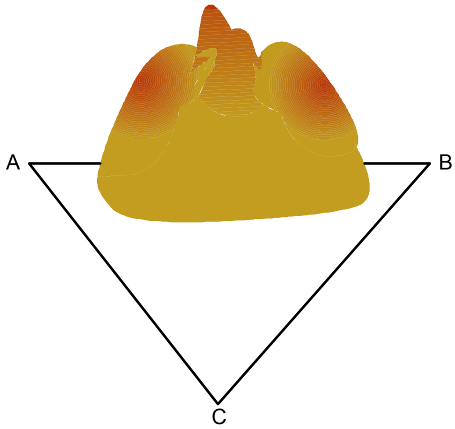
三角形的基本性質

三角形的內角與外角

這一章我們要學習三角形的基本性質，可不要小看三角形喔!它在測量方面的應用卻下陸上天，無遠佛屆：逢山開洞，要探知地貌，要問廣寒宮有多遠，都少不了它。

挖山洞時如果從山的兩頭一齊動手，最後會接通嗎?或者，從一頭挖過去，怎麼預知出來的那一頭就是想要的地方?視線讓一座山擋住了，腦筋如何急轉彎呢?



其實只要找一個參考點 C(如上圖)，接下來只要決定∠A 與∠B 就好了。
還不只如此！想要測量 101 大樓的高度、月亮離我們多遠…等，都需要利用三角形的性質。讓我們開始進入三角形的世界吧!

有關三角形角的名詞：

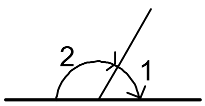
三角形的記法與讀法:

