

# 數列與級數

## ■ 數量的樣式與規律

### I. 數量關係：

#### 1. 奇數與偶數的關係

- 兩個連續整數必有一個奇數與一個偶數，它們之間的差為 1。
- 奇數與偶數的一般化(或形式化)。

偶數：因為偶數都是 2 的倍數，而 2 的  $n$  倍即為  $2 \times n$ ，故記為  $2n$ ， $n$  表所有整數；所以  $2n$  可為偶數的一般式。

【範例】  $4=2 \times 2$ ， $6=2 \times 3$ ， $8=2 \times 4$ ， $10=2 \times 5 \dots$

因此可推得所有偶數皆可記為： $2n = 2 \times n$ ，

其中  $n$  為大於 1 之整數。

奇數：因為奇數都是 2 的倍數減 1，而 2 的  $n$  倍減 1，故記為  $2n-1$ ， $n$  表所有整數；所以  $2n-1$  可為奇數的一般式。

【範例】  $3=2 \times 2-1$ ， $5=2 \times 3-1$ ， $7=2 \times 4-1$ ， $9=2 \times 5-1 \dots$

因此可推得所有奇數皆可記為： $2n-1 = 2 \times n-1$ ，

其中  $n$  為大於 1 之整數。

#### 2. 兩數量間的關係

同種類的連續兩數間會有某種不變的關係或規律。

【範例 1】 父子和兄弟間的年齡差距永遠不變。

【範例 2】 台灣的街道號碼必定是一邊為連續奇數，另一邊為連續偶數。

#### 3. 由數字方陣中觀察數的關係

數字方陣中，直排稱為行，橫排稱為列，可尋找同一列、同一行或對角線上各數間的關係。

【範例】 
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

如上之數字方陣中，直排的數字彼此差 1；

左下到右上對角線的數次彼此差 2；

橫排的數字彼此差 3；

左上到右下對角線的數字彼此差 4。



## 小 試 身 手

### 【例題 1】

如果奇數 1、3、5、7、9... 的第  $k$  個數寫為  $2k-1$ ，那麼偶數 2、4、6、8、10、 $\Lambda$  的第  $k$  個數寫為多少？

### 【練習 1】

如果奇數 3、5、7、9... 的第  $k$  個數寫為  $2k+1$ ，那麼偶數 4、6、8、10、 $\Lambda$  的第  $k$  個數寫為多少？

### 【例題 2】

|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 一 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 二 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 |
| 三 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |

某郵局內 30 個信箱號碼排列如上圖：

- (1) 第三列第  $n$  個信箱是幾號？
- (2) 第二列第  $n$  個信箱是幾號？
- (3) 第一列第  $n$  個信箱是幾號？

### 【練習 2】

|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 一 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 二 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 |
| 三 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |

某郵局內 30 個信箱號碼排列如上圖：

- (1) 第三列第  $n+1$  個信箱是幾號？
- (2) 第二列第  $n+1$  個信箱是幾號？
- (3) 第一列第  $n+1$  個信箱是幾號？

### 【例題 3】

下圖為亞利安星球的月曆，任意取其中  $2 \times 2$  的數字方陣，回答下列各題：

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 日  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 七  | 八  | 九  |
|    |    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 39 | 40 |    |    |    |    |    |    |    |    |

- (1) 在  $2 \times 2$  的方框內，每一行的數字和有何關係？
- (2) 在  $2 \times 2$  的方框內，每一列的數字和有何關係？
- (3) 在  $2 \times 2$  的方框內，兩對角線的數字和有何關係？

### 【練習 3】

下圖為那美克星球的月曆，任意取其中  $2 \times 2$  的數字方陣，回答下列各題：

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 日  | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 七  | 八  | 九  |
|    |    |    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 38 | 39 | 40 |    |    |    |    |    |    |    |

- (1) 在  $2 \times 2$  的方框內，每一行的數字和有何關係？
- (2) 在  $2 \times 2$  的方框內，每一列的數字和有何關係？
- (3) 在  $2 \times 2$  的方框內，兩對角線的數字和有何關係？

## ■ 等差數列與級數

### II. 數列與級數：

#### 1. 數列

a. 將一些(通常為有限個)數(可重複的)依序排成一列，稱為(有限)數列。

【範例】以下數列：

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$$

$$\{-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$$

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \Lambda, 1, -1\}$$

$$\{-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\}$$

$$\{-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$$\{-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}\right\}$$

