


簡單的幾何圖形

點、線、角與應用

點、線、角：在探討幾何學之前，我們必須先瞭解構成平面圖形的基本元素一點、線、角。

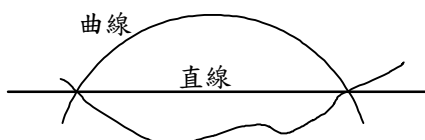
點：點是幾何學中所討論的最基本圖形。

點僅用來表示事物所在的位置，而不考慮它的形狀與大小。

圖示	記法	讀法
 A	點 A 或 A 點	點 A 或 A 點

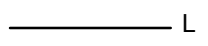
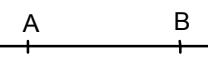
線：線可以想成是筆尖在紙上連續移動時所經過的路線，因此線是沒有寬窄的。

線可以分為曲線與直線，如下圖。

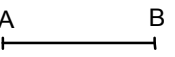


直線：通過兩點用直尺所畫出來的線，也就是說：兩點決定一直線；

「 \leftrightarrow 」符號是表示直線可以向兩邊無限延伸，所以直線是不談長短的。

圖示	記法	讀法
 L	直線 L	直線 L
 A B	\overleftrightarrow{AB}	直線 AB

線段：直線 \overline{AB} 在 A 點與 B 點之間的部分就稱為線段。

圖示	記法	讀法
 A B	\overline{AB} 或 \overline{BA}	線段 AB 或線段 BA

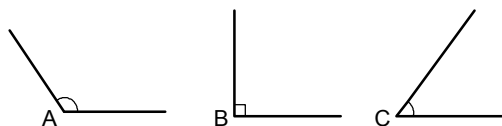
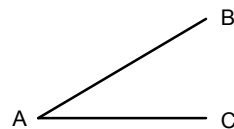
角：兩線段 \overline{AB} 與 \overline{AC} 相交於 A 點形成一個角，如右圖。

記作 $\angle BAC$ 或 $\angle A$ 。

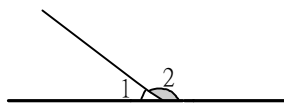
若角的度數 $> 90^\circ$ ，我們稱這個角為**鈍角**，如下圖的 $\angle A$ 。

若角的度數 $= 90^\circ$ ，我們稱這個角為**直角**，如下圖的 $\angle B$ 。

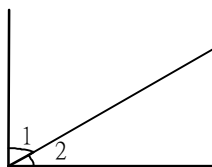
若角的度數 $< 90^\circ$ ，我們稱這個角為**銳角**，如下圖的 $\angle C$ 。



互補：若兩個角的和是一個平角(180°)，我們稱這兩個角互補，如圖， $\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$ ，故我們稱 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互補。



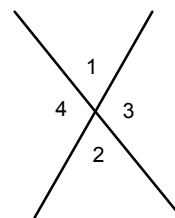
互餘：若兩個角的和是一個直角，我們稱這兩個角互餘，如圖， $\angle 1 + \angle 2 = 90^{\circ}$ ，故我們稱 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互餘。



對頂角：兩直線相交會形成兩組對頂角。如右圖， $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 為對頂角， $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 亦為對頂角。

※對頂角相等，即 $\angle 1 = \angle 2$ ； $\angle 3 = \angle 4$

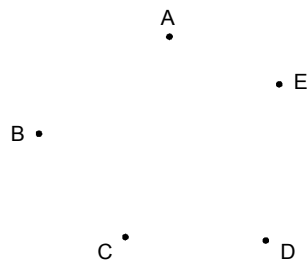
【證明】： $\because \angle 1 + \angle 3 = 180^{\circ}$
 又 $\angle 3 + \angle 2 = 180^{\circ}$
 $\therefore \angle 1 = 180^{\circ} - \angle 3 = \angle 2$



有關點線角的應用：我們已經知道兩點可以決定一條直線，接著要來討論平面上相異的點決定線段數目及角度等相關問題。

【範例】上相異5點A、B、C、D、E，

- (1) 至多可決定幾條直線？
- (2) 至少可決定幾條直線？



【解答】(1) 自A點出發，可得 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD} 、 \overline{AE} 共4條。

自B點出發，可得 \overline{BC} 、 \overline{BD} 、 \overline{BE} 共3條。

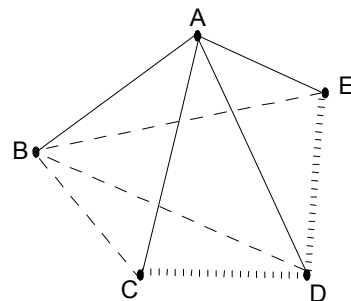
自C點出發，可得 \overline{CD} 、 \overline{CE} 共2條。

自D點出發，可得 \overline{DE} 共1條。

自E點出發，均已連線故0條。

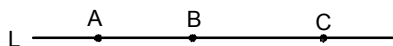
\therefore 共 $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$ 條。

(2) 當5點共線時，可決定最少的1條直線。



結論：平面上相異n點，至多可決定 $\frac{n(n-1)}{2}$ 條直線；至少可決定1條直線(n點共線時)。

【範例】 平行線，L 上有相異三點，V 上有相異四點，除 L、V 外，
由上述七點可決定多少線段？



【解答】 (1) 由 A 出發可決定：

\overline{AX} 、 \overline{AY} 、 \overline{AZ} 、 \overline{AW} 共 4 條。

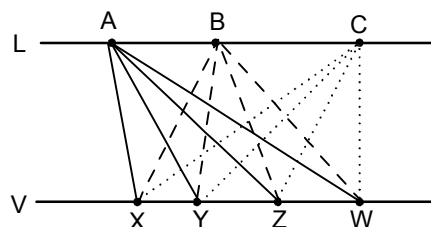
(2) 由 B 出發可決定：

\overline{BX} 、 \overline{BY} 、 \overline{BZ} 、 \overline{BW} 共 4 條。

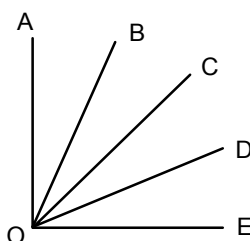
(3) 由 C 出發可決定：

\overline{CX} 、 \overline{CY} 、 \overline{CZ} 、 \overline{CW} 共 4 條。

∴ 總共 $4+4+4=4 \times 3=12$ 。



【範例】 如圖，算一算總共幾個角？



【解答】 (1) 以 \overline{OA} 邊算起有：

$\angle AOB$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOD$ 、 $\angle AOE$ 共 4 個。

