尺規作圖

線與角的尺規作圖

平面幾何作圖中，有很大一部份是尺規作圖。所謂的『尺規作圖』，即是限制只能使用沒有記號的直尺和圓規，在紙上有限次作出曲線。為什麼作圖要有這樣的限制？首先，從希臘的學術風潮來看，古希臘人認為,歐幾裡得幾何的理論是最完美的,按照它的公理系統推證出來的結論才是最準確可靠的,直尺上的刻度是不可靠的。但是幾何離不開作圖,為了把不準確不可靠的程度降到最低,仿照它的公理,規定了作圖公法,選取了最少的工具和最簡單的功能,由此產生了尺規作圖法。

尺規作圖：在繪製幾何圖形時，只能使用直尺和圓規來作圖。(其中的直尺，就是沒有刻度、只能畫直線的尺)，現在我們先來做以下有關線段及角的基本作圖。

【範例】 等線段作圖。

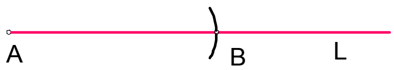
【已知】 已知一線段，長度為 a。

【求作】 用直尺和圓規畫一線段，使它和 a 等長。

【作法】 (1) 畫一直線 L，在 L 上任取一點 A。

(2) 以 A 為圓心，a 為半徑畫弧，

交 L 於 B 點，則 $\overline{AB}$ 即為所求。



【範例】 線段和的尺規作圖。

【已知】 已知兩線段，長度為 a、b。

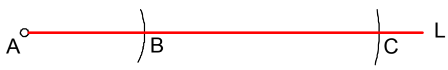
【求作】 利用直尺、圓規作出長為 a+b 線段。

【作法】 步驟一：利用直尺先畫一線段 L。

步驟二：設線段的一端為 A。

步驟三：以線段 a 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。

步驟四：以線段 b 為半徑，以 B 點為圓心畫弧交線段 L 於 C 點。



步驟五：$\overline{AC}$ 即為所求。

【範例】 線段差的尺規作圖。

【已知】 已知兩線段，長度為 a、b。

【求作】 利用直尺、圓規作出長為 a－b 線段。

【作法】 步驟一：利用直尺先劃一線段 L。

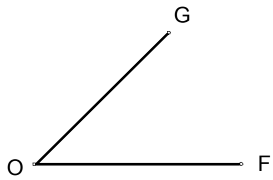
步驟二：設線段的一端為 A。

步驟三：以線段 a 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。

步驟四：以線段 b 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 *C* 點。

步驟五：$\overline{CB}$ 即為所求。

【範例】 等角作圖。

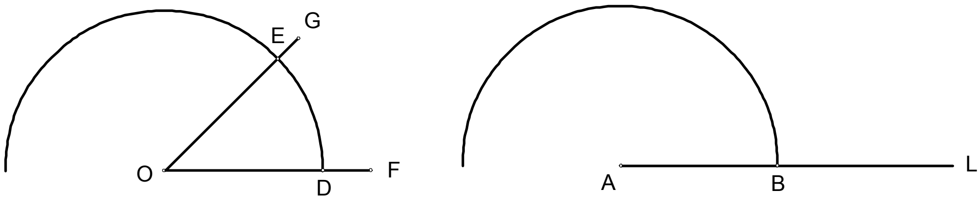


【已知】 $\angle$GOF。

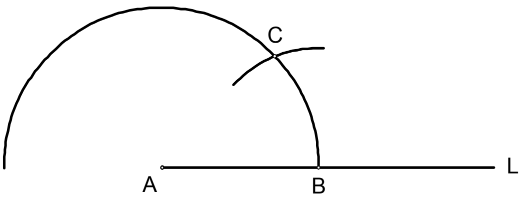
【求作】 一角 $\angle$CAB，使 $\angle$CAB＝$\angle$GOF。

【作法】 步驟一：先用直尺劃一線段 L，設線段的一端點為 A。

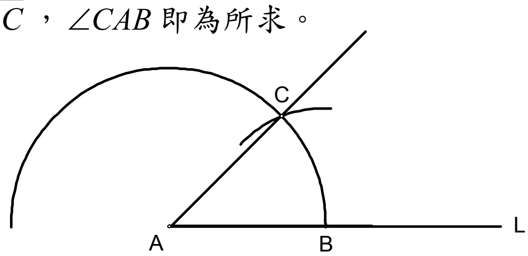
步驟二：以適當長為半徑，以 O 點為圓心畫弧，交 $\overline{OF}$ 於 D 點，交 $\overline{OG}$ 於 E 點。以相同半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。



步驟三：以 $\overline{ED}$ 為半徑，*B* 為圓心畫弧交半圓於 *C* 點。



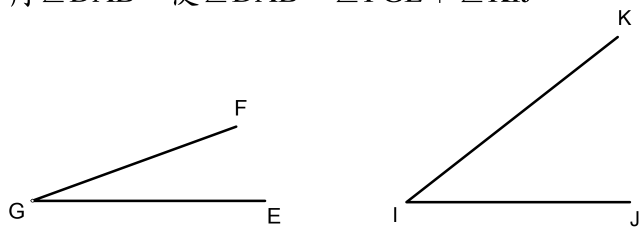
步驟四：連 $\overline{AC}$ ，$\angle CAB$ 即為所求。