仔細觀察這些數列，是否可以找出各數列有其規律性。

注意：一般數列不一定都有規則性可循，皆必須透過觀察其數列中的數字變化才可推論出是否有規則可循。

b. 在一數列中，每一個數稱為項；稱第一個數為第一項或首項(通常記為 $a_1$ )，第二個數為第二項(通常記為 $a_2$ )， $\Lambda$ 。

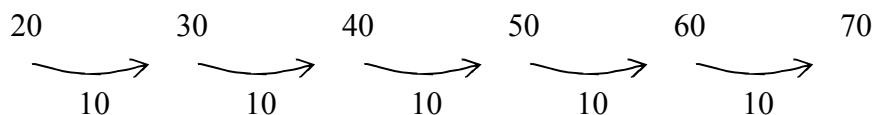
當數列為有限項時，最後一個數為末項。

【範例】在數列 $\{20, 30, 40, 50, 60, 70\}$ 中，首項為20，第二項為30，末項為70。

#### 2. 等差數列

定義：如果在相鄰兩項的後面的項減去前面的項，所得的差都是一樣，就稱此數列為等差數列，並稱所得的差為公差。通常以 $d$ 代表公差， $a_1$ 代表首項， $a_n$ 代表第 $n$ 項。

【範例】數列 $\{20, 30, 40, 50, 60, 70\}$ ，公差為 $30 - 20 = 10$ 。



因為後面的項減去前面的項所得的差都是10，所以這是一個公差為10的等差數列。

$$\text{則 } a_4 = 20 + 10 + 10 + 10 = 20 + 3 \times 10$$

**【公式】**(1) 設等差數列的首項是 $a_1$ ，公差是 $d$ ，第 $n$ 項是 $a_n$ ，

$$\text{則第 } n \text{ 項公式： } a_n = a_1 + (n-1)d。$$

**【範例】**有一等差數列 $\{-4, -1, 2, 5, 8, 11\}$ ，公差 $= -1 - (-4) = 3$

$$\text{， } a_1 = -4 \text{、 } a_2 = -1 \text{、 } a_3 = 2 \text{、 } a_4 = 5 \text{、 } a_5 = 8 \text{、 } a_6 = 11。$$

$$\text{則 } a_5 = a_1 + (5-1)d = -4 + (5-1) \cdot 3 = -4 + 12 = 8$$

$$\text{則 } a_6 = a_1 + (6-1)d = -4 + (6-1) \cdot 3 = -4 + 15 = 11$$

(2) 若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三數成等差數列，則 $b$ 叫做 $a$ 與 $c$ 的等差中項

$$\text{或算術中項 } \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \text{ (或 } a+c=2b \text{)}。$$

**【範例】**有一等差數列 $\{12, 16, 20\}$ ，公差為 $16-12=4$ ，

$$\text{則等差中項 } 16 = \frac{12+20}{2}。$$

**【範例 1】**有一等差數列，其首項為20，公差為10，則

$$a_6 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 20 + 5 \times 10$$

$$= 20 + (6-1) \times 10 = a_1 + (6-1) \cdot d$$

**【範例 2】**數列 $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$ ，其首項為2，公差為 $5-2=3$ ，

$$\text{則求第 6 項之求法為： } a_6 = 2 + (6-1) \times 3 = 17。$$

**【範例 3】**數列 $\{3, 6, 9\}$ ，其等差中項6之求法為： $\frac{3+9}{2} = 6。$

**【類題練習】**在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1)  $5, 8, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}。$

(2)  $3, -1, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}。$

(3)  $5, \underline{\hspace{1cm}}, 11, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}。$

(4)  $-2, -9, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}。$

$$(5) \frac{3}{4}, \underline{\quad}, 1\frac{3}{4}, \underline{\quad}。$$

$$(6) 6, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 21。$$

### 3. 等差級數

問題：一等差數列為  $\{ a_1, a_2, a_3, \Lambda, a_{n-1}, a_n \}$ ，我們是否可以利用等差數列的規則性或公式來算出此數列的總和呢？

意義：將一個等差數列的每一項依次用”+”號連接，稱為一個等差級數。

**【公式】**若等差級數之項數為  $n$ ，首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，前  $n$  項的和為  $S_n$ ，則：

$$(1) S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \dots\dots \text{已知首項、項數、末項時使用(梯形公式)。$$