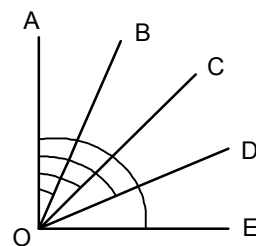
(2) 以 \overline{OB} 邊算起有：

$\angle BOC$ 、 $\angle BOD$ 、 $\angle BOE$ 共 3 個。

(3) 以 \overline{OC} 邊算起有：

$\angle COD$ 、 $\angle COE$ 共 2 個。

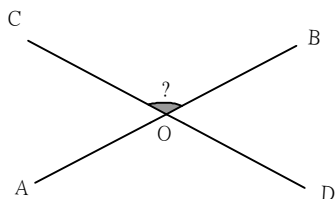
(4) 以 \overline{OD} 邊算起有： $\angle DOE$ 共 1 個。∴ 總共 $4+3+2+1=\frac{4 \times (4+1)}{2}=6$ 個。



【範例】 已知 $\angle 1 = (45-a)$ 度， $\angle 2$ 與 $\angle 1$ 互補，求 $\angle 2$ ？

【解答】 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$
 $= 180^\circ - (45-a)^\circ$
 $= (135+a)^\circ$

【範例】 \overleftrightarrow{AB} 與 \overleftrightarrow{CD} 交於 O 點，已知 $2\angle AOC + 3\angle BOD = 350^\circ$ ，則 $\angle COB = ?$



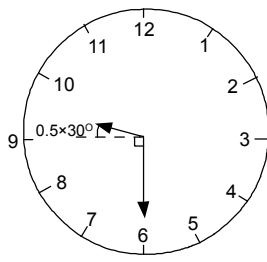
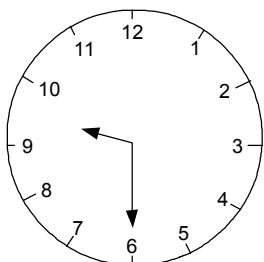
【解答】 $\because \angle AOC = \angle BOD$ (對頂角相等)。

$$\therefore 2\angle AOC + 3\angle BOD = 350^\circ, \quad 5\angle AOC = 350^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 350^\circ \div 5 = 70^\circ$$

$$\text{故 } \angle COB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

【範例】9 點 30 分時，分針與時針的夾角為幾度？



【解答】時針 1 小時走 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

$$\text{時針 1 分鐘走 } \frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ$$

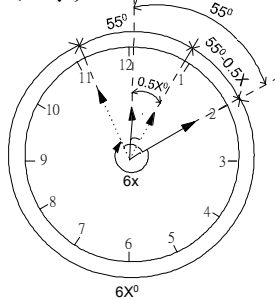
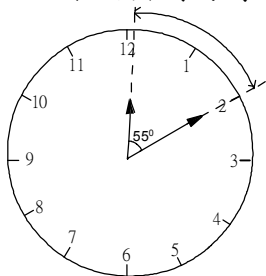
$$\text{分針 1 分鐘走 } \frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$$

$$\therefore \text{夾角} = 0.5^\circ \times 30 + 90^\circ = 105^\circ$$

【範例】12 點多，小明外出吃午餐，出門前發現時針與分針的夾角為 55° ，

吃完飯後時針與分針的夾角仍為 55° ，請問小明出去多久？

(已知小明出門的時間不超過 1 小時)。



【解答】假設出去 X 分鐘

$$\therefore \text{分針走了 } 6X^\circ \text{ (1 分鐘 } 6^\circ), \text{ 時針走了 } 6X^\circ \times \frac{1}{12} = 0.5X^\circ$$

$$\therefore 6X^\circ + 55^\circ + (55^\circ - 0.5X^\circ) = 360^\circ$$

$$X = 45 \frac{5}{11} \text{ 分鐘。}$$



小 試 身 手

【範例一】

平面上相異 10 點，至多可決定幾條直線？

【練習一】

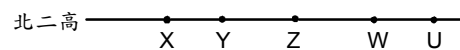
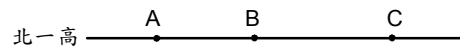
一平面相異 n 點至多可決定 36 條直線，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【範例二】

兩平行線， L 上有相異三點， V 上有相異五點，則此八點可決定多少線段？

【練習二】

兩條高速公路上分別有三個及五個交流道，若想在這些交流道之間做一些直達便道，那麼需要幾條直達便道呢？



【範例三】

3 點 30 分兩針之夾角為幾度？

【練習三】

4 點 42 分兩針之夾角為幾度？

【範例四】

一角比其補角的 3 倍多 24° ，求此角的對頂角度數。

【練習四】

$\angle A$ 的 2 倍與 $\angle B$ 的 5 倍互補，且 $\angle A + \angle B = 60^\circ$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度數。

■ 生活中的平面圖形與應用

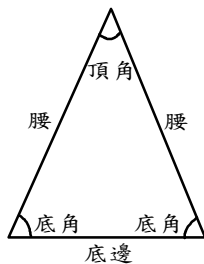
生活中的平面圖形：三角形、四邊形及圓形是最常見的平面圖形，這一節我們將討論有關這些圖形的基本性質。

三角形：一個三角形有三個頂點、三個邊和三個角。

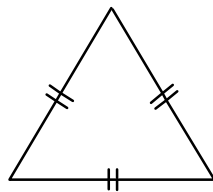
等腰三角形：有兩邊等長的三角形。如下圖，其中等長的兩邊叫做腰，另一邊叫做底邊或底，與底邊相對的角叫做頂角，其餘的兩個角都叫做底角。

