綜合證題法

一. 垂直平分線(中垂線)性質:

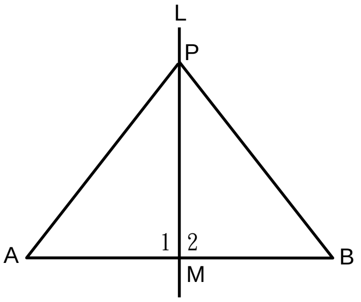
一線段垂直平分線上的任一點，到此線段的兩端點等距離。

【範例】試證垂直平分線到線段的兩端點等距離。

【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，交 $\overline{AB}$ 於 M，且 P 為 L 上的點。

【求證】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【證明】



$\because$ L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線且交 $\overline{AB}$ 於 M

$\therefore \angle 1=\angle 2=90^0$ 且 $\overline{AM}=\overline{BM}$

在 ΔAMP 與 ΔBMP 中

$\because \angle 1=\angle 2$，$\overline{AM}=\overline{BM}$、$\overline{PM}=\overline{PM}$

$\therefore \Delta AMP\cong\Delta BMP$ (SAS) 則 $\overline{PA}=\overline{PB}$

二. 垂直平分線的判別性質:

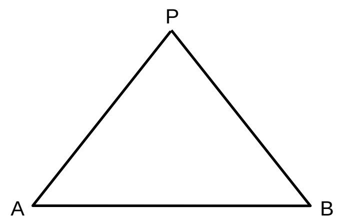
與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

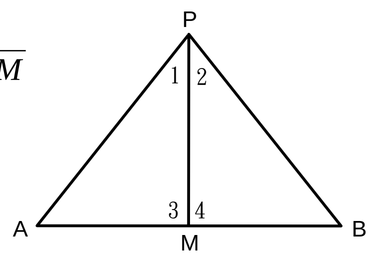
【範例】試證與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

【已知】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【求證】P 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

【證明】





作 $\angle$APB 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 M，則 $\angle 1=\angle 2$

在 ΔAPM 與 ΔBPM 中 $\because \overline{PA}=\overline{PB}$、$\angle 1=\angle 2$、$\overline{PM}=\overline{PM}$

$\therefore \Delta APM\cong\Delta BPM$ (SAS) 則 $\overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle 3=\angle 4$

又 $\because \angle 3+\angle 4=180^0$ $\therefore \angle 3=\angle 4=90^0 \Rightarrow \overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\because \overline{AM}=\overline{BM}$ 且 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{PM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，即 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

三. 角平分線性質:

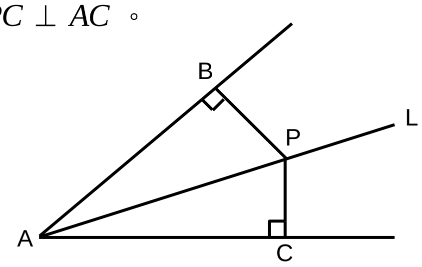
一個角的角平分線上任一點，到角的兩邊等距離。

【範例】試證角平分線上任意一點到此角兩邊等距離。

【已知】L 為 $\angle$BAC 的平分線，P 點在 L 上，且 $\overline{PB}\perp\overline{AB}$，$\overline{PC}\perp\overline{AC}$。

【求證】$\overline{PB}=\overline{PC}$

【證明】



在 ΔABP 與 ΔACP 中，

$\because \angle BAP=\angle CAP$，$\angle ABP=\angle ACP=90^0$，

$\overline{AP}=\overline{AP}$

所以由 AAS 可知 $\Delta ABP\cong\Delta ACP$ 故得 $\overline{PB}=\overline{PC}$

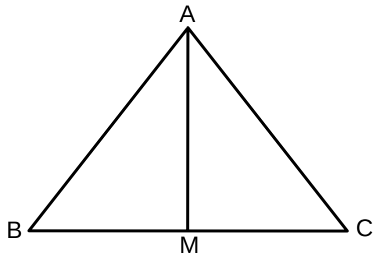
四. 等腰三角形的重要性質:

(1)等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【範例】試證等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【已知】在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AM}$ 平分∠A。

【求證】$\overline{BM}=\overline{CM}$ 且 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$。



【證明】

∵ $\overline{AM}$ 平分 $\angle A$ ∴∠BAM＝∠CAM，

在△ABM 與△ACM 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$，∠BAM＝∠CAM，$\overline{AM}=\overline{AM}$