公式推導：如果一個等差級數共有  $n$  項，其首項為  $a_1$ ，末項為  $a_n$ ，公差是  $d$ ，則這各的等差級數的和通常以  $S_n$  表示，即：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \Lambda + a_n$$

$$\text{由 } S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \Lambda + [a_1 + (n-1)d] \quad (1)$$

將(1)式等號右邊各項的順序重新排列成為：

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + \Lambda + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad (2)$$

再將(1)、(2)兩式相加，即可得到：

$$2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \Lambda + [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{共 } n \text{ 組}$$

$$2S_n = n[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \quad (\ominus a_n = a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

**【範例 1】** 已知一等差級數的首項為 3，第 20 項為 88，求前 20 項的和。

**【解】** ⊕ 首項  $a_1 = 3$ ， $a_{20} = 88$ ，項數  $n = 20$

$$\therefore S_n = \frac{20 \times (3 + 88)}{2} = 910$$

**【範例 2】** 已知一等差級數的首項為 22，第 30 項為 -65，求前 20 項。

**【解】** ⊕ 首項  $a_1 = 22$ ， $a_{30} = -65$ ，項數  $n = 30$

$$\text{則 } a_{30} = a_1 + (30 - 1) \times d \Rightarrow -65 = 22 + 29d$$

$$\Rightarrow 29d = -87 \Rightarrow d = -3$$

$$\therefore a_{20} = a_1 + (20 - 1) \times d = 22 + 19 \times (-3) = -35$$

$$\therefore S_{20} = \frac{20 \times [22 + (-35)]}{2} = -130$$

$$(2) S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \dots\dots \text{已知首項、項數、公差時使用。}$$

公式推導：由前面可知  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，再由  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  之公式

加以推導可得

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

**【範例 1】** 已知一等差級數的首項為 3 且公差 5，求前 20 項的和。

**【解】** ⊕ 首項  $a_1 = 3$ ，公差  $d = 5$ ，項數  $n = 20$

$$\begin{aligned} \therefore S_{20} &= \frac{20 \times [2a_1 + (20-1)d]}{2} \\ &= \frac{20 \times [2 \times 3 + (20-1) \times 5]}{2} \\ &= 1010 \end{aligned}$$

【範例 2】已知一等差級數的首項為 20 且公差為  $-\frac{2}{3}$ ，求前 30 項之和。

【解】  $\because$  首項  $a_1 = 20$ ，公差  $d = -\frac{2}{3}$ ，項數  $n = 30$

$$\begin{aligned}\therefore S_{30} &= \frac{30[2a_1 + (30-1)d]}{2} \\ &= \frac{30 \times \left[ 2 \times 20 + (30-1) \times \left( -\frac{2}{3} \right) \right]}{2} = 310\end{aligned}$$

【範例 3】已知等差級數  $(-6) + (-2) + 2 + \dots + a_n$  的和為 64，求  $n$  的值。

【解】  $\because a_1 = -6$ ， $d = (-2) - (-6) = 4$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \frac{n[2 \times (-6) + (n-1) \times 4]}{2} = 64 \\ \Rightarrow \frac{n(-12 + 4n - 4)}{2} &= 64 \\ \Rightarrow \frac{4n^2 - 16n}{2} &= 64 \\ \Rightarrow 4n^2 - 16n - 128 &= 0 \\ \Rightarrow n^2 - 4n - 32 &= 0 \\ \Rightarrow (n+4)(n-8) &= 0 \\ \Rightarrow n = 8 \text{ 或 } n = -4 & \text{ (不合，項數必須為正數)}\end{aligned}$$

【範例 4】100 到 300 的整數中，能被 7 整除的所有數的和等於多少？

【解】  $\because$  100 到 300 的整數中，7 最小的倍數為 105

，7 最大的倍數為 294。

$\therefore a_1 = 105$ ， $a_n = 294$ ， $d = 7$

$$\Rightarrow 294 = 105 + (n-1) \times 7$$

$$\Rightarrow n = 28$$

$$\Rightarrow S_{28} = \frac{28 \times (105 + 294)}{2} = 14 \times 399 = 5586$$

#### 4. 補充公式：

(1) 等差級數： $a_n = S_n - S_{n-1}$ 。

(2) 等差級數： $S_n = \text{項數} \times \text{中央項}$ 。

【範例 1】一等差級數的  $S_{10} = 55$ 、 $S_9 = 45$ ，則  $a_{10} = S_{10} - S_9 = 55 - 45 = 10$ 。