等邊三角形：三邊都等長的三角形，叫做正三角形。如下圖，每個正三角形也都是等腰三角形。

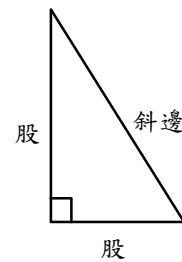
直角三角形：有一個角是直角的三角形。如下圖，其中直角所對的邊叫做斜邊，其餘兩邊叫做股。



等腰三角形



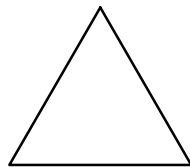
正三角形



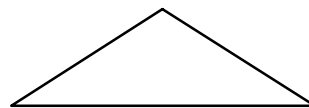
直角三角形

銳角三角形：三內角皆為銳角的三角形，稱為銳角三角形。如下圖。

鈍角三角形：三角形其中一內角為鈍角的三角形，稱為鈍角三角形。如下圖。



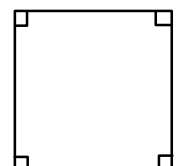
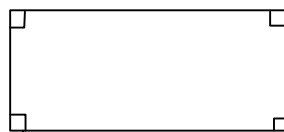
銳角三角形



鈍角三角形

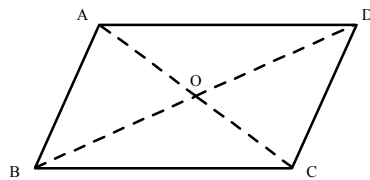
四邊形：一個四邊形有四個頂點、四個邊和四個角。

長方形：四個角都是直角的四邊形，叫做長方形，也稱做矩形。如下圖，長方形相對的兩邊都等長。



正方形：四邊都等長的長方形，如右圖；正方形也是長方形的一種。

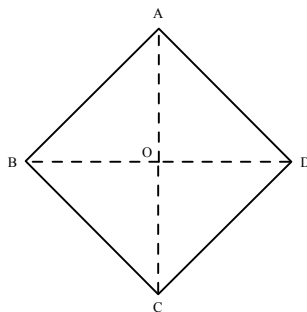
平行四邊形：兩雙對邊分別平行的四邊形，如下圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。



平行四邊形有以下重要性質，後面章節我們會一一證明，現在我們先來了解一些性質：

- 平行四邊形ABCD，兩組對邊分別相等，即 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。
- 平行四邊形ABCD，兩組對角分別相等，即 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ 。
- 平行四邊形ABCD，兩條對角線互相平分，即 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。

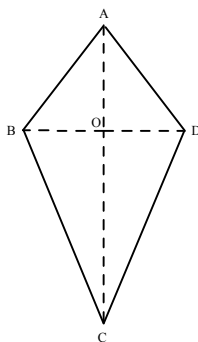
菱形：四邊都相等的四邊形，如下圖， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ 。



菱形有以下性質，後面章節我們會一一證明，現在我們先來了解這些性質：

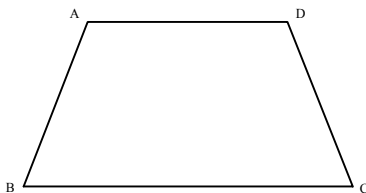
- 兩對角線互相垂直，即 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。
- 兩對角線互相平分，即 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。

箏形：兩雙鄰邊分別相等的四邊形，如下圖， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD}$ 。

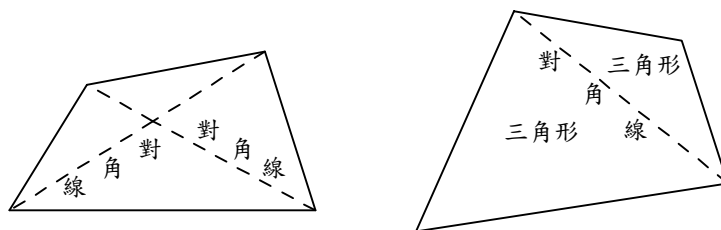


梯形：只有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行的四邊形，如下圖， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。

由定義可知，平行四邊形、菱形、長方形和正方形都不是梯形。



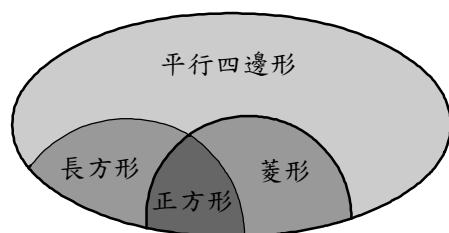
對角線：四邊形中，不相鄰的兩個頂點的連線叫做它的對角線。每一個四邊形都有兩條對角線。四邊形的每一條對角線都把這個四邊形分割成兩個三角形，如下圖。



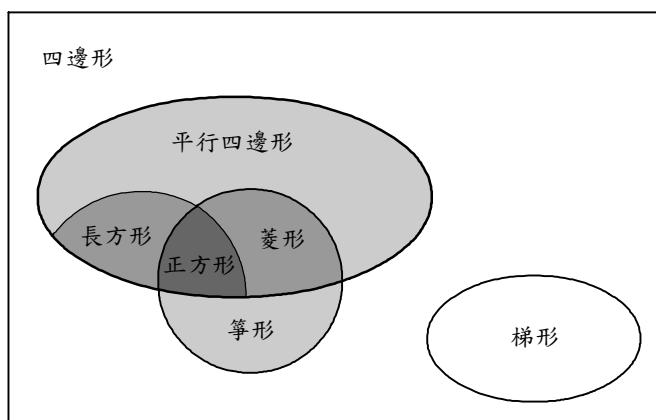
我們可以利用四邊形的對角線性質來簡單的判別某些四邊形：

- a. 對角線互相平分的四邊形必為平行四邊形。
- b. 對角線互相平分且相等的四邊形必為矩形。
- c. 對角線互相平分且垂直的四邊形必為菱形。
- d. 對角線互相平分且垂直、相等的四邊形必為正方形。