【範例】 兩角和的尺規作圖。

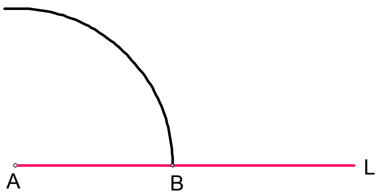
【已知】 ∠FGE、∠KIJ。

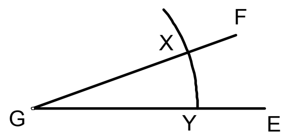
【求作】 一角∠DAB，使∠DAB＝∠FGE＋∠KIJ。

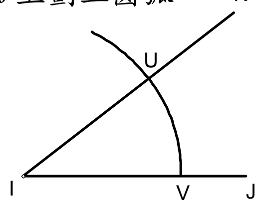


【作法】 步驟一：畫直線L，設端點為A。

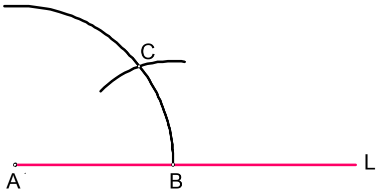
步驟二：以相同半徑，在直線L、∠FGE及∠KIJ上劃三圓弧。



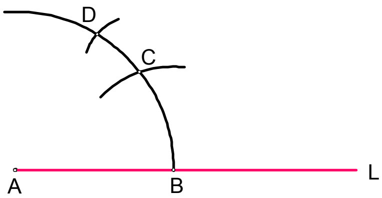




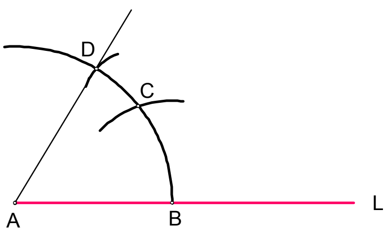
步驟三：$\overline{UV}$為半徑，B為圓心畫弧，得交點為C。



步驟四：$\overline{XY}$為半徑，C為圓心畫弧，得交點為D。



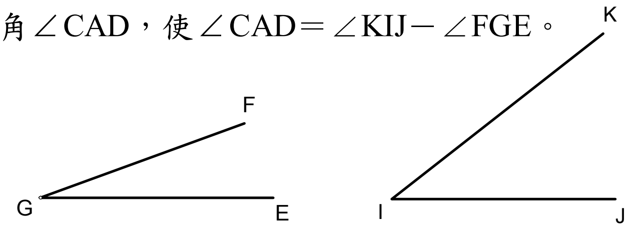
步驟五：連$\overline{AD}$，∠DAB即為所求。



【範例】兩角差的尺規作圖。

【已知】∠FGE、∠KIJ。

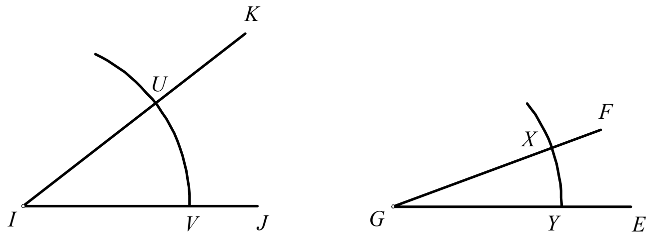
【求作】一角∠CAD，使∠CAD＝∠KIJ－∠FGE。



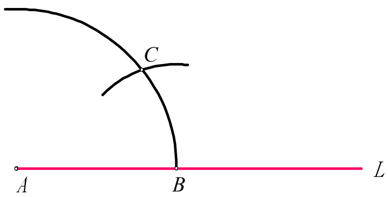
【作法】 步驟一：畫直線 L。

步驟二：設端點為 A。

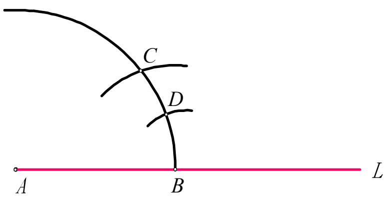
步驟三：同一半徑，劃三圓弧。



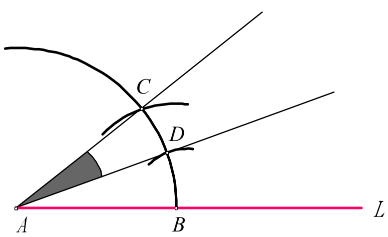
步驟四：$\overline{UV}$ 為半徑，B 為圓心畫弧，得交點為 C。



步驟五：$\overline{XY}$ 為半徑，B 為圓心畫弧，得交點為 D。



步驟六：連 $\overline{AC}$、$\overline{AD}$，∠CAD 即為所求。

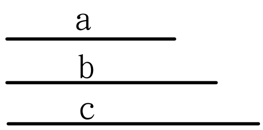


小 試 身 手

【範例一】
【已知】兩線段長度分別為 a、b
【求作】一線段其長度為 2a－b

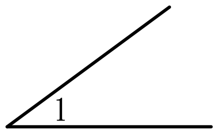
【作法】

【練習一】
【已知】三線段長度分別為 a、b、c
【求作】一線段其長度為 a＋b－c



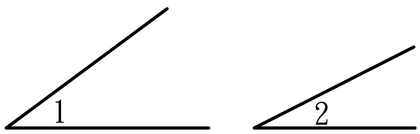
【作法】

【範例二】
【已知】有一角為$\angle 1$
【求作】某一角其角度＝$180^{0}-\angle 1$



【作法】

【練習二】
【已知】有兩角分別為$\angle 1$、$\angle 2$
【求作】某一角其角度＝$2\angle 1-\angle 2$



【作法】

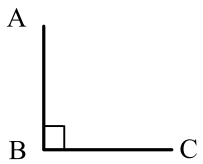
垂直與平分及尺規作圖

在前面我們已經學會了線段與角的基本作圖，想想看，假如利用這些技巧，有辦法直接做出直角三角形、正方形或菱形嗎？所以我們將再進一步學習如何利用尺規作圖來作垂直及平分的技巧，在此之前我們先介紹一些基本名詞。

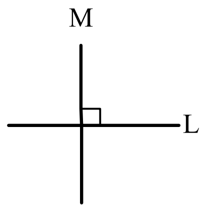
直角與垂直

直角：當一個角的度數是 90^{0} 時，叫做直角。

如圖一，$\angle ABC = 90^{0}$。



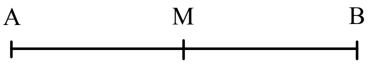
圖一



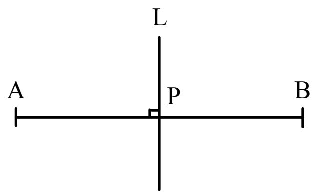
圖二

垂直：當兩條直線或線段相互成直角時，稱這兩條直線或線段互相垂直。如圖二，L 與 M 兩直線互相垂直以 $L \perp M$ 表示。

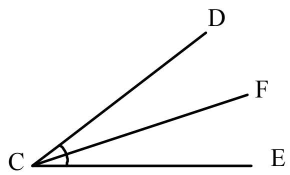
線段中點：若 M 是線段 $\overline{AB}$ 上的一點，且 $\overline{AM} = \overline{MB}$，稱 M 點為線段 $\overline{AB}$ 的中點。



中垂線：直線 L 垂直於線段 $\overline{AB}$，且其交點 P 平分線段 $\overline{AB}$，則直線 L 叫做線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線或中垂線。



角平分線：直線 $\overleftrightarrow{CF}$ 把 $\angle DCE$ 平分成兩個相等的角，也就是 $\angle DCF = \angle FCE$，則我們說直線 $\overleftrightarrow{CF}$ 是 $\angle DCE$ 的角平分線或分角線。



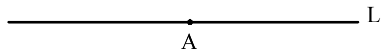
有關垂直、平分的尺規作圖：

在此我們要來做以下 5 個有關垂直與平分的尺規作圖

1. 過直線上一點作此直線的垂線。
2. 過直線外一點作此直線的垂線。
3. 給任一線段求作此線段中點(中垂線)。
4. 給任一角度求作此角的平分線。
5. 中垂線應用－將線段 $\overline{AB}$ 分成四等分。

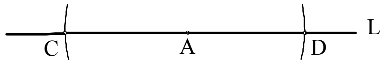
【範例】過直線上一點作此直線的垂線。

【已知】直線 L 和 L 上一點 A。

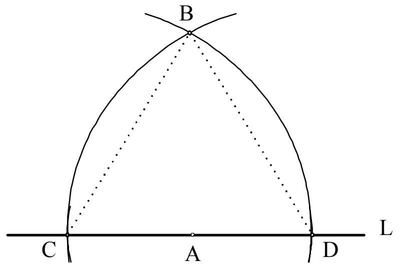


【求作】畫一直線通過 A，且與 L 垂直。

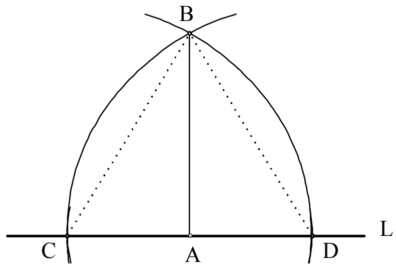
【作法】步驟一：以適當長為半徑，A 為圓心畫圓弧，交 L 於 C、D 兩點。



步驟二：以 $\overline{CD}$ 為半徑，C、D 為圓心畫兩圓弧，設其交點為 B。

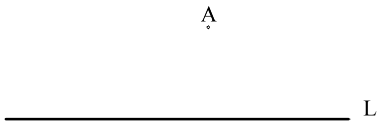


步驟三：連 $\overline{AB}$，即為所求。



【範例】過直線外一點求作過此點與此直線垂直的直線。

【已知】直線L與L外一點A。

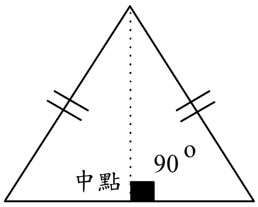


【求作】畫一直線，經過A點，且垂直於L。

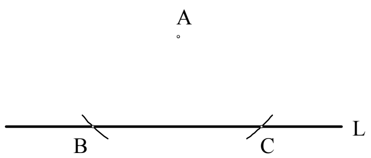
【作法一】

作圖原理：將等腰三角形對摺後，所得到的摺線其實是一條底邊的中垂線。

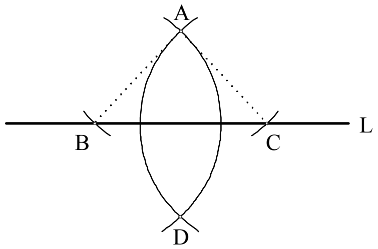
利用此概念，我們可作出過線上一點的垂直線。



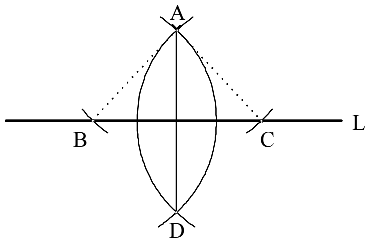
步驟一：取直線 L 外的任意點 A，以 A 點為圓心，適當長為半徑，畫弧，交 L 於 B、C 兩點。