【範例 2】一等差級數為  $1 + 2 + 3 + \Lambda + 9$ ，其項數為 9，中央項為 5，

$$\text{則 } S_9 = 9 \times 5 = 45。$$

#### 5. 級數專用符號： $\sum$

【範例 1】要表示  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

的簡易式可用如右之符號： $\sum_{i=1}^{10} i$ 。

$$\text{即 } \left( \sum_{i=1}^{10} i \right) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \times (1 + 10)}{2} = 55$$

(上面符號的  $i$  表示  $i=1$  累加到  $i=10$ )

【範例 2】 $\sum_{i=10}^{100} i = 10 + 11 + 12 + \Lambda + 98 + 99 + 100$

$$= (1 + 2 + \Lambda + 99 + 100) - (1 + 2 + \Lambda + 9 + 10)$$

$$= \frac{100 \times (1 + 100)}{2} - \frac{10 \times (1 + 10)}{2}$$

$$= 5050 - 55 = 4995$$

【類題練習 1】有一等差級數  $17 + 25 + 33 + \Lambda$ ，求前十項之和。

【類題練習 2】求等差數列  $\{-2, -5, -8, \dots\}$ ，求前 20 項之和。



**【類題練習 3】** 求等差數列  $\{3, 6, 9, \dots, 210\}$  之總和。

**【類題練習 4】** 設一等差級數的首項為 5，前十一項和為 440。

求公差及第十項。

**【類題練習 5】** 設某一三角形的三個角的度數成等差數列。若已知最大的

角是 105 度，則最小的角是幾度？

**【類題練習 6】** 假設一等差數列的前十項和為 120，前九項和為 99。

求公差為何？

解：

## ■ 等比數列與級數

### 1. 等比數列

意義：一個數列，如果它任意相鄰兩項的後項除以前項所得的數都一樣，亦即，後項比前項的比值都相同，則此數列稱為等比數列。

【範例】 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

$$\left\{1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}, \frac{128}{2187}\right\}$$

$$\{2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}\right\}$$

【公式】a. 設等比數列的首項為 $a_1$ ，公比為 $r$ ，第 $n$ 項為 $a_n$ ，

則求出 $a_n$ 之值公式： $a_n = a_1 r^{n-1}$ 。

公式推導：如果一個等比數列的首項為 $a_1$ ，公比為 $r$ ，則由等比數列的定義可知：

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \Lambda = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r ;$$

$$a_2 = a_1 r ;$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 r \cdot r = a_1 r^2 = a_1 r^{3-1} ;$$

$$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 \cdot r = a_1 r^3 = a_1 r^{4-1} ;$$

N

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

【範例】等比數列 $\{4, 8, 16, 32\}$ ，其首項為4，而公比為 $8 \div 4 = 2$ ，

則第4項： $a_4 = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2^3 = 4 \times 2^{4-1} = 32$ 。

b. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三數成等比數列，則  $b$  叫做  $a$  與  $c$  的等比中項或

幾何中項： $b^2 = ac$  (或  $b = \pm\sqrt{ac}$ )。

【範例】一等比數列  $\{3, 12, 48\}$ ，其公比為 4，

則等比中項為  $\pm\sqrt{3 \times 48} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$  (負不合)。

【類題練習 1】在下列各空格填入適當的數，使得每一數列成為等比數列：

- (1) 5, 10, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。
- (2) -5, 15, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。
- (3) 2, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_,  $4\sqrt{2}$ 。
- (4) 3, -15, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。
- (5) -3, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, -81。
- (6) -3, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 81。
- (7)  $\frac{2}{5}$ , \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_,  $-\frac{1}{20}$ , \_\_\_\_\_。

【類題練習 2】(1) 已知某一等比數列的首項為 2，公比為 3，求第五項。

(2) 已知某一等比數列的首項為 4，第四項為 32。

寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第二項為 8，第五項為 1。

求首項及公比。

**【類題練習 3】** (1) 已知  $-2, m, -8$  三數成等比數列，求  $m$  之值。

(2) 已知  $5, m, 20$  三數成等比數列，求  $m$  之值。

## 2. 等比級數

問題：一等比數列為  $\{a_1, a_2, a_3, \Lambda, a_{n-1}, a_n\}$ ，我們是否可以利用等比數列的規則性或公式來算出此數列的總和呢？