(1)符號「Δ」代表三角形。

(2)頂點為 A、B、C 的三角形，記為「ΔABC」，讀作「三角形 ABC」。

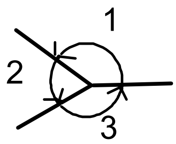
平角: 角的兩邊成一直線的角，其度數為 180^0。

如下圖，$\angle 1+\angle 2=180^0$。



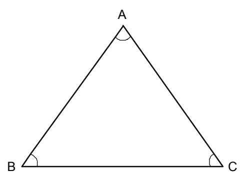
周角: 繞著一點轉一圈所成的角，其度數為 360^0。

如下圖，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^0$。



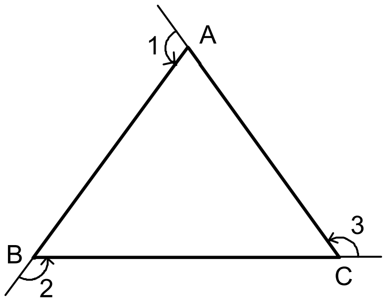
內角：三角形 A、B、C 中每個頂點兩邊所夾的角。

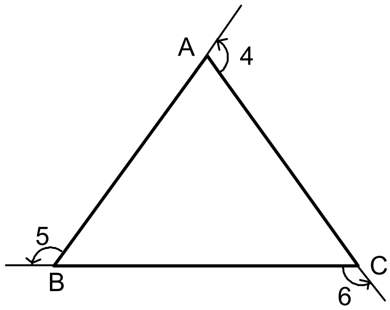
如下圖：∠A、∠B、∠C 為△ABC 的三內角。



外角：三角形中一邊和另一邊延長線所形成的角。

如下圖，∠1 和∠4 都是∠A 的外角、∠2 和∠5 都是∠B 的外角、∠3 和∠6 是∠C 的外角。





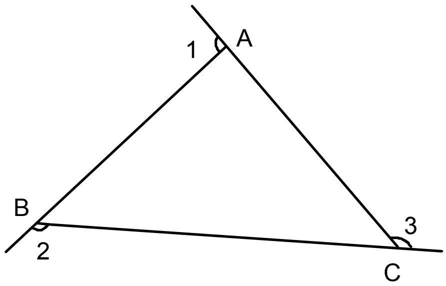
※△ABC 中每個內角都有 2 個相等的外角。

※三角形的任何一內角與它的外角，在頂點的地方形成一個平角，

即∠A+∠1=180^0、∠B+∠2=180^0、∠C+∠3=180^0。

內對角：在△ABC 中，與一外角頂點不同的內角稱為這個外角的內對角。

如下圖，∠B 與∠C 為∠1 的內對角，∠A 與∠C 為∠2 的內對角，∠A 與∠B 為∠3 的內對角。



有關三角形外角與內角的定理：

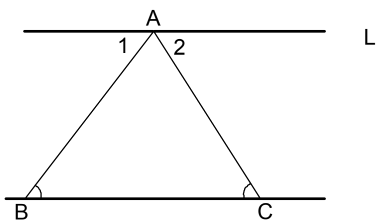
三角形的內角和定理：三角形的三個內角的和等於 180^0

三角形的外角和定理：三角形的三個外角和等於 360^0

三角形的外角定理：三角形的任一外角等於它的兩個內對角之和。

三角形的內角和定理：三角形的三個內角的和等於 180^0；

如右圖，即∠A＋∠B＋∠C＝180^0。



【證明】過 A 點作直線 L 平行 $\overline{BC}$

∵∠ABC＝∠1；∠ACB＝∠2　（內錯角相等）

∴△ABC 內角和＝∠ACB＋∠ABC＋∠BAC

＝∠2＋∠1＋∠BAC＝180^0

三角形的外角和定理：三角形的三個外角和等於 360^{0}；如右圖，即 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^{0}$

【證明】 $\because \angle 1+\angle A=180^{0}$

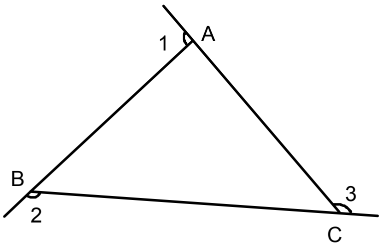
$\angle 2+\angle B=180^{0}$

$\angle 3+\angle C=180^{0}$

$\Rightarrow \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle A+\angle B+\angle C=540^{0}$

又 $\because \angle A+\angle B+\angle C=180^{0}$

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=360^{0}$



三角形的外角定理：三角形的任一外角等於它的兩個內對角之和。

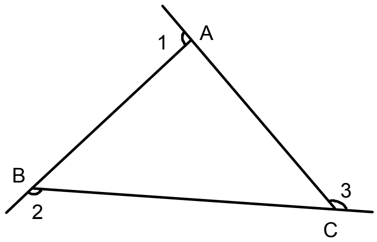
如下圖，$\angle 1=\angle B+\angle C$；$\angle 2=\angle A+\angle C$；$\angle 3=\angle A+\angle B$

【證明】$\because \angle 1$ 是 $\angle A$ 的外角　$\therefore \angle 1+\angle A=180^{0}$

而 $\angle A+\angle B+\angle C=180^{0}$

$\Rightarrow \angle 1=\angle B+\angle C$，

同理，$\angle 2=\angle A+\angle C$，$\angle 3=\angle A+\angle B$



【範例】若三角形三內角 $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，則試求出此三角形三內角各為幾度？

且為何種三角形？

【解說】$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^{0}$

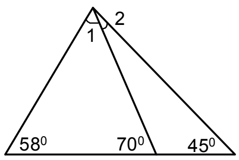
$\therefore \angle A=180\times\dfrac{3}{3+4+5}=45^{0}$　；$\angle B=180\times\dfrac{4}{3+4+5}=60^{0}$

$\angle C=180\times\dfrac{5}{3+4+5}=75^{0}$　　$\therefore \triangle ABC$ 為銳角三角形

【範例】如右圖，求出 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的度數＝？

【解說】$\angle 1=180^{0}-58^{0}-70^{0}=52^{0}$（內角和定理）

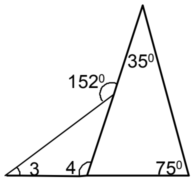
$\angle 2=70^{0}-45^{0}=25^{0}$（外角定理）



【範例】如右圖，求出 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 的度數＝？

【解說】$\angle 4=75^{0}+35^{0}=110^{0}$（外角定理）

$\angle 3=152^{0}-110^{0}=42^{0}$（外角定理）

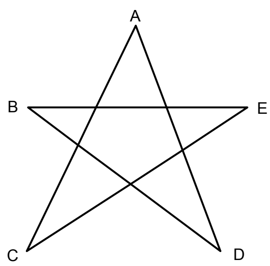


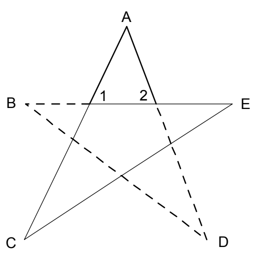
【範例】如圖，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$？