步驟二：以 $\overline{BA}$ 為半徑，分別以 B、C 為圓心，畫弧，設兩弧交點為 D。

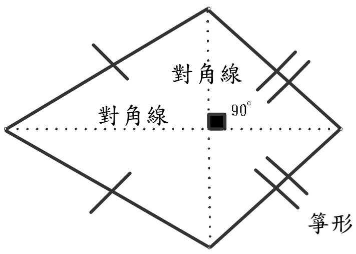


步驟三：連 $\overline{AD}$，即為所求。

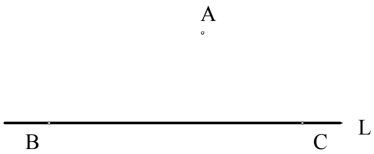


【作法二】

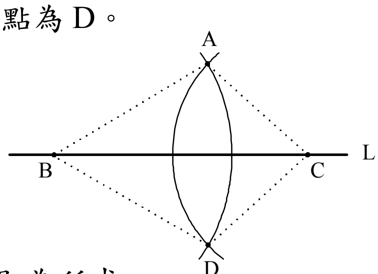
作圖原理：箏形的對角線相互垂直，利用這個概念可以完成，過線外一點垂線的尺規作圖。



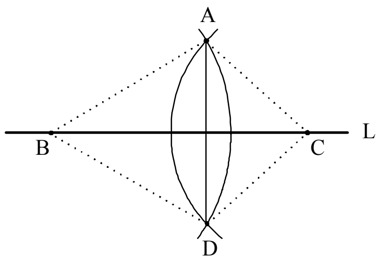
步驟一：在 L 上取 B、C 兩點(大約在 A 點的兩側)。



步驟二：以 $\overline{BA}$ 為半徑、B 為圓心，畫弧，以 $\overline{CA}$ 為半徑、C 為圓心，畫弧，設兩弧交點為 D。

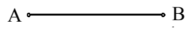


步驟三：連 $\overline{AD}$，即為所求。



【範例】給任一線段求作此線段中點(中垂線) 。

【已知】線段$\overline{AB}$。

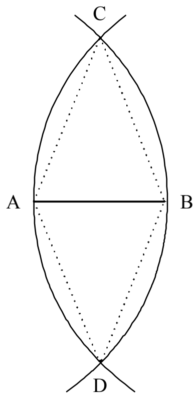


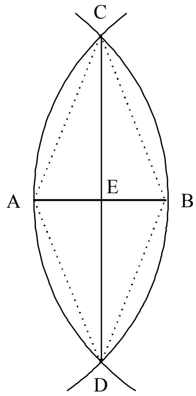
【求作】AB的中點。

【作法】步驟一：分別以A與B為圓心，取大於$\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$的長為半徑畫弧，

設此二弧相交於C、D兩點。

步驟二：連接$\overline{CD}$，則$\overline{CD}$與$\overline{AB}$的交點E即為所求的中點。



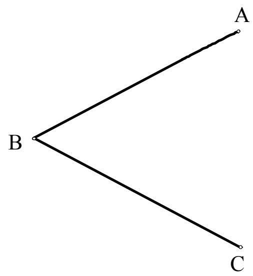


【範例】給一任意角度作此角的平分線。

【已知】某任意角∠ABC。

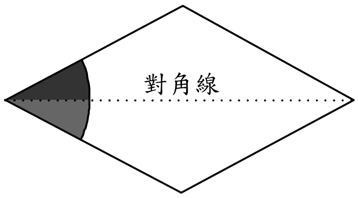
【求作】∠ABC的角平分線。

【作法】

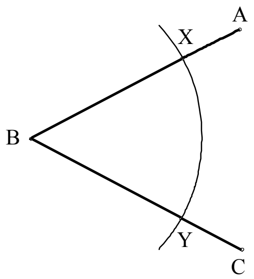


作圖原理：菱形的對角線可把自己等分成兩塊，因此，菱形的對角線也是角平分線。

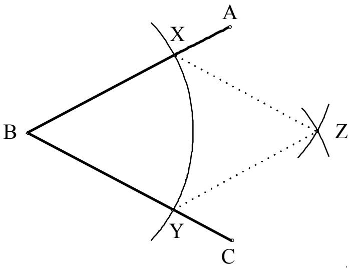
所以，作角平分線也就是在作一個菱形的對角線。



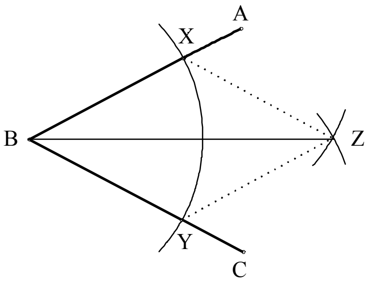
步驟一：以適當長為半徑，B 點為圓心畫弧交$\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$於 X、Y 兩點。



步驟二：以相同的半徑，X、Y 為圓心畫兩個圓弧，設其交點為 Z。



步驟三：連 $\overline{BZ}$，即為∠ABC 的角平分線。



【範例】中垂線應用－將某一線段等分。

【已知】某一線段 $\overline{AB}$。

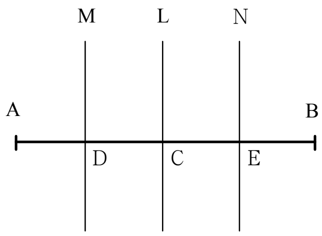
【求作】將線段 $\overline{AB}$ 分成四等分。

【作法】步驟一：作 $\overline{AB}$ 的中垂線L，交 $\overline{AB}$ 於C點。

步驟二：作 $\overline{AC}$ 的中垂線 M，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。

步驟三：作 $\overline{BC}$ 的中垂線 N，交 $\overline{AB}$ 於 E 點，

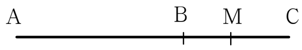
則 C、D、E 三點將 $\overline{AB}$ 四等分。



【結論】將一線段 2^n 等分，需作中垂線「2^n-1」次。

【範例】如右圖，$\overline{AB}=7$ 公分，$\overline{AC}=11$ 公分，

又 M 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{AM}=$______公分。



【解答】 $\overline{BC}=11-7=4$ 公分。

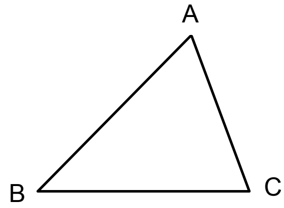
Θ M 為 $\overline{BC}$ 中點 $\Rightarrow \overline{BM}=\overline{CM}=2$ 公分。

$\therefore \overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}=7+2=9$ 公分。

小 試 身 手

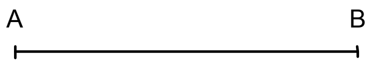
【範例一】

用尺規作圖在ΔABC中過 A 點作$\overline{BC}$上的高。



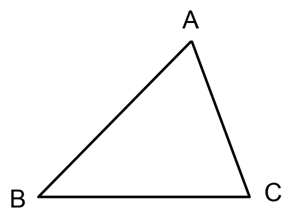
【練習一】

用尺規作圖將$\overline{AB}$分成 1:7。



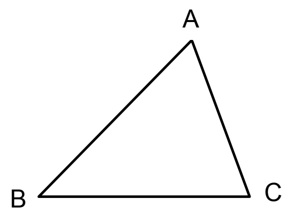
【範例二】

用尺規作圖作已知三角形兩邊中點的連線。



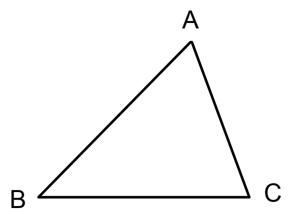
【練習二】

用尺規作圖作出三角形各頂點到對邊中點的連線。



【範例三】

用尺規作圖作出已知三角形三內角的平分線。

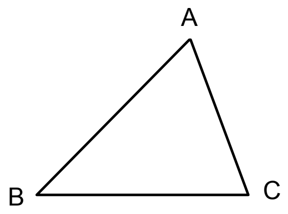


【練習三】

用尺規作圖作出一個 45 度的角。

【範例四】

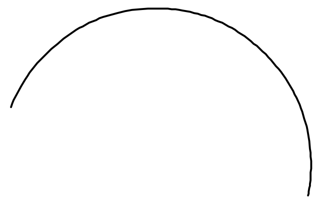
用尺規作圖作出已知三角形三邊的中垂線



【練習四】

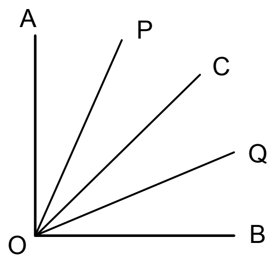
小名用圓規畫圓，不小心鉛筆斷了，只劃出右邊的圓弧，

請你找出圓心並把圓畫出來。



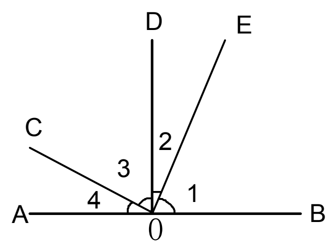
【範例五】

如圖，$\overline{OA}\perp\overline{OB}$，若直線 OP 平分角∠AOC，直線 OQ 平分角∠BOC，則∠POQ＝______。



【練習五】

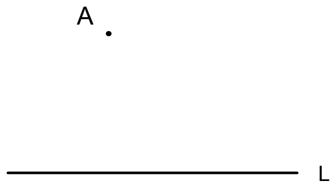
如圖，$\overline{DO}\perp\overline{AB}$，$\overline{CO}\perp\overline{OE}$，∠1＝55°，則∠2＝_____，∠3＝______，∠4＝_____