關係如下圖：



四邊形的包含關係：由各種四邊形的定義來看，如下圖，可以歸納出四邊形彼此間的關係。



上圖中大範圍包含小範圍，大範圍有的性質，小範圍必定有其性質。反之，小範圍有的性質，大範圍不一定有其性質。

像是平行四邊形有三項性質：(1) 兩雙對邊相等。

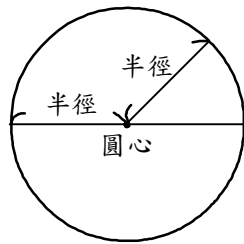
(2) 兩雙對角相等。

(3) 兩對角線互相平分。

則菱形、長方形、正方形皆有上列性質。

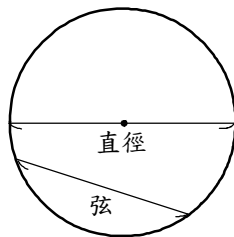
同理，等形的兩雙鄰邊分別相等，對角線互相垂直，菱形與正方形也有同性質；菱形任一對角線會平分其頂角，兩對角線互相垂直平分，正方形亦有相同性質；長方形四個角皆為直角，對角線互相平分且相等，正方形亦會有相同性質；反之，正方形對角線互相垂直，長方形則沒有此性質。正方形對角線等長，菱形及等形則沒有此性質。

圓：在平面上與一固定點的距離等於一固定長度的所有點所組成的圖形。如下圖，固定點叫做圓心，固定長度叫做半徑。圓心與圓上任意點所連的線段也叫做半徑。



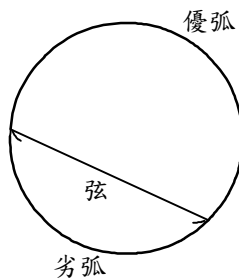
弦：圓上任意兩點所連的線段。

如下圖，如果一弦恰好通過圓心，它就是直徑，所以直徑也是一弦。



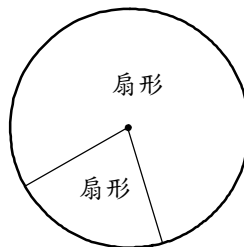
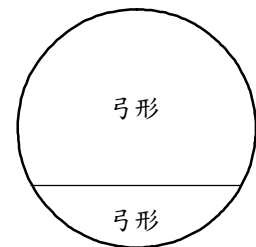
弧：一弦把圓分為兩部分，每一部分都叫做弧。

如下圖，大於半圓的弧叫做優弧；小於半圓的弧叫做劣弧。



弓形：圓的一弦和其所對的一弧所組成的圖形。如右圖。

扇形：圓的兩半徑和其所夾的弧所組成的圖形。如下圖。



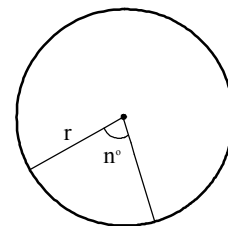
圓形周長及面積的計算公式：若圓形半徑= r ，則圓形周長= $2\pi r$ ，圓形面積= πr^2 。

扇形周長及面積的計算公式：

如右圖，若扇形半徑= r ，圓心角= n° ，則

$$\text{扇形周長} = \left(2\pi r \times \frac{n^\circ}{360^\circ} \right) + 2r,$$

$$\text{圓形面積} = \pi r^2 \times \frac{n^\circ}{360^\circ}.$$



有關簡單幾何圖形的應用

【範例】如右圖，求灰色面積部分的周長及面積。

【解答】周長 = 大弧長 + 小弧長 + 2 × 半徑差

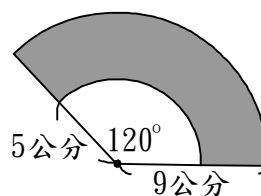
$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 9 \times 2 \times \pi + \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 5 \times 2 \times \pi + 2 \times (9-5)$$

$$= \frac{28}{3} \pi + 8 \quad (\text{公分})$$

面積 = 大扇形面積 - 小扇形面積

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 9 \times 9 \times \pi - \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 5 \times 5 \times \pi$$

$$= \frac{56}{3} \pi \quad (\text{平方公分})$$



【範例】一圓上有相異 6 點：A、B、C、D、E、F，任意兩點成一弦，問此 6 點共可連成幾條弦？

【解答】自 A 點出發，可得 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD} 、 \overline{AE} 、 \overline{AF} 共 5 條。

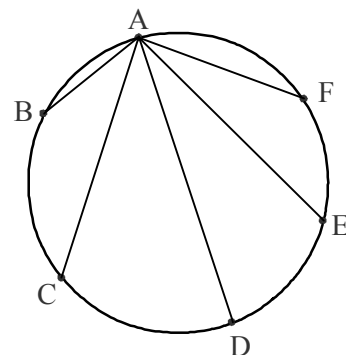
自 B 點出發，可得 \overline{BC} 、 \overline{BD} 、 \overline{BE} 、 \overline{BF} 共 4 條。