∴△ABM≅△ACM（SAS）

因此 $\overline{BM}=\overline{CM}$，∠AMB＝∠AMC

又∵∠AMB＋∠AMC＝180^0

∴∠AMB＝∠AMC＝90^0 故得 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

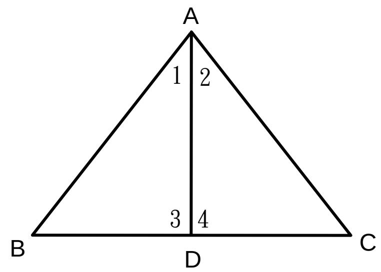
(2)等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【範例】試證等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【已知】若 ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。

【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 且∠1＝∠2

【證明】



在 ΔABD 與 ΔACD 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

∴△ABD≅△ACD（SSS）

則∠1＝∠2、∠3＝∠4

又∵∠3＋∠4＝180^0

∴∠3＝∠4＝90^0

即 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

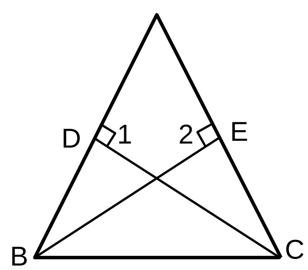
(3)等腰三角形兩腰上的高相等。

【範例】等腰三角形兩腰上的高相等

【已知】ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$。

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$。

【證明】



在 ΔABE 與 ΔACD 中

∵ $\angle 1=\angle 2$、$\angle A=\angle A$、$\overline{AB}=\overline{AC}$

∴ $\Delta ABE\cong\Delta ACD$（AAS）

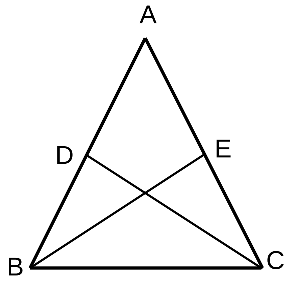
故 $\overline{BE}=\overline{CD}$

(4)等腰三角形兩腰上的中線相等。

【範例】試證等腰三角形兩腰上的中線相等。

【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$



【證明】

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{AE}=\overline{CE}$

在 ΔBDC 與 ΔCEB 中

$\because \overline{BD}=\overline{CE}$、$\overline{BC}=\overline{BC}$，$\angle ABC=\angle ACB$

$\therefore \Delta BDC \cong \Delta CEB$（SAS）

則 $\overline{BE}=\overline{CD}$

【範例】試證平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。

【已知】ABCD 為平行四邊形，$\overline{AC}$ 為對角線。

【求證】$\Delta ABC \cong \Delta CDA$。

【證明】

(1) ∵ABCD 為平行四邊形 $\therefore \overline{AB} // \overline{DC}$，$\overline{AD} // \overline{BC}$。

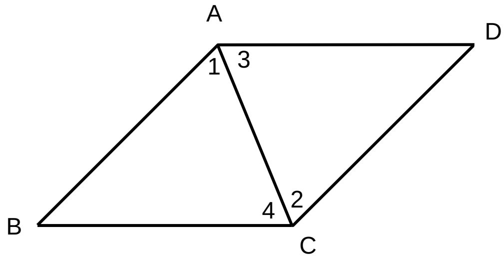
(2) $\because \overline{AB} // \overline{DC}$ $\therefore \angle 1=\angle 2$。

(3) $\because \overline{AD} // \overline{BC}$ $\therefore \angle 3=\angle 4$。

(4) 在 ΔABC 與 ΔCDA 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

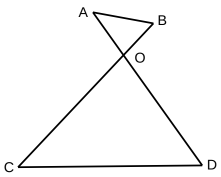
∴ΔABC≅ΔCDA（ASA 全等性質



小 試 身 手

【範例一】

如附圖 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 O 點，甲、乙兩人要證明∠A +∠B ＝∠D +∠C，證法如下，



甲：作一圓通過 A、B、C、D 四點

∵∠A 與∠C 對圓弧 $\overset{\frown}{BD}$，

∴ ∠A ＝∠C，∠B ＝∠D

∴∠A ＋∠B ＝∠C ＋∠D

乙：∵∠BOD 是△AOB 和△DOC 的外角

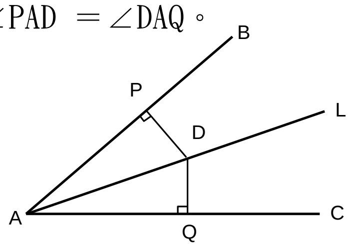
∴∠BOD ＝∠A+∠B ＝∠C ＋∠D

聰明的你，判斷甲、乙兩人的證法，誰正確？答：______。

【練習一】

如附圖，∠APD ＝∠AQD ＝90^0，$\overline{PD}=\overline{QD}$。

求證：∠PAD ＝∠DAQ。



證明：∵∠APD＝∠AQD＝90^0（已知）

______（已知）

$\overline{AD}=\overline{AD}$（共同邊）

∴△PAD≅△QAD（______全等性質）

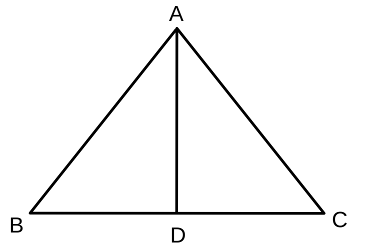
∴∠PAD＝∠DAQ（對應角相等）

【範例二】

【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 、$\overline{BD}=\overline{CD}$