意義：將一個等比數列的每一項依次用“+”號連接，稱為一個等比級數（幾何級數），即  $a_1 + a_2 + a_3 + \Lambda + a_{n-1} + a_n$ 。

**【法則】** 若等比級數之項數為  $n$ ，首項是  $a_1$ ，公比是  $r$ ，前  $n$  項的和為  $S_n$ ，

(1) 當  $r=1$  時， $S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \Lambda + a_1}_{\text{共 } n \text{ 項}} = na_1$ ；

**【範例】** 一等比數列  $\{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ ，

公比  $r=1$ ，則  $S_{10} = \underbrace{2 + 2 + \Lambda + 2}_{10 \text{ 個}} = 10 \times 2 = 20$ 。

(2) 當  $r \neq 1$  時， $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$  或  $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ 。

公式推導：若  $S_n = a_1 + a_2 + \Lambda + a_{n-1} + a_n$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_1r + \Lambda + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \quad \Lambda \quad \Lambda \quad (1)$$

將(1)式左右同乘  $r$ ：

$$\Rightarrow r \cdot S_n = a_1r + a_1r^2 + \Lambda + a_1r^{n-1} + a_1r^n \quad \Lambda \quad \Lambda \quad (2)$$

將(1), (2)聯立：

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = a_1 + a_1r + \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \\ r \cdot S_n = a_1r + a_1r^2 + \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad + a_1r^{n-1} + a_1r^n \end{cases}$$

上下相減可得： $S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 r^n$

$$\Rightarrow (1-r) \cdot S_n = a_1 \cdot (1-r^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{(1-r)} \quad \left( \text{或 } S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{(r-1)} \right)$$

符號應用：我們可以用  $\sum_{i=1}^n a_1 r^i$  來表示  $S_n$ 。

$$\begin{aligned} \text{亦即 } S_n &= \sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1} = a_1 + a_2 + \Lambda + a_n r^{n-1} \\ &= \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{(1-r)} \end{aligned}$$

**【範例】** 等比數列  $\{1, 2, 4, 8, \Lambda, a_{10}\}$ ，其  $r = 2 \div 1 = 2$ ，

$$\text{則 } S_{10} = \frac{1 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023。$$

**【類題練習 1】** (1) 已知某一等比級數的首項為 7，公比為 3，且有 10 項。

求此級數的和。

(2) 已知一等比級數，首項為 4，公比為 2，和為 1020，

求此級數之項數。

- 【類題練習 2】** (1) 已知某一等比級數的首項為 5，公比為 2，且此級數共有 5 項，求此等比級數的和。
- (2) 已知某一等比級數的首項為 3，公比為 2，且此級數總和為 93。求此等比級數之項數。