【證明】由外角定理可知 $\angle 1=\angle C+\angle E$；$\angle 2=\angle B+\angle D$

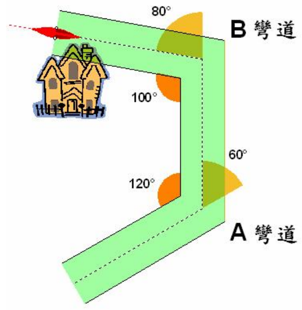
且由三角形內角和可知 $\angle 1+\angle 2+\angle A=180^{0}$

故 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^{0}$



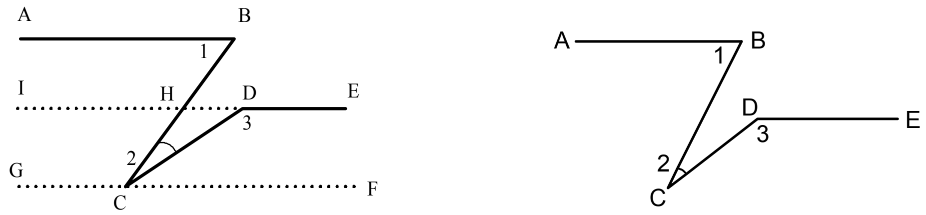


【範例】小明去威尼斯玩，為了想看古蹟，他必須坐船繞過 A、B 兩個彎才能到達，
請問繞過兩彎後船身共轉了幾度呢？



【解說】由內角與外角和為 180^0 的觀念可知：
Θ 因為 A 彎道為 120^0，∴所以船在過 A 彎道時轉了 60^0。
Θ B 彎道為 100^0，∴船在過 A 彎道時轉了 80^0。
因此，共轉了 $60^0+80^0=140^0$。

【範例】如圖，已知 $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$，若 $\angle 1 = 80^0$， $\angle 2 = 40^0$，則 $\angle 3 =$______。

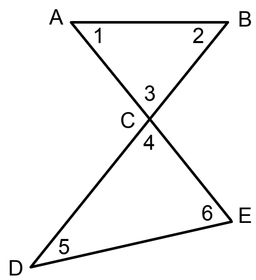


【解說】利用三角形外角定理，可知
$\angle 3 = \angle 2 + \angle CHD = \angle 2 + \angle IHB$
$= \angle 2 + 180^0 - \angle 1 = 40^0 + 180^0 - 80^0 = 140^0$
或是利用平行性質
$\angle BCG = 180^0 - \angle 1 = 180^0 - 80^0 = 100^0$(同側內角互補)
$\angle DCF = 180^0 - \angle 2 - \angle BCG = 180^0 - 40^0 - 100^0 = 40^0$(同側內角互補)
$\angle 3 = 180^0 - \angle DCF = 180^0 - 40^0 = 140^0$。

有關外角定理的補充性質：

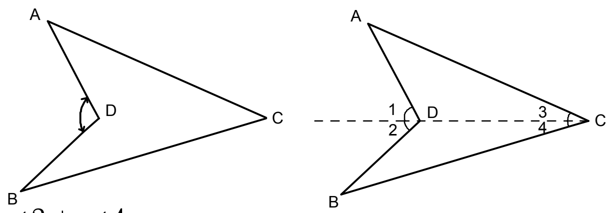
利用內角和及外角和定理，我們可以推得 2 個常用的「**8 字型定理**」及「**箭頭定理**」。

【**8 字型定理**】:如圖，$\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 交於 C，求證 $\angle 1+\angle 2=\angle 5+\angle 6$



【證明】$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$
$\angle 4+\angle 5+\angle 6=180^0$
$\Rightarrow \angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 6$
$\because \angle 3=\angle 4$（對頂角相等）
$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 5+\angle 6$

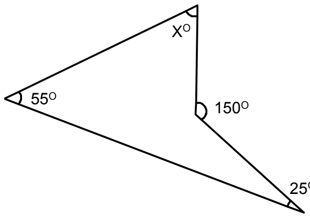
【**箭頭定理**】:如圖，證明 $\angle ADB=\angle D=\angle A+\angle B+\angle C$



【證明】(1)做輔助線 $\overleftrightarrow{CD}$。

(2) $\angle 1=\angle A+\angle 3$（外角定理）。
$\angle 2=\angle B+\angle 4$（外角定理）。
∴可知：$\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B+\angle 3+\angle 4$
$\Rightarrow \angle D=\angle A+\angle B+\angle C$