【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$

【證明】

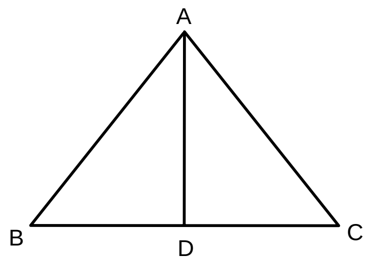


【練習二】

【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，∠B＝∠C， $\overline{AD}$ 為∠BAC 的平分線

【求證】△ABD≅△ACD

【證明】

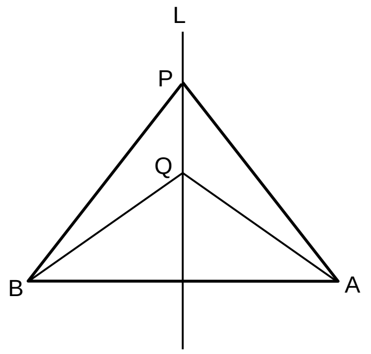


【範例三】

【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，P、Q 在 L 上

【求證】△APQ≅△BPQ

【證明】

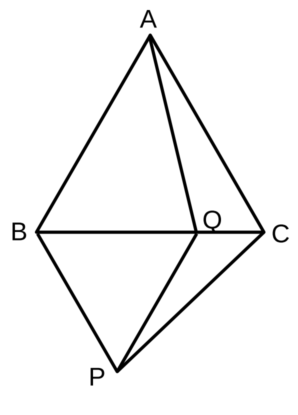


【練習三】

【已知】△ABC 與△BPQ 都是正三角形

【求證】$\overline{AQ}=\overline{CP}$

【證明】

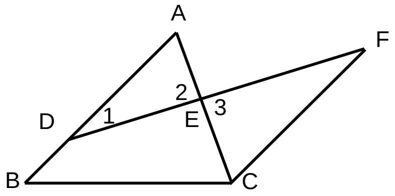


【範例四】

【已知】如圖，D 為 $\overline{AB}$ 上一點，$\overline{DF}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，$\overline{DE}=\overline{EF}$ ，$\overline{FC}\,//\,\overline{AB}$ 。

【求證】$\overline{AE}=\overline{CE}$

【證明】

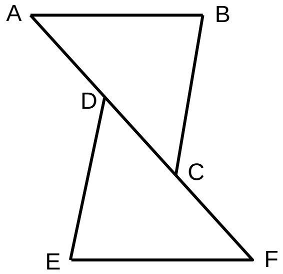


【練習四】

【已知】$\overline{AB}\,//\,\overline{EF}$ ，$\overline{AD}=\overline{CF}$ ，∠B＝∠E

【求證】$\overline{AB}=\overline{EF}$

【證明】

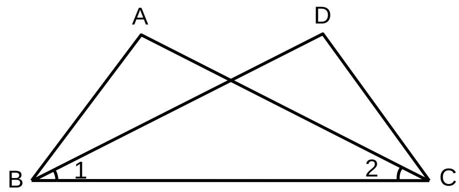


【範例五】

【已知】∠ABC＝∠DCB，∠1＝∠2

【求證】$\overline{BD}=\overline{AC}$

【證明】

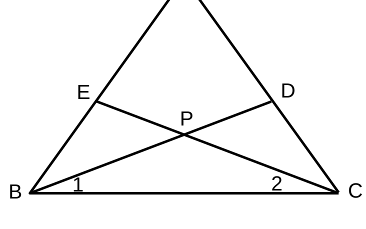


【練習五】

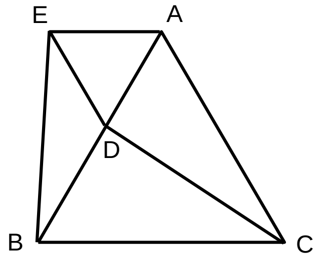
【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，∠1＝∠2