**【類題練習 3】** 已知某一等比級數的首項為 4，公比為 2，且此級數總和為 508。求項數為何？

**【類題練習 4】** 已知某一等比級數的和為 1820，公比為 3，且共有 6 項。求首項為何？

**【類題練習 5】** 已知某一種細菌每經過一天，個數繁殖為原來的兩倍。今有此細菌一個，請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 500 個？

**【類題練習 6】** 已知有 5 個桶子。在第一個桶子放入一個球，第二個桶子放入 3 個球，第三個桶子放入 9 顆球，以此類推，也就是說：後一個桶子放入的球數為前一個桶子球數的三倍。  
請問這五個桶子共有幾個球？

**【類題練習 7】** 已知某依等比級數的和為 1820，公比為 3，且此級數共有 6 項。求首項。



## 小 試 身 手

**【例題 1】**

有一等差數列為 3、6、9、12、...，  
求：

- (1) 第 15 項；
- (2) 若第  $n$  項為 315，求  $n$  的值。

**【練習 1】**

有一等差數列為 4、7、10、13、...，  
求：

- (1) 第 15 項；
- (2) 若第  $n$  項為 316，求  $n$  的值。

**【例題 2】**

如果等差級數的首項為 5，公差為  $-3$ ，求第 15 項及前 15 項的和。

**【練習 2】**

如果等差級數的首項為 8，公差為  $-4$ ，求第 20 項及前 20 項的和。

**【例題 3】**

設一個等差級數的首項為 7，末項為 31，和為 247。求此等差級數的項數與公差。

**【練習 3】**

設一個等差級數的首項為 5，末項為  $-40$ ，和為  $-280$ 。求此等差級數的項數與公差。

**【例題 4】**

快樂表演廣場共有 25 排坐位，依次每一排比前一排多 2 個坐位，已知最後一排有 80 個坐位，那麼快樂表演廣場共有多少個坐位？

**【練習 4】**

第一表演廣場共有 30 排坐位，依次每一排比前一排多 3 個坐位，已知最後一排有 102 個坐位，那麼第一表演廣場共有多少個坐位？



**【例題 5】**

若一個等比數列的首項為 5，公比為  $-3$ ，求此等比數列的第 4 項。

**【練習 5】**

若一個等比數列的首項為  $-12$ ，公比為  $-2$ ，求此等比數列的第 5 項。

**【例題 6】**

阿東家於年初時購買一輛新車，售價是 60 萬元售車人員告訴他們：新車第一年的折舊率是 20% (亦即車子的價錢只剩原來的 80%)，以後每年的折舊率是前一年車價的 10%，則：

- (1) 第二年年初時 (1 年後)，該車價值多少？
- (2) 第五年年初時 (4 年後)，該車價值多少？

**【練習 6】**

阿西家於年初時購買一輛新車，售價是 60 萬元售車人員告訴他們：新車第一年的折舊率是 30% (亦即車子的價錢只剩原來的 70%)，以後每年的折舊率是前一年車價的 15%，則：

- (1) 第二年年初時 (1 年後)，該車價值多少？
- (2) 第四年年初時 (3 年後)，該車價值多少？

**【例題 7】**

求  $4 + 4 \times 3 + 4 \times 3^2 + \Lambda$  至第六項的和。

**【練習 7】**

求  $3 + 3 \times (-2) + 3 \times (-2)^2 + \Lambda$  至第 7 項的和。

【例題 8】

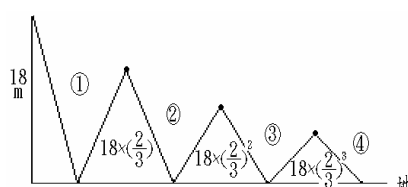
求等比級數  $\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \dots$  至第六項的和。

【練習 8】

求等比級數  $100 + (-60) + 36 + (-\frac{108}{5}) + \dots$  至第七項的和。

【例題 9】

設一球每次落地後反彈高度為原高度的  $\frac{2}{3}$ ，現有一球自 18 公尺高處落下，則此球自開始落下至第 4 次著地所經過的總路程是多少公尺？



**【例題 9】**

設一球每次落地後反彈高度為原高度的 $\frac{1}{3}$ ，現有一球自 81 公尺高處落下，則此球自開始落下至第 5 次著地所經過的總路程是多少公尺？

**【例題 10】**

已知某一種細菌每經過一天，個數繁殖為原來的三倍。

今有此細菌一個，請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 10000 個？

**【練習 10】**

已知某一種細菌每經過一天，個數繁殖為原來的二倍。

今有此細菌二個，請問至少需要經過多少天後，細菌個數會超過 1000 個？

## 圖形的樣式與規律

### I. 重疊圖形的周長與面積：

#### 1. 正方形重疊的周長

將  $n$  個邊長 1 公分的正方形邊靠邊並排成長方形，此長方形周長為  $(2n+2)$  公分。

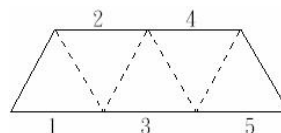
【範例】將 5 個邊長 1 公分的正方形邊靠邊並排成長方形，由右圖可知所排成長方形周長為  $5 \times 2 + 2 = 12$  公分



#### 2. 三角形重疊的周長

將  $n$  個邊長 1 公分的三角形邊靠邊並排成長條形，此長條形周長為  $(n+2)$  公分。

【範例】將 5 個邊長 1 公分的三角形邊靠邊並排成長條形，此長條形周長為  $5 + 2 = 7$  公分



#### 3. 圖形周長的比較

用  $n$  個邊長 1 公分的正方形所拼成的長方形周長比用  $n$  個邊長 1 公分的三角形所拼成的長條形周長多  $n$  公分。

【範例】如以上述兩個範例中的圖形周長作比較可知  $12 - 7 = 5$  公分

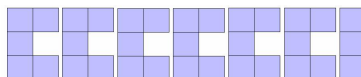
#### 4. 重疊圖形的面積

若一圖形面積  $a$  公分，用  $n$  個這種圖形以重疊  $b$  平方公分的方式拼排，則所成的圖形面積是： $(a-b) \times n + b$  平方公分