自 C 點出發，可得 \overline{CD} 、 \overline{CE} 、 \overline{CF} 共 3 條。

自 D 點出發，可得 \overline{DE} 、 \overline{DF} 共 2 條。

自 E 點出發，可得 \overline{EF} 共 1 條。

∴ 共 $5+4+3+2+1=15$ 條。



【範例】一圓上有相異 6 點，問此 6 點共可決定幾個弧？

【解答】因為 1 條弦可決定 2 個弧，

所以由上題範例可知此 6 點共可決定 $15 \times 2 = 30$ 個弧。



小 試 身 手

【範例一】

一圓上有相異 8 點，任意兩點成一弦，問此 8 點共可連成幾條弦？

【練習一】

一圓上有相異 10 點，問此 10 點共可決定幾個弧？

【範例二】

一圓直徑 12 公分，將其對摺 3 次，求：

- (1) 摺痕將此圓分成幾等分？
- (2) 最後所得扇形面積

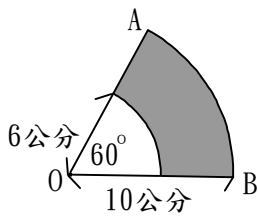
【練習二】

將一圓對摺 4 次，問：

- (1) 摺痕將此圓分成幾等分？
- (2) 最後所得扇形面積與圓面積的比？

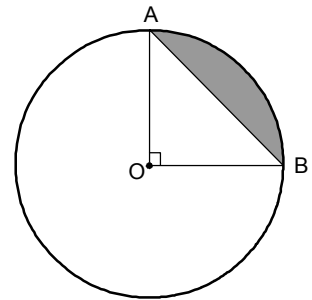
【範例三】

求此斜線部份的周長及面積。



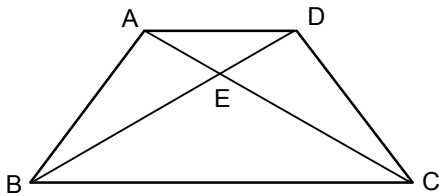
【練習三】

如右圖，此圓半徑為 2 公分，求此斜線部分周長及面積。



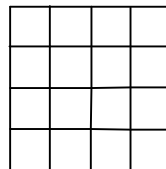
【範例四】

如右圖，分別以 A 、 B 、 C 、 D 、 E 為頂點的三角形有哪些？



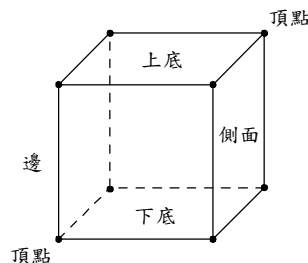
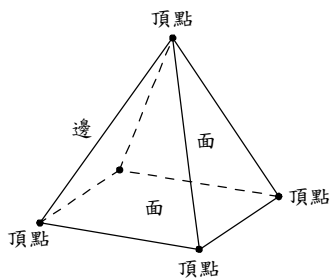
【練習四】

如右圖，請問其中共有多少個正方形？



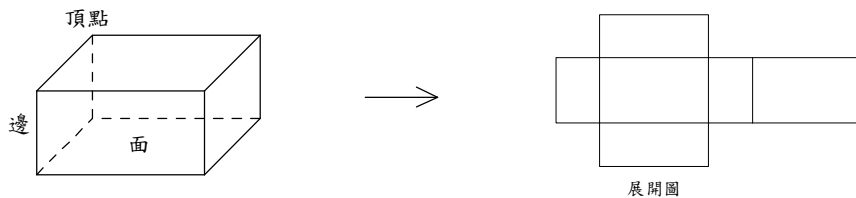
生活中的立體圖形

認識柱體與錐體：在日常生活中，我們可以看到許多簡單的立體圖形，例如：正方體、長方體、角柱、角錐及球……等，其中由多邊形的平面所圍成的立體圖形叫做多面體。在多面體中，圍成此多面體的各多邊形，其相鄰兩個面的交線叫做邊或稜，邊的交點叫做頂點。



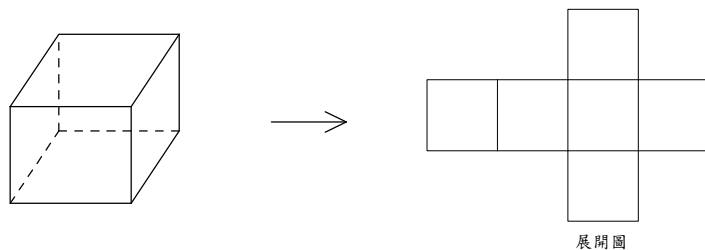
1. 長方體：

- (1) 由 6 個長方形的面所圍成的立體圖形，如下圖。
- (2) 有 8 個頂點，12 個邊與 6 個面。
- (3) 每個面都是長方形，其中上、下兩面全等，左、右兩面全等，前、後兩面全等。
- (4) 相鄰的兩邊一定互相垂直，相鄰的面也一定互相垂直。

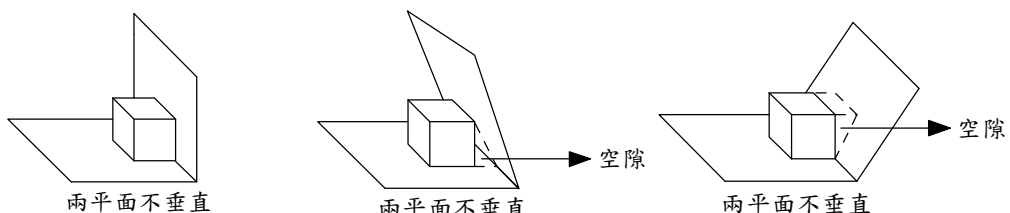


2. 正方體：

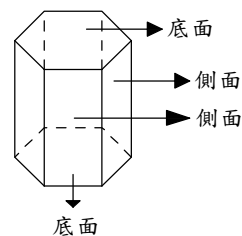
- (1) 由 6 個全等的正方形所圍成的立體圖形，如下圖。
- (2) 有 12 個等長的邊，8 個頂點與 6 個面。



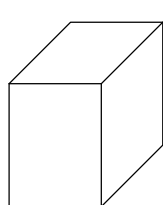
兩平面垂直：長方體中相鄰的兩邊會互相垂直，而它相鄰的兩個面，我們稱為兩個互相垂直的平面。我們要檢驗兩個相交平面是否互相垂直時，可以用長方體來檢驗。將一個長方體緊靠這兩個相交平面，如果長方體的兩面和被量測的兩平面重合時，我們就說這兩個平面互相垂直。



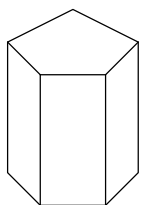
3. **角柱**：角柱是由兩個全等多邊形的底面(或簡稱為底)，和一些長方形的側面所組成的立體圖形。如果一個角柱的兩個底面都是 n 邊形，稱這個角柱為 n 角柱，它有 n 個側面。