平行尺規作圖

在前面的作圖，都是有關垂直的作圖部分，但在幾何學中我們亦常用到平行的觀念及性質，所以我們接著來介紹如何畫平行線的尺規作圖。

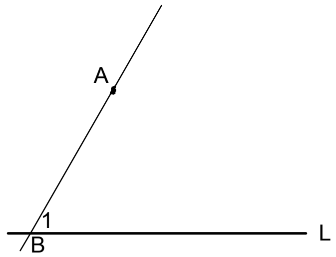
平行尺規作圖：給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。



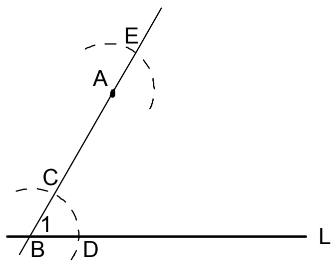
【已知】直線 L 與線外一點 A。

【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

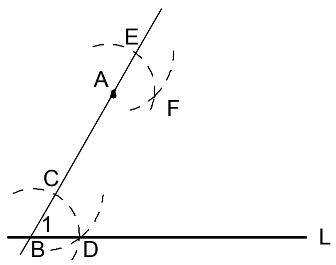
【作法一】步驟一：過線外一點 A 隨意畫與 L 交錯之直線，交直線 L 於 A 點，所設成的角為∠1。



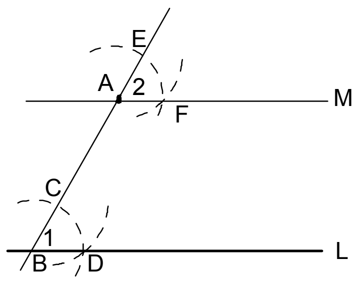
步驟二：分別以 A、B 為圓心，相同長度為半徑畫弧，交點分別為 C、D、E。



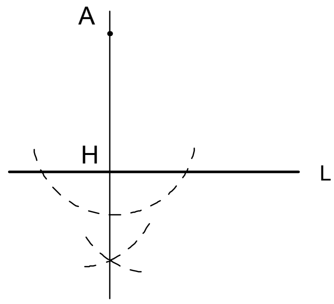
步驟三：以 E 為圓心，$\overline{CD}$ 為半徑畫弧，交點為 F 點。



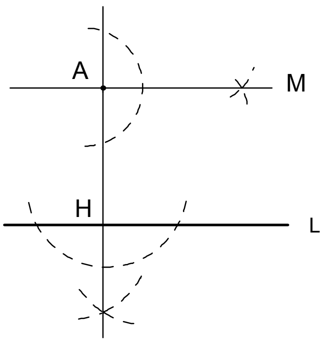
步驟四：連接 $\overline{AF}$ 線段即為所求。



【作法二】 步驟一：過 A 點作 $\overleftrightarrow{AH} \perp L$。



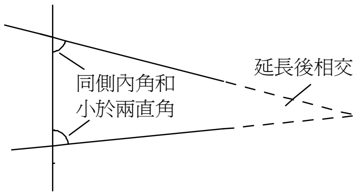
步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 $\overleftrightarrow{AH}$，則 M//L。



平行線性質與應用

古希臘的幾何，也就是歐幾里德的幾何是由公設所建立，其中公設五是很重要的，此公設又稱之為平行公設，是有關平行的幾何。

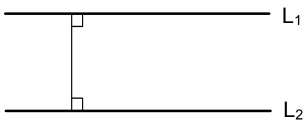
【公設五】若一直線和兩直線相交，且其中一側的同側內角和小於兩直角，則將此兩直線延長後，會交於同側內角和小於二直角的一側。



平行線的定義與性質

平行線的定義:

由【公設五】我們給定兩直線將平行的定義。在平面的兩條直線，若有一直線能同時垂直於這兩條直線，就說這兩條直線互相平行。且平行的兩條直線永不相交。如下圖，直線 L_1 與 L_2 平行，記作 $L_1 /\!/ L_2$，讀作「L_1 平行於 L_2」。

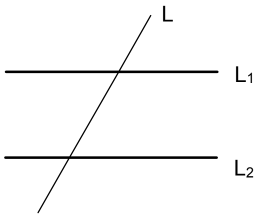


平行觀念：

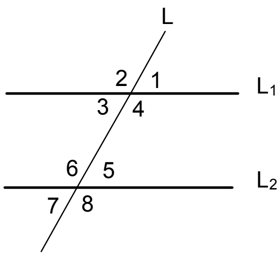
(1) 兩平行線之間保持相同的距離，且無限延伸後沒有交點。

(2) 一線段若垂直於平行線中的一條直線，必垂直於平行線中的另一條直線。

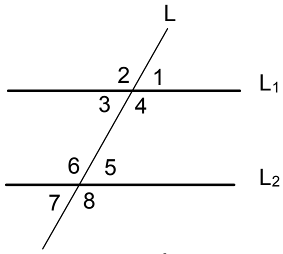
截線：在一平面上，直線 L 分別與直線 L_1 與 L_2 相交於不同兩點時，則 L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。如下圖，L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。



截角：直線 L 為 L_1 與 L_2 的截線，形成 8 個截角，如下圖。

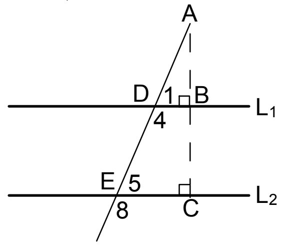


(1)同位角相等：



$\angle 1$ 在 L_1 的右上方，$\angle 5$ 在 L_2 的右上方，位置相同都在右上方，故稱 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 為同位角，同理，$\angle 4$ 與 $\angle 8$、$\angle 2$ 與 $\angle 6$、$\angle 3$ 與 $\angle 7$ 都是同位角。在此我們可知:

$\angle 1=\angle 5$；$\angle 4=\angle 8$；$\angle 2=\angle 6$；$\angle 3=\angle 7$。



【證明】如右圖，做 $\overline{AC}$ 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2。

在 ΔADB 與 ΔAEC 中，$\angle B=\angle C$ 皆為直角，

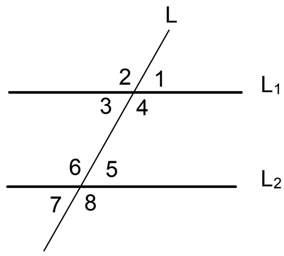
且 $\angle BAD=\angle CAE$。

在 ΔADB 中，$\angle A+\angle B+\angle 1=180^0$（三角形內角和 180^0）。

在 ΔAEC 中，$\angle A+\angle C+\angle 5=180^0$（三角形內角和 180^0）。

$\Rightarrow \angle 1=\angle 5$，故同位角相等。

(2)內錯角相等：



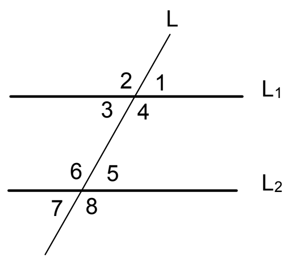
$\angle 5$ 與 $\angle 3$、$\angle 4$ 與 $\angle 6$，都在 L_1 與 L_2 的內側，但交錯在 L 的兩邊，故稱為內錯角，在此我們可知 $\angle 3=\angle 5$；$\angle 4=\angle 6$。