【範例】如右圖，求 X＝？

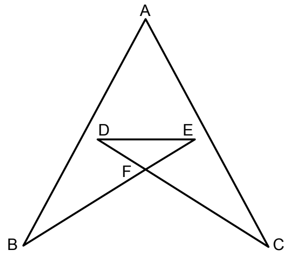


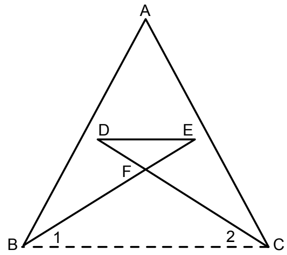
【解說】由箭頭定理可知：

150＝55＋25＋X

∴X＝70

【範例】如右圖，求∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＝？





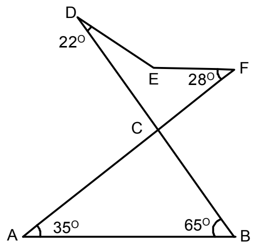
【解說】連接$\overline{BC}$

∠D＋∠E＝∠1＋∠2（8 字型定理）

∴∠A＋∠B＋∠C＋∠1＋∠2

＝∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＝180^{0}

【範例】如圖，求∠DEF＝？



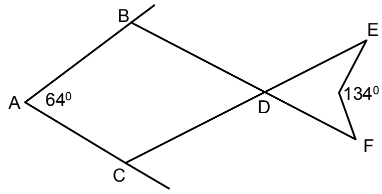
【解說】∠ACB＝$180^{0}-35^{0}-65^{0}=80^{0}$（三角形內角和＝$180^{0}$）

又∠DCF＝∠ACB＝80^{0}（對頂角相等）。

由箭頭定理可知：

∠DEF＝$22^{0}+28^{0}+80^{0}=130^{0}$

【範例】如下圖，已知$\overline{AB}$//$\overline{CD}$，$\overline{AC}$//$\overline{BD}$，若∠BAC＝64^{0}，則∠EDF＝______度，∠E＋∠F＝______度。

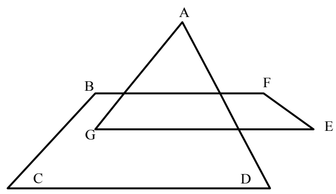


【解說】∵$\overline{AB}$//$\overline{CD}$，$\overline{AC}$//$\overline{BD}$

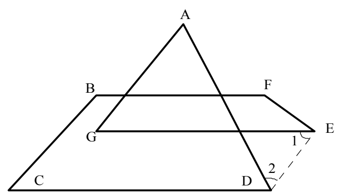
⇒ABCD 為平行四邊形⇒∠EDF＝∠BDC＝∠A＝64^{0}

∠E＋∠F＝∠BAC－∠EDF＝$134^{0}-64^{0}=70^{0}$

【範例】求∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＋∠F＋∠G ＝?