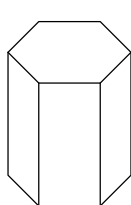
- (1) 直角柱：每個側面都和底面垂直的角柱，叫做直角柱。
- (2) 斜角柱：如果側面和底面不垂直的角柱，叫做斜角柱。
- (3) 正 n 角柱：若一個 n 角柱的底面是正多邊形，則稱為正 n 角柱。
- (4) 在國中數學中，所說的角柱，通常是指直角柱。



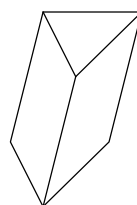
四角柱



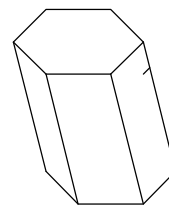
五角柱



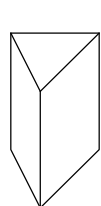
正六角柱



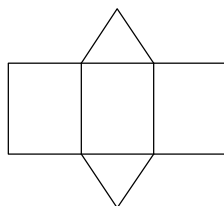
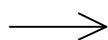
斜角柱



斜角柱



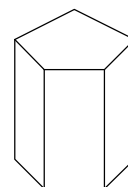
三角柱



展開圖

【範例】觀察右圖的直五角柱，回答下列問題：

- (1) 此五角柱共有多少個面？它們分別是什麼形狀？
- (2) 此五角柱共有多少個邊？共有多少個頂點？



【解答】(1) 共有 7 個面，其中 2 個全等底面是五邊形，5 個側面是長方形。

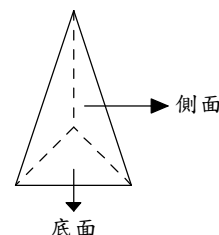
- (2) 上、下兩個底面各是 5 個邊，側面除了底面重複的邊外，尚有 5 個邊，所以共有 15 個邊。

上、下兩個底面各是 5 個頂點，所以共有 10 個頂點。

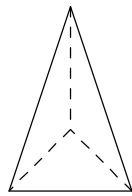
【範例】填填看：下列角柱各有多少個頂點？多少個邊？多少個面？

角柱	頂點數	邊數	面數
六角柱	12	18	8
七角柱	14	21	9

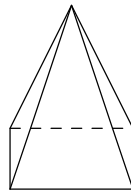
4. **角錐**：角錐是由一個多邊形的底面，和一些三角形的側面所組成的立體圖形。如果一個角錐的底都是 n 邊形，稱這個角錐為 n 角錐，它有 n 個側面。



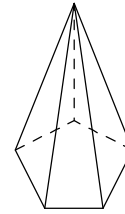
- (1) 直角錐：每個側面是等腰三角形的角錐，叫做直角錐。
- (2) 正 n 角錐：若一個 n 角錐的底面是正多邊形，且每個側面都是等腰三角形，則稱為正 n 角錐。
- (3) 在國中數學中，所說的角錐，通常是指正角錐。



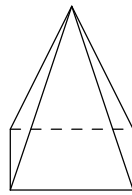
三角錐



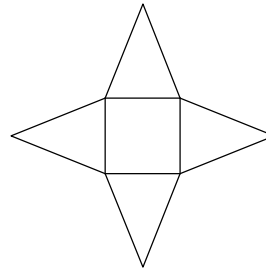
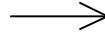
四角錐



五角錐



四角錐



展開圖

【範例】一個正六角錐共有多少個頂點？多少個邊？多少個面？

【解答】正六角錐的底面有 6 個頂點，加上錐頂，共有 7 個頂點。

正六角錐的底面有 6 個邊，加上側面的 6 個邊，共有 12 個邊。

正六角錐有 1 個底面和 6 個側面，共有 7 個面。

【範例】填填看：下列角錐各有多少個頂點？多少個邊？多少個面？

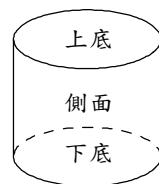
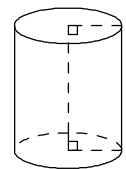
圖形	頂點數	邊數	面數
三角錐	4	6	4
四角錐	5	8	5
五角錐	6	10	6
六角錐	7	12	7

5. **圓柱**：圓柱是由兩個等圓形的底面，和一個側面所構成的立體圖形。

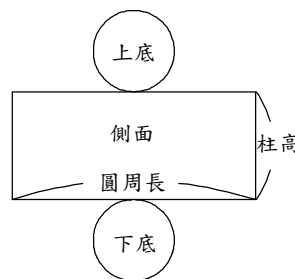
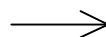
圓柱沒有頂點與邊，側面可以展開成一個長方形，其一邊長為底圓的圓周長，另一邊長為柱高。

(1) 直圓柱：兩底圓心的連線與兩底的所有半徑都垂直的圓柱。

(2) 國中數學中，只討論直圓柱。



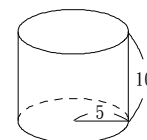
柱高



展開圖

【範例】如右圖，計算圓柱側面展開後的周長。(單位：公分)

【解答】 $(2 \times 5 \times \pi + 10) \times 2 = 20\pi + 20$ (公分)