【範例 1】用 6 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊三個小正方形的方式拼排成的長條形，其面積是多少？

方法 1：代入公式  $(8-3) \times 6 + 3 = 33$  平方公分

方法 2：原來 3 公分的中空小正方形是由 8 個  $1 \times 1$  公分的小正方形構成，而重疊 3 個就如下圖看成  $8 - 3 = 5$  個小正方形的凹形，所以重疊後的圖形看成 6 個凹型和一長方形，全部面積為： $5 \times 6 + 3 = 33$  平方公分。

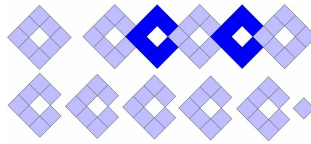


方法 3：每兩個正方形重疊處是  $1 \times 3$  公分的長方形，6 個正方形有 5 個重疊處，所以全部面積是：  
 $8 \times 6 - 3 \times 5 = 33$  平方公分。

**【範例 2】** 用 5 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成的長條形，其面積是多少？

方法 1：代入公式  $(8-1) \times 5 + 1 = 36$  平方公分。

方法 2：邊長 3 公分的中空小正方形是由 8 個  $1 \times 1$  公分的小正方形構成，而重疊 1 個就如下圖看成  $8-1=7$  個，所以全部面積為： $7 \times 5 + 1 = 36$  平方公分。

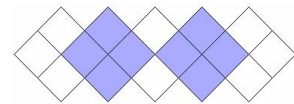


**【例題 1】**

以 32 個邊長為 1 公分的正方形邊靠邊並排拼成的長方形的周長是多少公分？

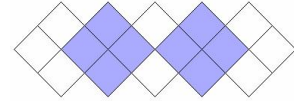
**【例題 2】**

如右下圖，用 5 個邊長為 2 公分的正方形，以重疊一個邊長為 1 的正方形方式並排成長條形，求此長條形的周長是多少？



**【例題 3】**

- (1) 用 6 個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成長條形，求此長條形的面積為何？
- (2) 用  $n$  個邊長為 3 公分的中空正方形，以重疊 1 個小正方形的方式拼排成長條形，求此長條形的面積為何？



**【例題 4】**

將一個邊長為 2 公分的正方形紙片對摺兩次，可形成 4 個相同的小正方形，在每個小正方形上分別標上數字 1, 2, 3, 4 (如右圖)：



- (1) 取 3 個數字正方形，以重疊一個小正方形的方式拼排成長條形，此長條形可看見的數字和是多少？
- (2) 取  $n$  個數字正方形，以重疊一個小正方形的方式拼排成長條形，此長條形可看見的數字和是多少？



### 進階補充

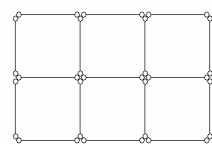
由小正方形組成相連圖形的邊數

1. 若以火柴圍成  $m \times n$  的長方形共需  $[(m+1) \times n + (n+1) \times m]$  根火柴。

【範例】圍成  $3 \times 2$  的長方形所需要的棉花棒總數如下：

直的需  $(3+1) \times 2$  根，橫的需  $(2+1) \times 3$  根，

所以共  $(3+1) \times 2 + (2+1) \times 3 = 17$  (根)。




2. 圍成  $n \times n$  的正方形共需  $[2n \times (n+1)]$  根火柴。


【範例】若要排出  $3 \times 3$  的正方形則需要火柴總數如下：


$2 \times 3 \times (3+1) = 2 \times 3 \times 4 = 24$  (根)

### 【例題 5】

將棉花棒排成接連的三角形，若排成  $n$  個接連的三角形，共需多少根棉花棒？

解：排成  需要 3 根棉花棒；

排成  需要 5 根棉花棒；

排成  需要 7 根棉花棒。

∴

由此可推知：排成  $n$  個接連的三角形，共需要  $2n+1$  根棉花棒。

### 【例題 6】

將棉花棒排成如右圖接連的正三角形

(1) 欲排出邊長 1 的正三角形需 3 根棉花棒，排邊長 2 的正三角形需 9 根棉花棒，則排邊長 3 的正三角形需幾根棉花棒？

(2) 欲排出邊長 4 的正三角形需幾根棉花棒？