【證明】如右圖，$\because \angle 1=\angle 3$(對頂角相等)

又Θ $\angle 1=\angle 5$(同位角相等)

$\therefore \angle 3=\angle 5$，故內錯角相等。

(3)同側內角互補：



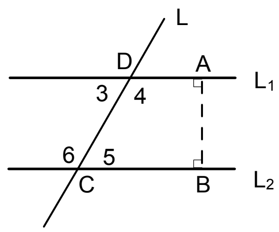
$\angle 5$ 與 $\angle 4$ 都在 L_1 與 L_2 的內側，且在 L 的同一側，故稱為同側內角；同理，$\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也為同側內角。

在此我們可知 $\angle 4+\angle 5 = 180^0$；$\angle 3+\angle 6 = 180^0$。

【證明一】$\angle 1+\angle 4=180^0$

$\because \angle 1=\angle 5$(同位角相等)

$\therefore \angle 4+\angle 5=180^0$



【證明二】如右圖，做 $\overline{AB}$ 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2。

$\because$ 四邊形 ABCD 內角和為 360^0

$\therefore \angle A+\angle B+\angle 5+\angle 4=360^0$

$\Rightarrow \angle 4+\angle 5=360^0-90^0-90^0=180^0$，

故同側內角互補。

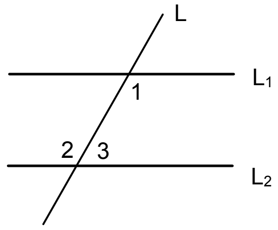
【範例】如圖，L_1 // L_2 ，L 是 L_1 與 L_2 的一條截線，$\angle 1=55^{0}$，求$\angle 2$、$\angle 3$？

【解說】∵L_1 // L_2

∴$\angle 1=\angle 2=55^{0}$（內錯角相等）

$\angle 1+\angle 3=180^{0}$ （同側內角互補）

$\angle 3=180^{0}-55^{0}=125^{0}$

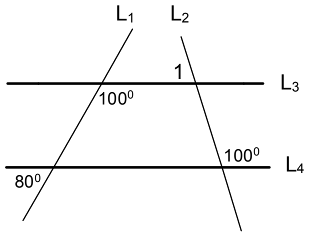


【範例】(1) 如附圖，直線 L_1、L_2、L_3、L_4 中，互相平行的有______。

(2) 其中$\angle 1$ ＝______。

【解說】(1) L_3 // L_4 （∵同側內角互補）

(2) $\angle 1=180^{0}-100^{0}=80^{0}$



【範例】設$\angle A$與$\angle B$的兩邊互相平行，若$\angle A=65^{0}$，求$\angle B$＝？

【解說】

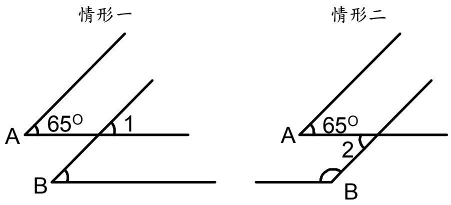
可能有兩種情形(如右圖)：

（1） $\angle 1=\angle A=65^{0}$（同位角相等），

$\angle B=\angle 1=65^{0}$（同位角相等）

（2） $\angle 2=\angle A=65^{0}$（內錯角相等）

$\angle B=180^{0}-\angle 2=180^{0}-65^{0}=115^{0}$（同側內角互補）

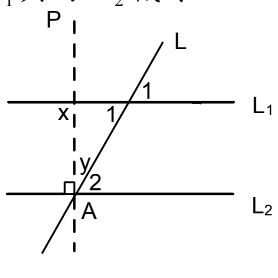


平行線的判別:

在前面我們知道，L_1// L_2 ，L 為 L_1 與 L_2 的截線，則有同位角相等、內錯角相等及同側內角互補的性質，那反過來假設 L_1 與的 L_2 被一直線所截，則此三性質是否也可推得 L_1// L_2 ？

(1)**兩條直線被一直線所截，若截出的同位角相等，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1 與的 L_2 截線，且$\angle 1=\angle 2$



【證明】過 A 點作直線 P，使 $P\perp L_2$ 於 A。

$\Rightarrow \angle 2+\angle y=90^{0}$…①

$\angle 1+\angle y=180^{0}-x$…②

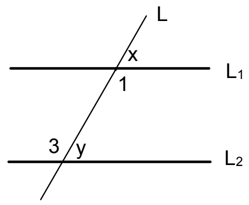
②－① $\angle 1-\angle 2=90^{0}-x$

∵$\angle 1=\angle 2$（同位角相等）。

∴$x=90^{0}$，故 L_1// L_2 。

(2)**兩條直線被一直線所截，若截出的內錯角相等，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1與的 L_2 截線，且∠1＝∠3



【**證明**】$\angle x+\angle 1=180^0$

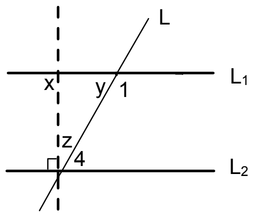
$\angle 3+\angle y=180^0$

$\Rightarrow \angle x=\angle y$

By(1)故 $L_1 // L_2$ 。

(3)**兩條直線被一直線所截，若截出的同側內角互補，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1與的 L_2 截線，且$\angle 1+\angle 4=180^0$



【**證明**】$\angle y+\angle 1=180^0$…①

$\angle z+\angle 4=90^0$…②

$\angle x=\angle y+\angle z$ (外角定理)…③

①＋②＋③

$\Rightarrow(\angle y+\angle 1)+(\angle z+\angle 4)+\angle x=180^0+90^0+(\angle y+\angle z)$

$\Rightarrow \angle 1+\angle 4+\angle x=270^0$

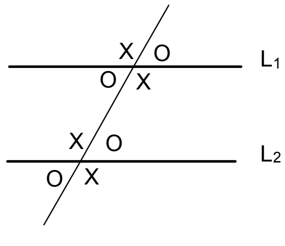
$\because \angle 1+\angle 4=180$

$\therefore x=90^0$，故 $L_1 // L_2$ 。

【**結論**】若兩平行線被一直線所截，則(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補。

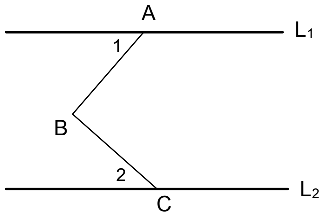
若兩條直線被一直線所截若(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，三者其中一個成立，則此兩直線平行。

若兩條平行線被截線所截時，形成的八個角，角度只有兩種，如圖所示。

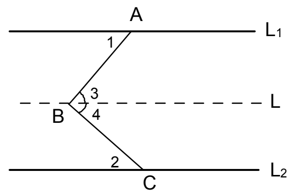


平行線性質的應用：對於平行線，除了常用平行線性質：(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，我們將介紹幾個相關延伸性質。

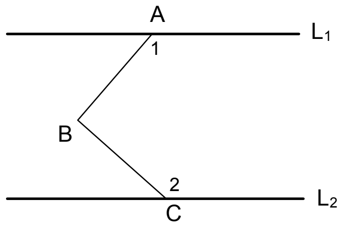
1. 若 $L_1 // L_2$，則 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$



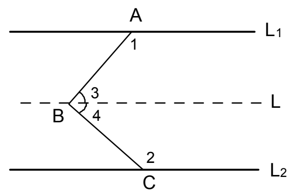
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1，
$\because L_1 // L_2 \quad \therefore L // L_2$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$（內錯角相等）
故 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$。



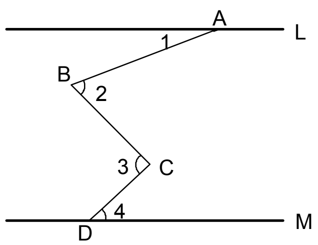
2. 若 $L_1 // L_2$，則 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^0$



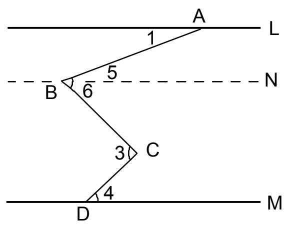
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1，
$\because L_1 // L_2 \quad \therefore L // L_2$
$\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180^0$，
$\angle 2 + \angle 4 = 180^0$（同側內角互補）
故 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$