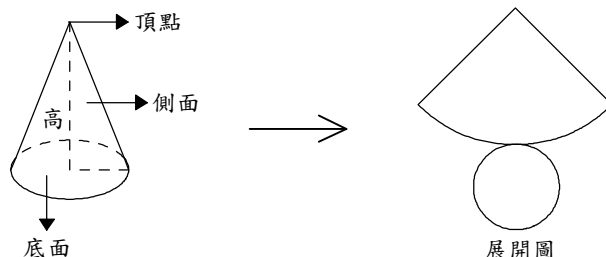


6. **圓錐**：圓錐是由一個圓形的底面、一個頂點和一個側面所構成的立體圖形。

圓錐沒有邊，側面可以展開成一個弧長等於底圓圓周長的扇形。

(1) 直圓錐：頂點與底圓心的連線與底的所有半徑都垂直的圓錐。

(2) 國中數學中，只討論直圓錐。

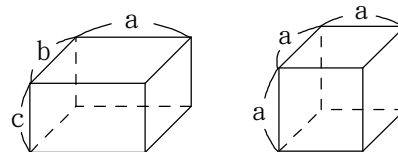


表面積與體積計算：

1. **長方體**：長、寬、高各為 a 、 b 、 c 的長方體，

$$\text{表面積} = 2(ab + bc + ca),$$

$$\text{體積} = abc.$$



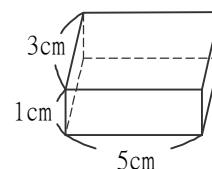
2. **正方體**：邊長為 a 的正方體，表面積 $= 6a^2$ ，體積 $= a^3$ 。

【範例】 求右圖中，長方體的表面積與體積各為多少？

【解答】

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 2 \times (\text{長} \times \text{寬} + \text{寬} \times \text{高} + \text{長} \times \text{高}) \\ &= 2 \times (5 \times 3 + 3 \times 1 + 5 \times 1) \\ &= 46 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高} = 5 \times 3 \times 1 = 15 \text{ (cm}^3\text{)}$$

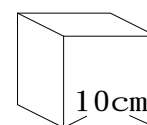


【範例】 求右圖中，正方體的表面積與體積為多少？

【解答】

$$\text{表面積} = 6 \times 10 \times 10 = 600 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{體積} = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ (cm}^3\text{)}$$



3. **角柱**：表面積 $= (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積})$ ，體積 $= \text{底面積} \times \text{高}$ 。

【範例】 求右圖中立體圖形的表面積與體積？

【解答】

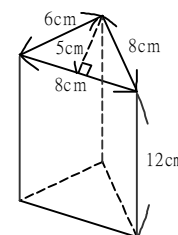
$$\text{底面積} = 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 20$$

$$\text{側面長方形面積} = 6 \times 12 + 8 \times 12 + 8 \times 12 = 264$$

$$\text{表面積} = 2 \times \text{底面積} + \text{側面長方形面積}$$

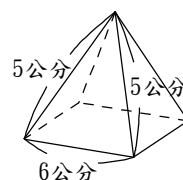
$$= 2 \times 20 + 264 = 304 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{體積} = \text{底面積} \times \text{高} = 20 \times 12 = 240 \text{ (cm}^3\text{)}$$



4. **角錐**：表面積＝(底面積)＋(側面積)。

【範例】右圖是一個四角錐的玩具金字塔，其底面是邊長6公分正方形，四個側面是腰長5公分的等腰三角形，求此四角錐的表面積與體積？



【解答】等腰三角形的高＝ $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\text{側面三角形面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

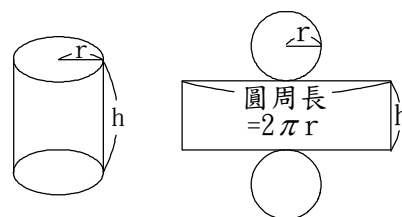
$$\text{底面積} = 6 \times 6 = 36$$

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= \text{底面積} + 4 \times \text{側面三角形面積} \\ &= 36 + 4 \times 12 = 36 + 48 = 84 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

5. **圓柱**：底面半徑為 r ，高為 h ，

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 2 \times \text{底面積} + \text{圓柱側面積} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{aligned}$$

$$\text{體積} = \text{底面積} \times \text{高} = \pi r^2 h$$



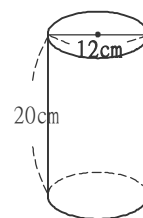
【範例】求右圖圓柱的表面積與體積？

【解答】底面積＝ $6 \times 6 \times \pi = 36\pi$

$$\begin{aligned} \text{圓柱側面積} &= \text{長方形面積} \\ &= 2 \times 6 \times \pi \times 20 = 240\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{表面積} &= 2 \times \text{底面積} + \text{圓柱側面積} \\ &= 2 \times 36\pi + 240\pi = 312 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\text{體積} = 36\pi \times 20 = 720\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

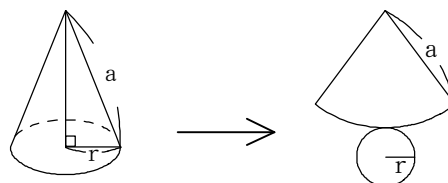


6. **圓錐**：

case 1：底面半徑為 r ，扇形半徑為 a ，

表面積＝底面積＋側面積(扇形)

$$= r^2\pi + a^2\pi \times \frac{2r\pi}{2a\pi}$$



【說明】因圓錐展開後的扇形弧長＝底面圓周長＝ $2r\pi$ ，

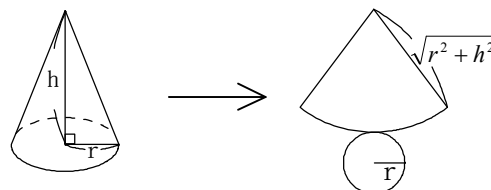
$$\text{所以扇形的度數為 } \frac{2r\pi}{2a\pi}。$$

case 2：底面半徑為 r ，高為 h ，

則扇形半徑為 $\sqrt{r^2 + h^2}$ ，

表面積＝底面積＋側面積(扇形)

$$= r^2\pi + \left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 \pi \times \frac{2r\pi}{2\sqrt{r^2 + h^2}\pi}$$



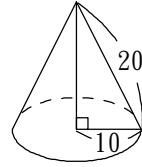
【範例】如右圖，求此圓錐的表面積。(單位：公分)

【解答】圓錐展開後的扇形弧長占圓周的

$$\frac{2 \times 10\pi}{2 \times 20\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\text{故側面積} = 20^2 \times \frac{1}{2} = 200\pi$$

$$\text{表面積} = \text{底面積} + \text{側面積} = 10 \times 10 \times \pi + 200\pi = 300\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