【解說】作$\overline{\text{DE}}$ ∠A＋∠G ＝ ∠1＋∠2【8 字型定理】

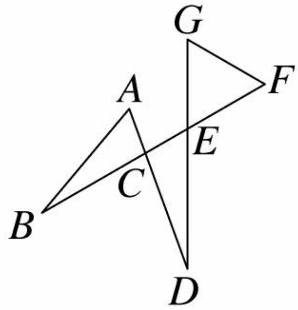


∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＋∠F＋∠G

＝ ∠B＋∠C＋∠D＋∠E＋∠F ＋ ∠1＋∠2

＝（ 5 － 2 ）×180^{0} ＝ 540^{0}

【範例】如圖，∠A＝∠F＝∠G＝(3x)°，∠B＝∠D＝x°，則 x＝？



【解說】Θ ∠A＋∠B＝∠E＋∠D【8 字型定理】

∴3x°＋x°＝∠E＋x°

⇒ ∠E＝3x°

∠E＋∠G＋∠F＝180°

⇒3x°＋3x°＋3x°＝180°

⇒9x°＝180°　　⇒x＝20

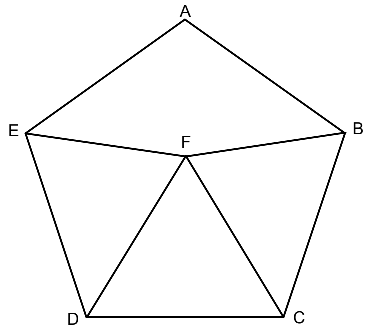
【範例】ABCDE 為正五邊形，且正五邊形每一內角為 108^0，

F 為其內部一點，若△FDC 為正三角形，求∠EFB＝？

【解說】∠EDF＝108^0-60^0（正三角形內角為60°）

$=48^0$

又Q △DEF 為等腰三角形。



∴∠EFD（底角）＝$\dfrac{180^0-48^0}{2}=66^0$

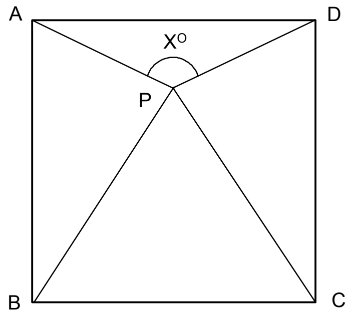
同理∠BFC＝66^0且∠DFC＝60^0

∴∠EFB＝$360^0-(66^0+60^0+66^0)$

$=168^0$

【範例】ABCD 為正方形，△PBC 為正三角形，求∠APD＝？

【解說】∵正三角形內角為 60^0



∴∠ABP＝∠DCP＝$90^0-60^0=30^0$

又ΔAPB 及ΔDCP 為等腰三角形。

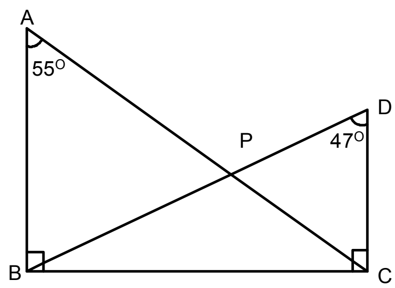
⇒兩底角＝$\dfrac{180^0-30^0}{2}=75^0$

∵對 P 點而言，一周角＝360^0

∴X＝$360^0-60^0-75^0-75^0=150^0$

【範例】如右圖，求∠BPC－∠DPC＝？

【解說】∵三角形內角和＝180^0



∴∠PCB＝$180^0-90^0-55^0=35^0$

∠PBC＝$180^0-90^0-47^0=43^0$

由外角定理知：

∠DPC＝∠PCB＋∠PBC＝$35^0+43^0=78^0$

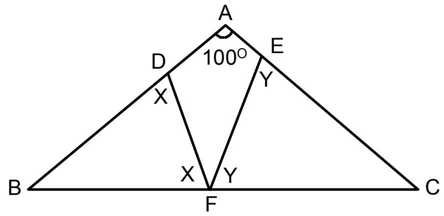
∵∠BPC＝$180^0-78^0=102^0$（補角）。

∴∠BPC－∠DPC＝$102^0-78^0=24^0$

【範例】ΔDBF、ΔCEF 均為等腰三角形，∠A＝100^0，求∠DFE＝？

【解說】Q 三角形內角和＝180^0

∴∠B＋∠C＝$180^0-100^0=80^0$



Q △DBF、△CEF 均為等腰三角形

又兩個三角形內角和＝360^0

∴2X＋2Y＋∠B＋∠C＝360^0

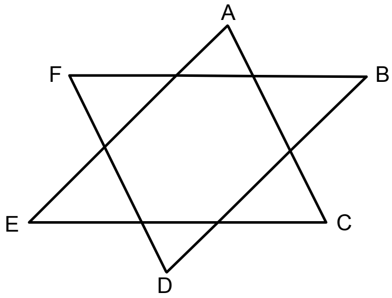
2X＋2Y＝$360^0-80^0=280^0$

X＋Y＝140^0

∴∠DFE＝$180^0-(X+Y)$

$=180^0-140^0=40^0$

【範例】如右圖，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$？

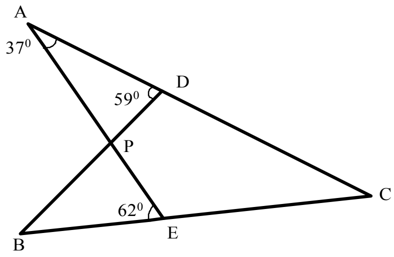


【解說】$\angle B+\angle D+\angle F=180^0$

$\angle A+\angle C+\angle E=180^0$

$\Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=360^0$

【範例】如圖，求$\angle B$與$\angle C$。



【解說】Q $\angle A+\angle ADB=\angle B+\angle AEB$【8 字型定理】

$\Rightarrow 37^0+59^0=\angle B+62^0$

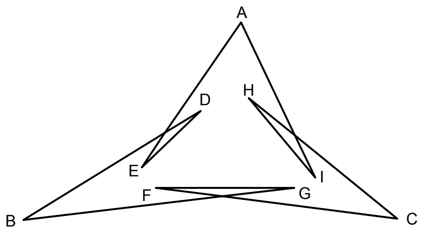
$\Rightarrow 37^0+59^0-62^0=\angle B \quad \Rightarrow \angle B=34^0$