3. 如右圖，若 $L // M$，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$。

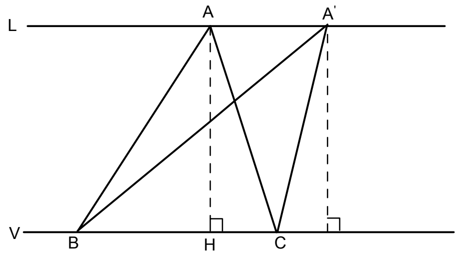


【證明】過 B 點作 N 平行 L，
$\because L // M \therefore N // M$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$，
$\angle 3 = \angle 4 + \angle 6$
故 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 4$



4. 平行線上的三角形面積（同底等高的概念）

當 A 點在 L 上移動時…ΔABC 的形狀會隨之改變，但是ΔABC 的面積是不變的。

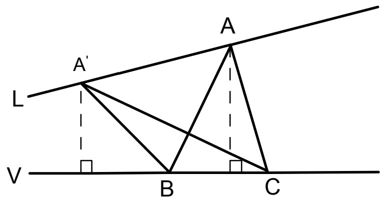


說明：ΔABC 的底永遠是 $\overline{BC}$（同底）

ΔABC 的高 $\overline{AH}$ 是定值（等高）（$\overline{AH}$ 即為平行線 L 、V 的距離）

那假設 L 與 V 不平行的話，如下圖:

當 A 點在 L 上移動時…ΔABC 的形狀會隨之改變，則ΔABC 的面積會隨著高度不同而改變。



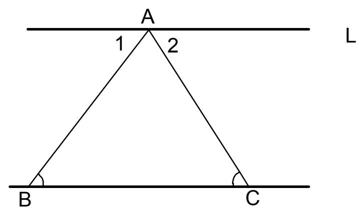
說明: ΔABC 的底永遠是 $\overline{BC}$（同底）

ΔABC 的高會隨著 L、V 之間的距離不同而改變，所以面積也會跟著改變。

ΔABC 面積〉$\Delta A'\ BC$ 面積

5. 利用平行線性質證明三角形內角和＝180^0

如圖，試證明∠ACB＋∠ABC＋∠BAC＝180^0



【證明】 過 A 點作直線 L 平行 $\overline{\mathrm{BC}}$

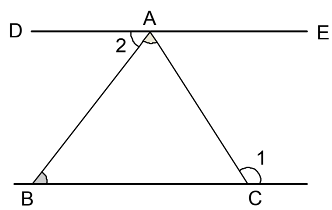
∵∠ABC＝∠1；∠ACB＝∠2 （內錯角相等）

∴△ABC 內角和＝∠ACB＋∠ABC＋∠BAC

＝∠2＋∠1＋∠BAC＝180^0

6. 利用平行線性質證明外角定理

如圖，試證明∠1＝∠ABC＋∠BAC



【證明】 過 A 點作直線 $\overline{\mathrm{DE}} // \overline{BC}$

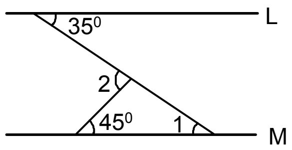
∵∠ABC＝∠2（內錯角相等）

∴∠1＝∠DAC

＝∠2＋∠BAC

＝∠ABC＋∠BAC

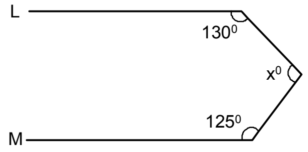
【範例】如圖，若 L // M，求∠1＝？∠2＝？



【解說】∠1＝35^0（內錯角相等）

∠2＝35^0＋45^0＝80^0

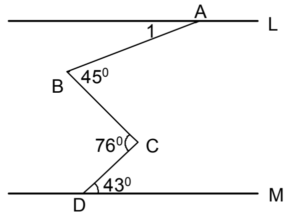
【範例】如圖，若 L // M，求 x＝？



【解說】130^0＋x＋125^0＝360^0

∴x＝105^0

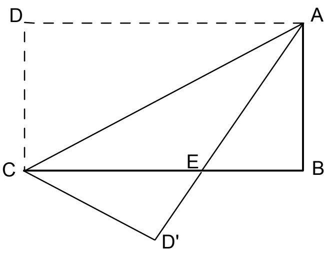
【範例】如圖，若 L // M，求∠1＝？



【解說】∠1＋76^0＝45^0＋43^0

∴∠1＝12^0

【範例】如附圖，長方形 ABCD 中，沿 $\overline{AC}$ 摺疊，D 點落在 D’ 點上，若∠DAC＝25^0，則：
(1) ∠ACD＝？ (2) ∠AEB＝？ (3) ∠ECD＝？



【解說】(1) △ADC 中，∠DAC＝25^0，∠D＝90^0

∴∠ACD＝180^0－25^0－90^0＝65^0＝∠ACD’

(2) ∵∠DAC＝∠D’AC＝25^0

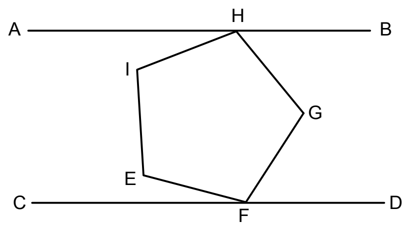
∴∠DAE＝∠DAC＋∠D’AC＝50^0

∴∠DAE＝∠AEB＝50^0（內錯角相等）

(3) ∵∠ACE＝∠DAC＝25^0（內錯角相等）

∴∠ECD’＝∠ACD’－∠ACE＝65^0－25^0＝40^0

【範例】如附圖，$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$，且正五邊形 EFGHI 的頂點 H、F 分別在 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 上，又∠GFD 的度數是∠EFC 的 3 倍，求：(1) ∠GFD＝？
(2) ∠AHI＝？



【解說】(1) 正五邊形一內角＝$\dfrac{(5-2)\times180^0}{5}$＝$108^0$

設∠EFC＝x^0　∴∠GFD＝$3x^0$

⇒ x^0＋108^0＋$3x^0$＝180^0，x^0＝18^0

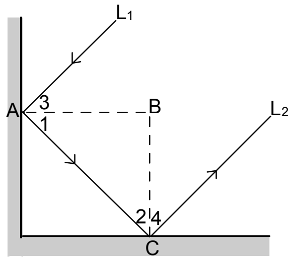
故∠GFD＝$18^0\times3$＝54^0

(2) ∵$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$　∴∠HGF＝∠BHG＋∠GFD

∴ 108^0＝∠BHG＋54^0，∠BHG＝54^0

∴∠AHI＝180^0－54^0－108^0＝18^0

【範例】如附圖，有一條光線 L_1 經過兩個互相垂直的平面鏡反射後，反射光線為 L_2，那麼 L_1 和 L_2 是否平行？為什麼？



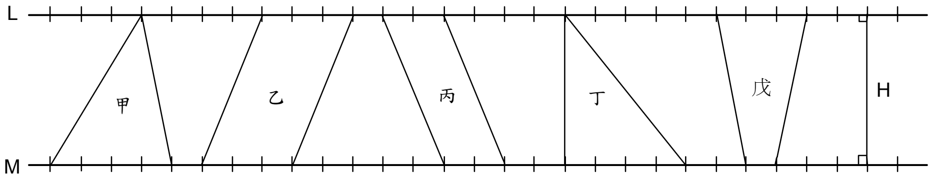
【解說】$\angle ABC = 90^0 \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90^0$，

又 $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，

所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^0$（同側內角互補）

，故 $L_1 // L_2$。

【範例】若 $L // M$，選出面積相同的圖形

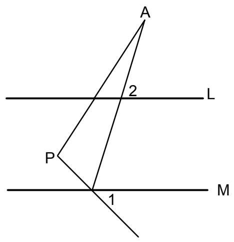


【解說】甲面積：甲$=\frac{1}{2}\times 4\times H=2H$　　乙面積：乙$=3H$

丙面積：丙$=2H$　　丁面積：丁$=\frac{1}{2}\times 4\times H=2H$

戊面積：戊$=\frac{1}{2}\times(3+1)\times H=2H$

【範例】如圖，已知 $L // M$，若 $\angle 1=40^0$、$\angle 2=70^0$、$\angle A=25^0$，則 $\angle P=$______度。



