否可以利用等比數列的規則性或公式來算出此數列的總和呢?

意義：將一個等比數列的每一項依次用”+”號連接，稱為一個等比級數(幾何級數)，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$。

【法則】若等比級數之項數為 n，首項是 a_1，公比是 r，前 n 項的和為 S_n，

(1) 當 $r=1$ 時，$S_n=\underbrace{a_1+a_1+a_1+\cdots+a_1}_{共n項}=na_1$；

【範例】一等比數列$\{2，2，2，2，2，2，2，2，2，2，2\}$，

公比 $r=1$，則 $S_{10}=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{10個}=10\times 2=20$。

(2) 當 $r\neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ 或 $S_n=\dfrac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1}$。

公式推導：若 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$$\Rightarrow\ S_n=a_1+a_1r+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}\quad\cdots\cdots\quad(1)$$

將(1)式左右同乘 r：

$$\Rightarrow\ r\cdot S_n=a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}+a_1r^n\quad\cdots\cdots\quad(2)$$

將(1),(2)聯立：

$$\Rightarrow\ \begin{cases} S_n=a_1+a_1r+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1} \\ r\cdot S_n=\qquad a_1r+a_1r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_1r^{n-1}+a_1r^n \end{cases}$$

上下相減可得：$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 r^n$

$$\Rightarrow \quad (1-r) \cdot S_n = a_1 \cdot (1-r^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{(1-r)} \qquad \left(\text{或 } S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{(r-1)} \right)$$

符號應用：我們可以用 $\sum_{i=1}^{n} a_1 r^i$ 來表示 S_n。

$$\text{亦即 } S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1} = a_1 + a_2 + \Lambda + a_n r^{n-1}$$

$$= \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{(1-r)}$$

【範例】等比數列$\{1，2，4，8，\Lambda \;，a_{10}\}$，其 $r = 2 \div 1 = 2$，

則 $S_{10} = \dfrac{1 \times \left(2^{10} - 1\right)}{2-1} = 1023$。

【類題練習 1】(1) 已知某一等比級數的首項為 7，公比為 3，且有 10 項。求此級數的和。

(2) 已知一等比級數，首項為 4，公比為 2，和為 1020，求此級數之項數。

【類題練習 2】(1) 已知某一等比級數的首項為 5，公比為 2，且此級數共有 5 項，求此等比級數的和。

(2) 已知某一等比級數的首項為 3，公比為 2，且此級數總和為 93。求此等比級數之項數。

【類題練習 3】已知某一等比級數的首項為 4，公比為 2，且此級數總和為 508。求項數為何?

【類題練習 4】已知某一等比級數的和為 1820，公比為 3，且共有 6 項。求首項為何?

【類題練習 5】已知某一種細菌每經過一天，個數繁殖為原來的兩倍。今有此細菌一個，請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 500 個?

【類題練習 6】已知有 5 個桶子。在第一個桶子放入一個球，第二個桶子放入 3 個球，第三個桶子放入 9 顆球，以此類推，也就是說:後一個桶子放入的球數為前一個桶子球數的三倍。

請問這五個桶子共有幾個球?

【類題練習 7】已知某依等比級數的和為1820，公比為3，且此級數共有 6 項。求首項。

小 試 身 手

【例題 1】

有一等差數列為 3、6、9、12、…，求：

(1) 第 15 項；

(2) 若第 n 項為 315，求 n 的值。

【練習 1】

有一等差數列為 4、7、10、13、…，求：

(1) 第 15 項；

(2) 若第 n 項為 316，求 n 的值。

【例題2】

如果等差級數的首項為 5，公差為 -3，求第 15 項及前 15 項的和。

【練習 2】

如果等差級數的首項為 8，公差為 -4，求第 20 項及前 20 項的和。

【例題 3】

設一個等差級數的首項為 7，末項為 31，和為 247。求此等差級數的項數與公差。

【練習 3】

設一個等差級數的首項為 5，末項為 -40，和為 -280。求此等差級數的項數與公差。

【例題 4】

快樂表演廣場共有 25 排坐位，依次每一排比前一排多 2 個坐位，已知最後一排有 80 個坐位，那麼快樂表演廣場共有多少個坐位?