$\angle APB=\angle A+\angle ADB=37^0+59^0=96^0$

$\angle APB=\angle A+\angle B+\angle C$ 【箭頭定理】

$\Rightarrow \angle C=\angle APB-\angle A-\angle B=96^0-37^0-34^0=25^0$

【範例】求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I$=？



【解說】連接$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$

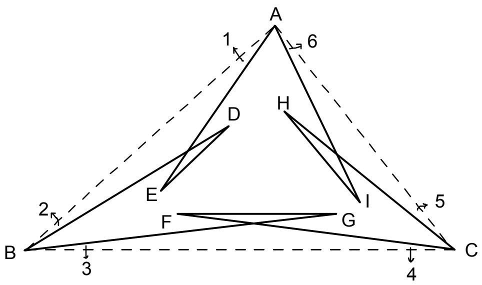
$\angle D+\angle E=\angle 1+\angle 2$【8 字型定理】

$\angle G+\angle F=\angle 3+\angle 4$【8 字型定理】

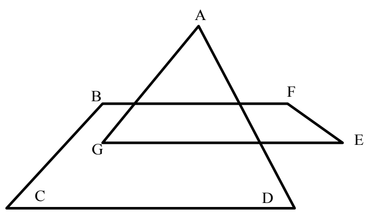
$\angle H+\angle I=\angle 5+\angle 6$【8 字型定理】

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle I$

$=\angle A+\angle B+\angle C+\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180^0$



【範例】求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ =？

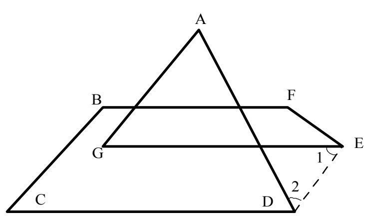


【解說】作$\overline{\text{DE}}$ $\angle A+\angle G$ = $\angle 1+\angle 2$【8 字型定理】

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$

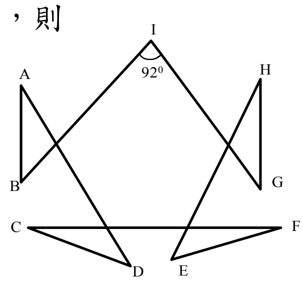
$=\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle 1+\angle 2$

$=(5-2)\times 180^0=540^0$



【**範例**】三原利用摺紙，摺出一個蛙形圖案，如圖所示，若$\angle I=92^0$，則

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=$________度。



【**解說**】延長$\overline{IG}$得 I 的外角$\angle 5$，

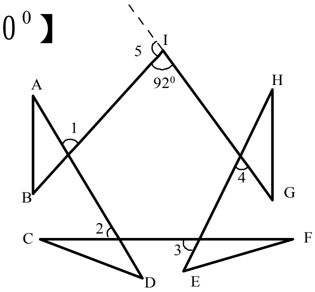
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$【**三角形的外角定理**】

又$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=360^0$【n 邊形外角和為$360^0$】

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$

$=360^0-(180^0-92^0)=272^0$



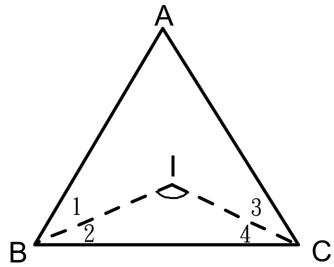
三角形內外角平分線性質

當我們進一步延伸內角和及外角定理，對於三角形內、外角平分線可以得到以下 3 個常見性質。

【**三角形內角平分線性質**】

任一ΔABC，若$\angle B$平分線與$\angle C$平分線相交於ΔABC內的一點 I，

則有$\angle BIC=90^0+\frac{1}{2}\angle A$。



【**證明**】$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^0-\angle A$

$\because \angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$

$\therefore \angle 1+\angle 3=\dfrac{180^0-\angle A}{2}$

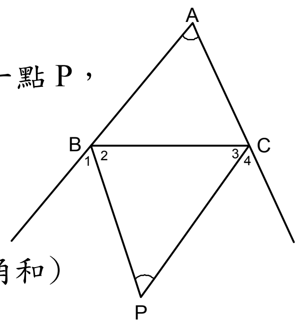
由箭頭定理知：

$\angle BIC=\angle A+\angle 1+\angle 3=\angle A+\dfrac{180^0-\angle A}{2}=90^0+\dfrac{1}{2}\angle A$

【**三角形外角平分線性質**】

任一ΔABC，若$\angle B$的外平分線與$\angle C$的外平分線相交於ΔABC外的一點 P，

則有$\angle BPC=90^0-\frac{1}{2}\angle A$



【**證明**】$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$(角平分線)