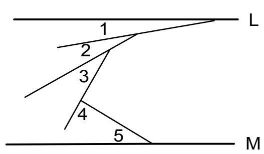
【解說】$\angle P = \angle 1 + \angle 2 - \angle A$

$= 110^0 - 25^0$

$= 85^0$

【範例】如圖，已知 $L//M$，請問：

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$ 等於________度。

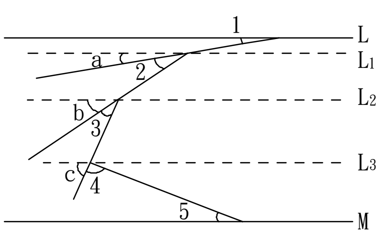


【解說】作 L_1、L_2、L_3 平行 L

$\because L // L_1$　　$\therefore \angle 1 = \angle a$（同位角相等）

$\because L_1 // L_2$　　$\therefore \angle a + \angle 2 = \angle b$（同位角相等）

$\because L_2 // L_3$　　$\therefore \angle b + \angle 3 = \angle c$（同位角相等）



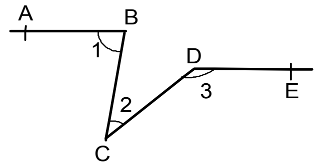
則 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle a+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle b+\angle 3+\angle 4+\angle 5$

$=\angle c+\angle 4+\angle 5=180^0$

【範例】如附圖，已知 $\overline{AB} // \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^0$，$\angle 2 = 40^0$， 則 $\angle 3 =$______。



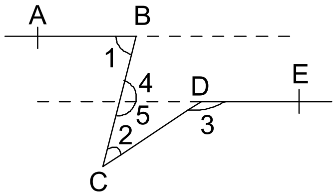
【解說】作 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overleftarrow{ED}$

$\because \overline{AB} // \overline{DE}$

$\therefore \angle 1 = \angle 4 = 80^0$（內錯角相等）

$\therefore \angle 5 = 180^0 - \angle 4 = 180^0 - 80^0 = 100^0$

$\angle 3 = \angle 2 + \angle 5 = 40^0 + 100^0 = 140^0$



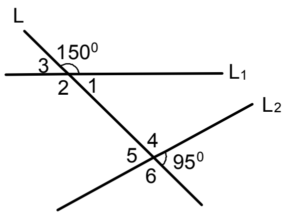
小 試 身 手

【範例一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，求：

(1) $\angle 1 =$_____度，$\angle 1$ 的內錯角是___，其度數是_____度。

(2) $\angle 2 =$_____度，$\angle 3$ 的同位角是___，其度數是_____度。



【練習一】

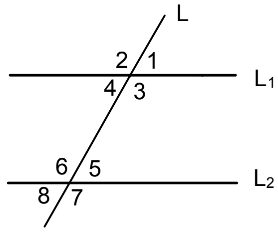
如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，設 $\angle 1 = 50^0$ 求：

(1) $\angle 3$ 的內錯角是___，其度數是_____度。
$\angle 3$ 的同側內角是___，其度數是____度。

(2) $\angle 5$ 的同位角是___，其度數是_____度。

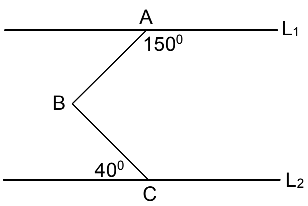
(3) $\angle 4$ 的鄰角是______，其度數是____度。

(4) $\angle 6$ 的對頂角是___，其度數是_____度。



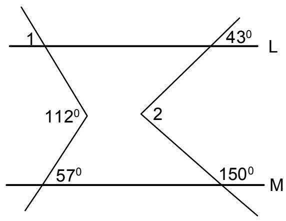
【範例二】

如圖，$L_1 // L_2$ ，求 $\angle ABC =$ ？



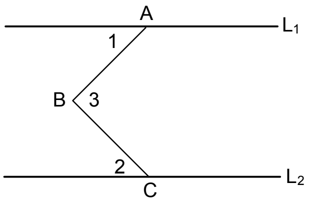
【練習二】

如圖，已知 L // M，則 $\angle 1 + \angle 2 =$ ？



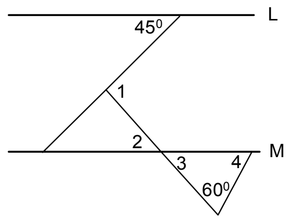
【範例三】

如圖，L // M，$\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$，且 $\angle 3 = 99^0$，則 $\angle 1 = ?$



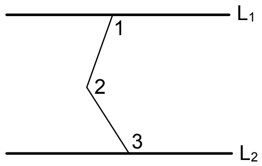
【練習三】

如圖，已知 L // M，若 $\angle 1 = (7x+1)^0$，$\angle 2 = (3x+8)^0$，則 $\angle 1 + \angle 4 = ?$



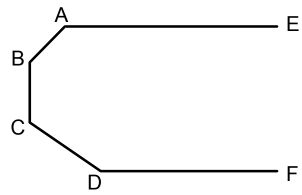
【範例四】

如圖，L_1 // L_2，若 $\angle 1 = 100^0$，$\angle 2 = 150^0$，則 $\angle 3 = ?$



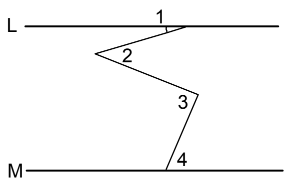
【練習四】

如圖，$\overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{DF}$，$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$



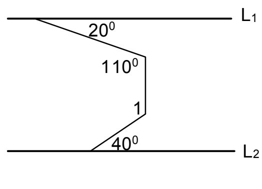
【範例五】

如圖，L // M，若 $\angle 1 = 12^0$、$\angle 2 = 33^0$、$\angle 3 = 95^0$，則 $\angle 4 = ?$



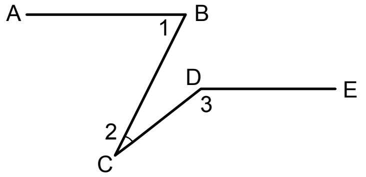
【練習五】

如圖，L_1 // L_2，求 $\angle 1$ 的度數。

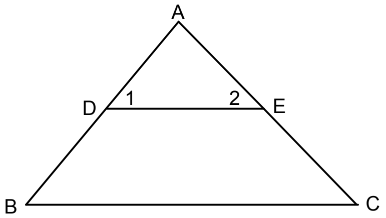


【範例六】

(1)如圖，已知$\overline{AB}//\overline{DE}$，若$\angle 1 = 80^0$，$\angle 2 = 40^0$，則$\angle 3 =$______。

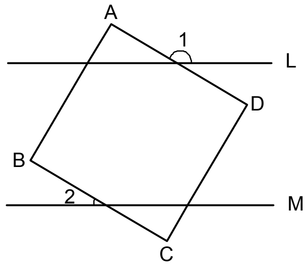


(2) 如圖，$\angle 1 = \angle A$，且$10\angle 1 = 5\angle B = 2\angle C$=則$\angle B$=______度。

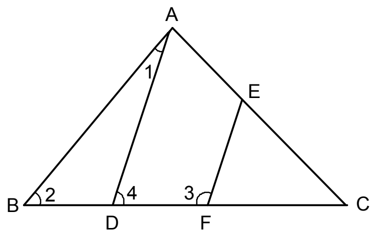


【練習六】

(1) 如圖，已知 L // M，四邊形 ABCD 為正方形，若$\angle 1 = 150^0$，則$\angle 2$=？

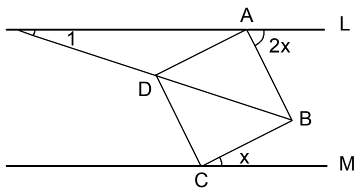


(2) 如圖，$\angle 1 = 15^0$，$\angle 2 = 50^0$，則當$\angle 3$=？時$\overline{AD}//\overline{EF}$。