【練習 4】

第一表演廣場共有 30 排坐位，依次每一排比前一排多 3 個坐位，已知最後一排有 102 個坐位，那麼第一表演廣場共有多少個坐位?

【例題 5】

若一個等比數列的首項為 5，公比為 -3，求此等比數列的第 4 項。

【練習 5】

若一個等比數列的首項為 -12，公比為 -2，求此等比數列的第 5 項。

【例題 6】

阿東家於年初時購買一輛新車，售價是 60 萬元售車人員告訴他們:新車第一年的折舊率是 20%(亦即車子的價錢只剩原來的 80%)，以後每年的折舊率是前一年車價的 10%，則:

(1) 第二年年初時(1 年後),該車價值多少?

(2) 第五年年初時(4 年後),該車價值多少?

【練習 6】

阿西家於年初時購買一輛新車，售價是 60 萬元售車人員告訴他們:新車第一年的折舊率是 30%(亦即車子的價錢只剩原來的 70%)，以後每年的折舊率是前一年車價的 15%，則:

(1) 第二年年初時(1 年後),該車價值多少?

(2) 第四年年初時(3 年後),該車價值多少?

【例題 7】

求 $4+4\times3+4\times3^2+\Lambda$ 至第六項的和。

【練習 7】

求 $3+3\times(-2)+3\times(-2)^2+\Lambda$ 至第 7 項的和。

【例題 8】

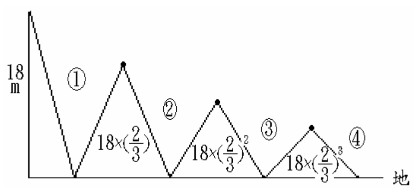
求等比級數 $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+1+\frac{2}{3}+\Lambda$ 至第六項的和。

【練習 8】

求等比級數 $100+(-60)+36+(-\frac{108}{5})+\Lambda$ 至第七項的和。

【例題 9】

設一球每次落地後反彈高度為原高度的 $\frac{2}{3}$，現有一球自 18 公尺高處落下，則此球自開始落下至第 4 次著地所經過的總路程是多少公尺?



【例題 9】

設一球每次落地後反彈高度為原高度的$\frac{1}{3}$，現有一球自 81 公尺高處落下，則此球自開始落下至第 5 次著地所經過的總路程是多少公尺?

【例題 10】

已知某一種細菌每經過一天,個數繁殖為原來的三倍。

今有此細菌一個,請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 10000 個?

【練習 10】

已知某一種細菌每經過一天，個數繁殖為原來的二倍。

今有此細菌二個，請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 1000 個?

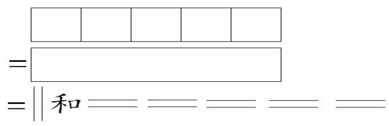
圖形的樣式與規律

I. 重疊圖形的周長與面積：

1. 正方形重疊的周長

將 n 個邊長 1 公分的正方形邊靠邊並排成長方形，此長方形周長為 $(2n+2)$ 公分。

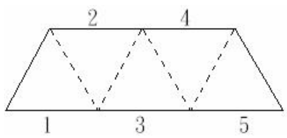
【範例】將 5 個邊長 1 公分的正方形邊靠邊並排成長方形，由右圖可知所排成長方形周長為 $5\times2+2=12$ 公分



2. 三角形重疊的周長

將 n 個邊長 1 公分的三角形邊靠邊並排成長條形，此長條形周長為 $(n+2)$ 公分。

【範例】將 5 個邊長 1 公分的三角形邊靠邊並排成長條形，此長條形周長為 $5+2=7$ 公分



3. 圖形周長的比較

用 n 個邊長 1 公分的正方形所拼成的長方形周長比用 n 個邊長 1 公分的三角形所拼成的長條形周長多 n 公分。

【範例】如以上述兩個範例中的圖形周長作比較可知 $12-7=5$ 公分

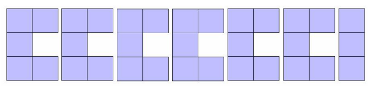
4. 重疊圖形的面積

若一圖形面積 a 公分，用 n 個這種圖形以重疊 b 平方公分的方式拼排，則所成的圖形面積是：$(a-b)\times n+b$ 平方公分

【範例 1】用 6 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊三個小正方形的方式拼排成的長條形，其面積是多少？