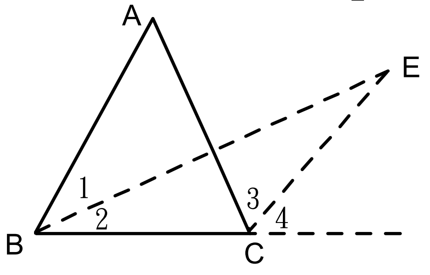
$\therefore \angle A+(180^0-2\angle 2)+(180^0-2\angle 3)=180^0$(三角形內角和)

$\Rightarrow \angle 2+\angle 3=\dfrac{\angle A+180^0}{2}$

$\therefore \angle BPC=180^0-(\angle 2+\angle 3)=90^0-\dfrac{1}{2}\angle A$

【三角形內、外角平分線性質】

在ΔABC 中，內角$\angle$B 的平分線與$\angle$C 的外角平分線相交於一點 E，則有$\angle BEC=\frac{1}{2}\angle A$



【證明】由外角定理知：

$\angle 3+\angle 4=(\angle 1+\angle 2)+\angle A$

Q $\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$

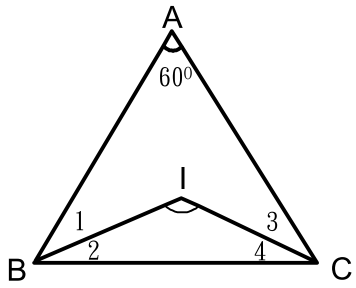
$\therefore 2\angle 4=2\angle 2+\angle A$

$\Rightarrow \angle 4-\angle 2=\frac{1}{2}\angle A$

由外角定理知： $\angle 4=\angle 2+\angle BEC$

$\therefore \angle BEC=\angle 4-\angle 2=\frac{1}{2}\angle A$

【範例】已知，$\angle A=60^0$，$\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$，求$\angle BIC=$?



【解說】$\because \angle A=60^0$

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^0-60^0=120^0$

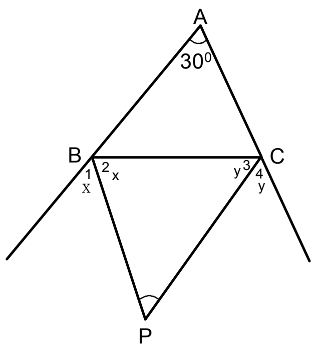
Q $\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$