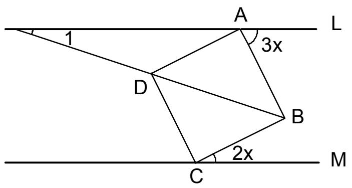
【範例七】

如圖，L // M，*ABCD* 為正方形，求$\angle 1$。



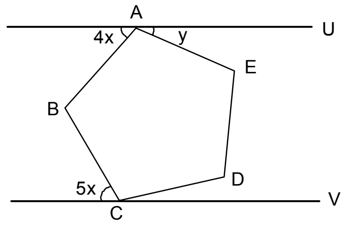
【練習七】

如圖，L // M，*ABCD* 為正方形，求$\angle 1$



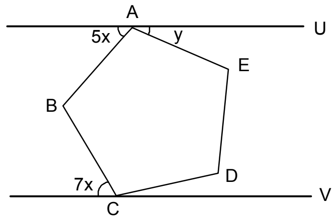
【範例八】

如圖，U//V，$ABCDE$ 為正五邊形，求 y^0



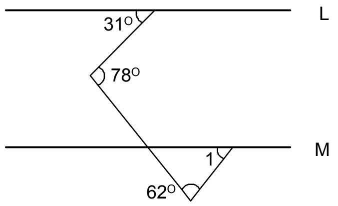
【練習八】

如圖，U//V，$ABCDE$ 為正五邊形，求 y^0



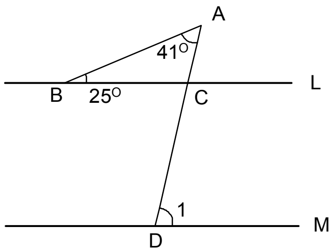
【範例九】

如圖，若 L//M，求∠1。



【練習九】

如圖，若 L//M，求∠1。



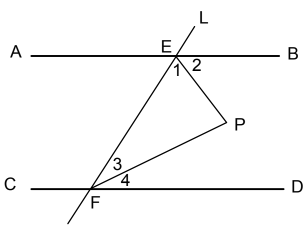
【範例十】

如圖，已知$\overline{AB}//\overline{CD}$，L 為截線，$\overline{EP}$平分∠BEF，$\overline{FP}$平分∠EFD，試說明$\overline{EP}$與$\overline{FP}$之間的關係。

【練習十】

如圖，已知$\overline{AB}//\overline{CD}$，L 為截線，$\overline{EP}$平分∠BEF，$\overline{FP}$平分∠EFD，且∠BEF＝$120^0$，試問：(1) ∠1、∠2、∠3、∠4 各多少度?

(2)∠1＋∠3＝?



古希臘三大幾何作圖問題

在數學的歷史上有三個問題始終以可驚的力量堅定了兩千多年。初等幾何學到現在至少已有了三千年的歷史，在這期間努力於初等幾何學之發展的學者們曾經遇到過很多的難題，而始終絞著學者腦汁的卻就是這三個問題：

「立方倍積」,「化圓為方」和「三等分角」，而這三個問題，也就被合稱為「古希臘三大幾何問題」。

(1) 立方倍積問題：求作一個正立方體，使其體積為邊長為 1 的正立方體的 2 倍。

(2) 方圓問題：求作一個正方形，使其面積和半徑為 1 的圓面積相等。

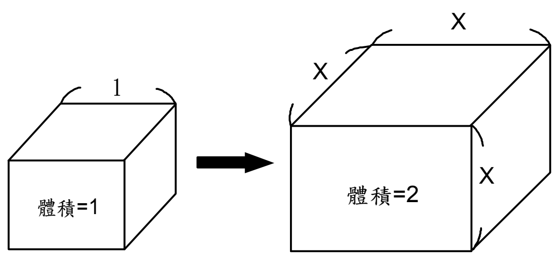
(3) 三等分角問題：三等分任意已知角。

有關立方倍積問題:

關於立方倍積的問題有一個神話流傳：當年希臘提洛斯(Delos)島上瘟疫流行，居民恐懼也向島上的守護神阿波羅(Apollo)祈禱，神廟裡的預言修女告訴他們神的指示：“把神殿前的正立方形祭壇加到二倍，瘟疫就可以停止。” 由此可見這神是很喜歡數學的。居民得到了這個指示後非常高興，立刻動工做了一個新祭壇，使每一稜的長度都是舊祭壇稜長的二倍，但是瘟疫不但沒停止，反而更形猖獗，使他們都又驚奇又懼怕。

結果被一個學者指出了錯誤:「稜二倍起來體積就成了八倍，神所要的是二倍而不是八倍。」大家都覺得這個說法很對，於是改在神前並擺了與舊祭壇同形狀同大小的兩個祭壇，可是瘟疫仍不見消滅。人們困擾地再去問神，這次神回答說:「你們所做的祭壇體積確是原來的二倍，但形狀卻並不是正方體了，我所希望的是體積二倍，而形狀仍是正方體。」居民們恍然大悟，就去找當時大學者柏拉圖請教。

由柏拉圖和他的弟子們熱心研究，但不曾得到解決，並且耗費了後代許多數學家們的腦汁。而由於這一個傳說，立方倍積問題也就被稱為提洛斯問題。

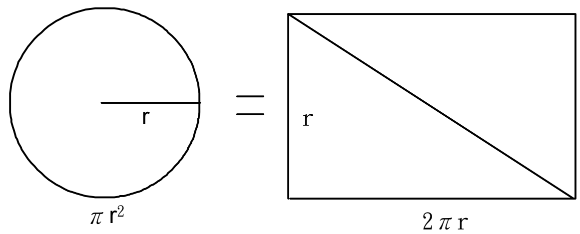


而此問題即是解 $2=X^3$ 的代數問題。那請問 $X=2^{1/3}$ 的長度是否可以用圓規直尺所畫出呢？

說明： 設原立方體的邊長為 1，要作出的立方體邊長為 x，則 x 要滿足 $x^3=2$，這個方程式沒有有理根，當然就沒有尺規作圖的 x 了。

有關化圓為方問題:

方圓的問題與提洛斯問題是同時代的，由希臘人開始研究。有名的阿基米得把這問題化成下述的形式：已知一圓的半徑是 r，圓周就是 $2\pi r$，面積是 πr^2。由此若能作一個直角三角形，其夾直角的兩邊長分別為已知圓的周長 $2\pi r$ 及半徑 r，則這三角形的面積就是 $\frac{1}{2}\times(2\pi r)\times r=\pi r^2$ 與已知圓的面積相等。由這個直角三角形不難作出同面積的正方形來。但是如何作這直角三角形的邊 πr 長度。即如何作一線段使其長等於一已知圓的周長，這問題阿基米德可就解不出了。



有關三等分角問題:

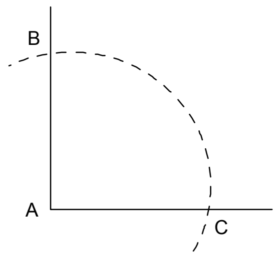
西元前五、六百年間希臘的數學家們就已經想到了二等分任意角的方法， 二等分一個已知角既是這麼容易，很自然地會把問題略變一下：三等分怎麼樣呢？這樣，這一個問題就這麼非常自然地出現了。對於特別角 45^0、90^0、135^0、180^0 等角可以三等分， 但是任意的角並不可以三等分，接著我們來看看如何將 90^0 角三等分。

【**範例**】將 90^0 角三等分。

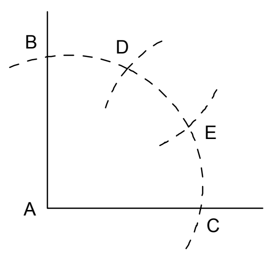
【**已知**】某一角 $\angle A=90^0$。

【**求作**】兩直線將 $\angle A$ 三等分。

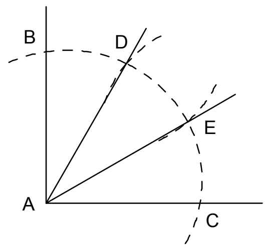
【**作法**】步驟一：以 A 為圓心，適當長為半徑化弧，交角的兩邊於 B、C 兩點。



步驟二：分別以 B、C 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑化弧，交 $\overline{BC}$ 於 D、E 兩點。



步驟三：連接$\overline{AD}$、$\overline{AE}$，則$\overline{AD}$、$\overline{AE}$將∠A 三等分。



注:1837 年法國數學家凡齊爾(1814-1848)首次運用了代數的方法嚴格證明了這個問題是尺規　作圖不可能的，至此這個才算獲得解決。但由於對他的研究，使人們發現了一些特殊的曲線，如圓錐曲線、蚌線、蔓葉線等，促進了圓錐曲線理論的建立和發展。人們還發現，只要不受尺規作圖工具的約束，倍立方體的問題是可以解決的。