方法 1：代入公式 $(8-3)\times6+3=33$ 平方公分

方法 2：原來 3 公分的中空小正方形是由 8 個 1×1 公分的小正方形構成，而重疊 3 個就如下圖看成 $8-3=5$ 個小正方形的凹形，所以重疊後的圖形看成 6 個凹型和一長方形，全部面積為：$5\times6+3=33$ 平方公分。



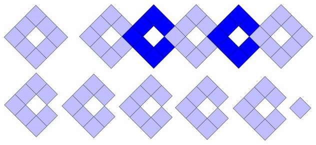
方法 3：每兩個正方形重疊處是1×3公分的長方形，6 個正方形有 5 個重疊處，所以全部面積是：

$8\times6-3\times5=33$平方公分。

【範例 2】用 5 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成的長條形，其面積是多少？

方法 1：代入公式$(8-1)\times5+1=36$平方公分。

方法 2：邊長 3 公分的中空小正方形是由 8 個1×1公分的小正方形構成，而重疊 1 個就如下圖看成$8-1=7$個，所以全部面積為：$7\times5+1=36$平方公分。

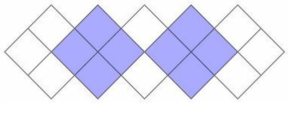


【例題 1】

以 32 個邊長為 1 公分的正方形邊靠邊並排拼成的長方形的周長是多少公分?

【例題 2】

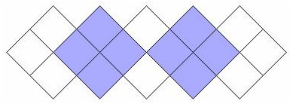
如右下圖，用 5 個邊長為 2 公分的正方形，以重疊一個邊長為 1 的正方形方式並排成長條形，求此長條形的周長是多少?



【例題 3】

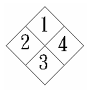
(1) 用 6 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成長條形，求此長條形的面積為何?

(2) 用 n 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成長條形，求此長條形的面積為何?

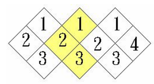


【例題 4】

將一個邊長為 2 公分的正方形紙片對摺兩次，可形成 4 個相同的小正方形，在每個小正方形上分別標上數字 1，2，3，4（如右圖）:



(1) 取 3 個數字正方形，以重疊一個小正方形的方式拼排成長條形，此長條形可看見的數字和是多少？



(2) 取 n 個數字正方形，以重疊一個小正方形的方式拼排成長條形，此長條形可看見的數字和是多少？

進階補充

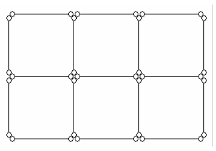
由小正方形組成相連圖形的邊數

1. 若以火柴圍成 $m\times n$ 的長方形共需 $\left[(m+1)\times n+(n+1)\times m\right]$ 根火柴。

   【範例】圍成 3×2 的長方形所需要的棉花棒總數如下：

   直的需 $(3+1)\times 2$ 根，橫的需 $(2+1)\times 3$ 根，

   所以共 $(3+1)\times 2+(2+1)\times 3=17$（根）。



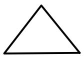
2. 圍成 $n\times n$ 的正方形共需 $\left[2n\times(n+1)\right]$ 根火柴。

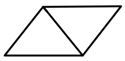
   【範例】若要排出 3×3 的正方形則需要火柴總數如下：

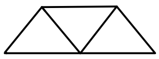
   $2\times 3\times(3+1)=2\times 3\times 4=24$（根）

【例題 5】

將棉花棒排成接連的三角形，若排成 n 個接連的三角形，共需多少根棉花棒？

解：排成  需要 3 根棉花棒；

排成  需要 5 根棉花棒；

排成  需要 7 根棉花棒。

M

由此可推知：排成 n 個接連的三角形，共需要 $2n+1$ 根棉花棒。

【例題 6】

將棉花棒排成如右圖接連的正三角形

(1) 欲排出邊長 1 的正三角形需 3 根棉花棒，排邊長 2 的正三角形需 9 根棉花棒，則排邊長 3 的正三角形需幾根棉花棒？

(2) 欲排出邊長 4 的正三角形需幾根棉花棒？