$\therefore \angle 1+\angle 3=\frac{120^0}{2}=60^0$

由箭頭定理知：

$\angle BIC=\angle A+\angle 1+\angle 3=60^0+60^0=120^0$

【範例】如圖，$\angle 1=\angle 2$、$\angle 3=\angle 4$，求$\angle P=$？



【解說】 Q 三角形內角和$=180^0$

$30^0+(180^0-2x)+(180^0-2y)=180^0$

$\Rightarrow 210^0=2x+2y$

$\Rightarrow x+y=105^0$

$\angle P=180^0-105^0=75^0$

小 試 身 手

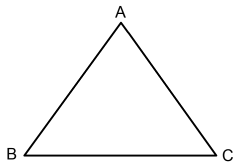
【範例一】

(1)△ABC 中，若∠A＝2∠C 且∠B＝30^0，

求 2∠A＋∠C＝______度。

(2) △ABC 中，若∠A＋∠B＝108^0，

∠C＝3∠A，求∠B＝______度。



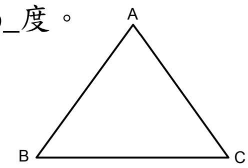
【練習一】

(1)△ABC 中，若∠A＝4∠B，且∠A＝4∠C，

求∠A＝__120_度。

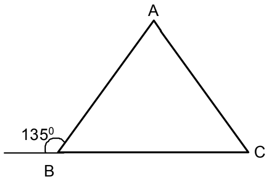
(2) △ABC 中，若∠A＝$\frac{5}{6}$∠B，且∠C 比

∠B 小 7^0，求∠A＝_55_度。



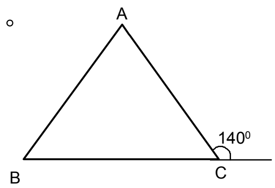
【範例二】

△ABC 中，若∠B 的外角是 135 度，且∠C 比∠B 大 25 度， 求∠A＝___度。



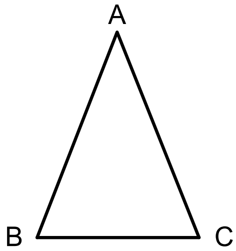
【練習二】

△ABC 中，若∠C 的外角是 140 度，且∠A－∠B＝10^0，求∠B＝___度。



【範例三】

一等腰三角形一底角的度數等於其頂角度數的 4 倍，求頂角度數。



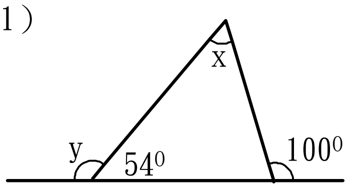
【練習三】

一等腰三角形有兩個內角度數比為 4:1，求其頂角度數。

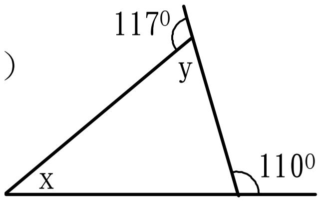
【範例四】

求下列各圖中 x 與 y 之值：

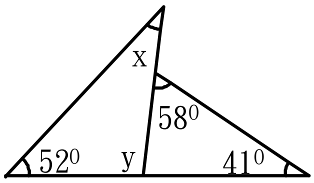
（1）



（2）



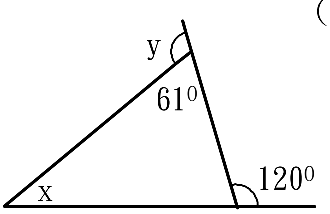
（3）



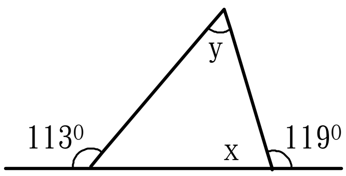
【練習四】

求下列各圖中 x 與 y 之值：

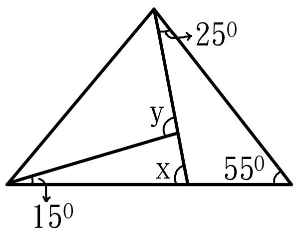
（1）



（2）

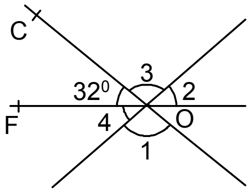


（3）



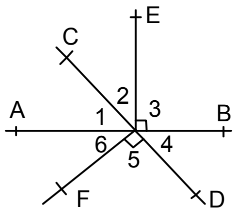
【範例五】

已知∠COF＝32^0，∠1＝3∠2，求∠3、∠4



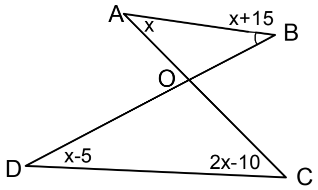
【練習五】

如圖，∠3＝∠5＝90^0，∠6＝50^0，求∠2＝？



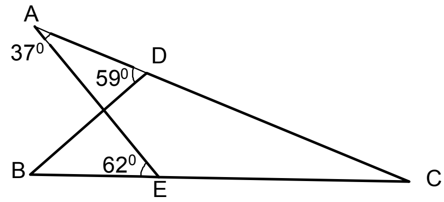
【範例六】

如圖，求 x 與∠AOB。



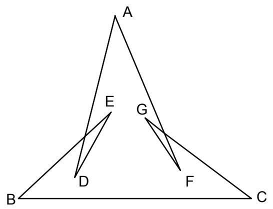
【練習六】

如圖，求∠B 與∠C。



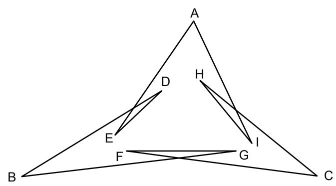
【範例七】

求∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＋∠F＋∠G＝?



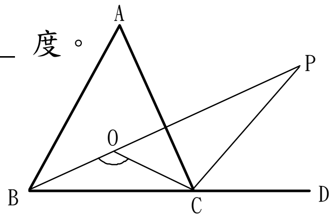
【練習七】

求∠A＋∠B＋∠C＋∠D＋∠E＋∠F＋∠G＋∠H＋∠I＝?



【範例八】

△ABC 中，∠B 與∠C 的平分線之夾角為 115 度，則∠B 的內角平分線與∠C 的外角平分線之夾角為 ________ 度。



【練習八】

如圖，$\overline{AD} \perp \overline{AE}$，∠DCB 的平分線與∠EBC 的平分線交於 P，則∠P＝___度。