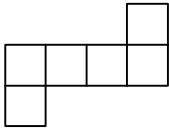


小 試 身 手

【範例一】

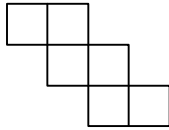
在下面的四個圖中，哪些是正確的正方體展開圖？請在 () 內打 \checkmark ：

(1)



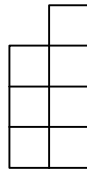
()

(2)



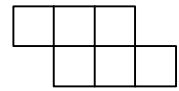
()

(3)



()

(4)

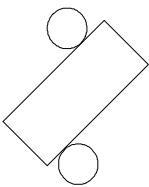


()

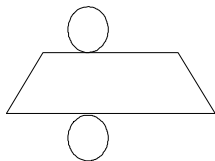
【練習一】

下圖哪幾個圖形是圓柱體的展開圖？()。

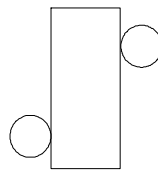
(1)



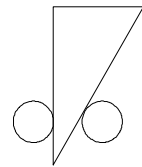
(2)



(3)



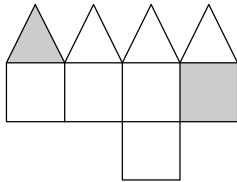
(4)



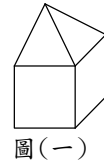
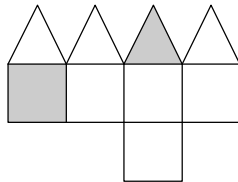
【範例二】

圖(一)是由白色紙拼成的立體圖形，將此立體圖形中的兩面塗上顏色，如圖(二)所示。下列四個圖形中哪一個是圖(二)的展開圖？

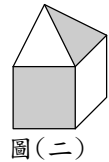
(A)



(B)

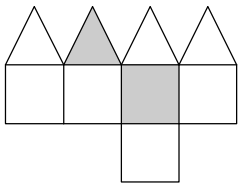


圖(一)

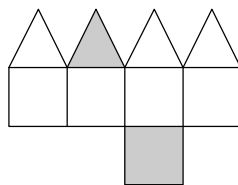


圖(二)

(C)



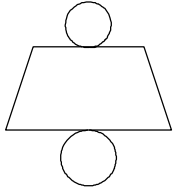
(D)



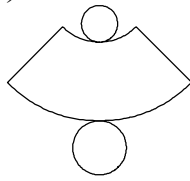
【練習二】

(1) 右圖為一立體圖形，則下列(A)~(D)四個平面圖形中，何者為此立體圖形所對應的展開圖？ ()。

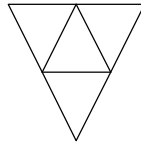
(A)



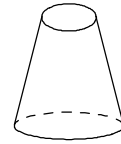
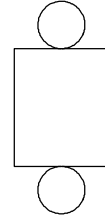
(B)



(C)

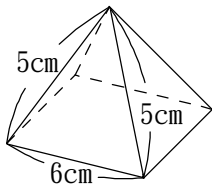


(D)



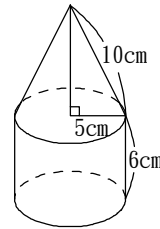
【範例三】

如下圖，下半部邊長為 6 公分的正方體，上半部是腰長 5 公分的正四角錐，求此多面體的表面積。



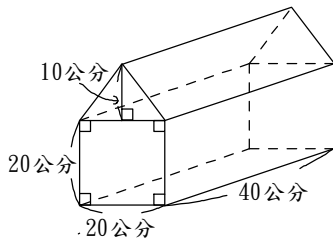
【練習三】

如下圖，求此多面體的表面積。



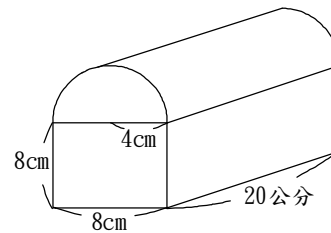
【範例四】

如下圖，求五角柱形的工具箱體積。



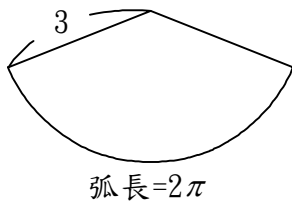
【練習四】

如圖所示，工具箱的蓋子是圓柱的一半，盒身是長方體，求工具箱體積。



【範例五】

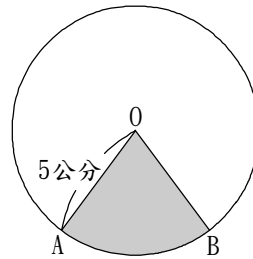
下圖是一個圓錐側面展開後的扇形。



- (1) 求此扇形兩半徑所夾的圓心角度數。
- (2) 求此圓錐的底面積。
- (3) 求此圓錐的表面積。

【練習五】

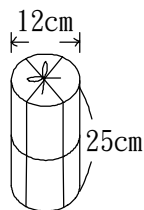
如圖示，已知圓 O 的半徑為 5 公分，扇形 OAB 的面積恰為圓面積的 $\frac{1}{5}$ 。求：



- (1) 扇形 OAB 的面積為多少平方公分？
- (2) 扇形 OAB 兩半徑所夾的圓心角為多少度？
- (3) 扇形 OAB 的弧長為多少公分？

【範例六】

逢甲茶行賣出一罐茶葉，店員用一張包裝紙包裝側面，左右重疊 3 公分，再用包裝繩如包裝，打結處是 15 公分。



- (1) 求包裝紙的長、寬各多少公分？
- (2) 需要繩子多少公分？(π 以 3.14 代入)

【練習六】

玲玲將一個圓柱體半徑為 5 公分，柱高為 20 公分的果凍筒，放在一個長方體的盒子裡，盒子，盒子至少還有多少空間？(π 以 3.14 代入)