【求證】$\overline{BD}=\overline{CE}$

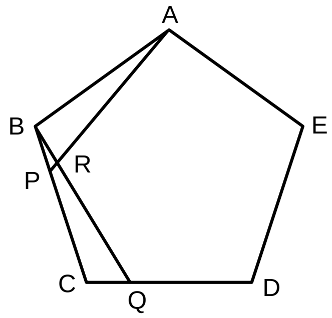
【證明】



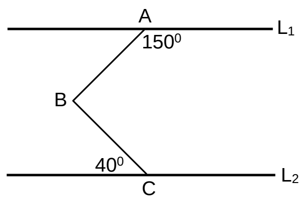
【範例六】
【已知】△ABC 與△ADE 皆為正三角形
【求證】 $\overline{BE}=\overline{CD}$
【證明】



【練習六】
【已知】ABCDE 為正五邊形，$\overline{BP}=\overline{CQ}$
【求證】 $\overline{AP}=\overline{BQ}$
【證明】

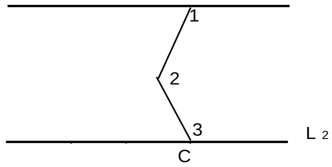


【範例七】
如圖，L_1 // L_2，求證∠ABC＝70 度
【證明】



【練習七】
如圖，L_1 // L_2，若∠1＝100^0，∠2＝150^0，求證∠3＝110 度

【證明】

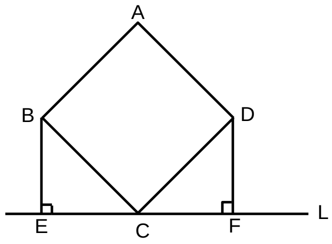


【範例八】

【已知】過正方形 ABCD 之 C 點，作一直線 L，分別過 B、D 點作 $\overline{BE}\perp L$ 、 $\overline{DF}\perp L$ 。

【求證】 $\overline{EF}=\overline{DF}+\overline{BE}$

【證明】

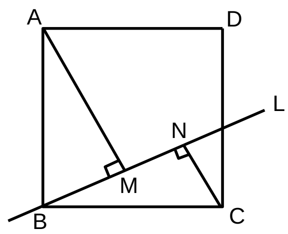


【練習八】

【已知】直線 L 通過正方形 ABCD 的頂點 B， $\overline{AM}\perp L$ ， $\overline{CN}\perp L$

【求證】 $\overline{AM}=\overline{BN}$

【證明】



【範例九】

三角形 ABC 三邊長分別為 24 公分、24 公分、32 公分，試求其面積。

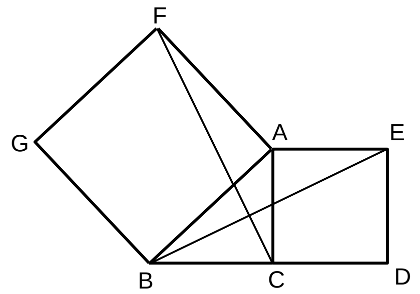
【練習九】

△ABC 中，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=30$ 公分，$\overline{BC}$ ＝36 公分，試求△ABC 一腰上的高為多少？

【範例十】

如圖，以△ABC 的兩邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 為邊，作正方形 ABGF、ACDE，求證：$\overline{BE}=\overline{CF}$

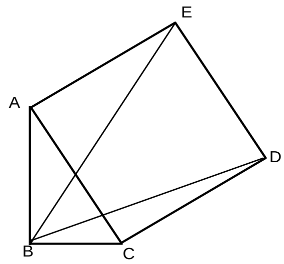
【證明】



【練習十】

如圖，△ABC 中， $\overline{AB}$ ＝4，$\overline{BC}$ ＝3，ACDE 為正方形，求：

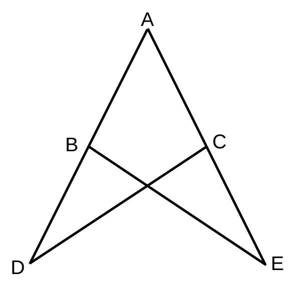
（1）$\overline{BD}$ ＝？（2）$\overline{BE}$ ＝？



【範例十一】

如圖，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{AD}=\overline{AE}$ ，求證∠ABE＝∠ACD

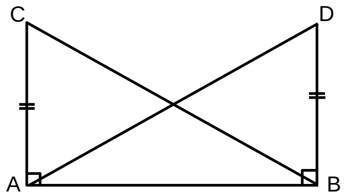
【證明】



【範例十二】

如圖，已知$\overline{CA} \perp \overline{AB}$，$\overline{DB} \perp \overline{AB}$，$\overline{CA} = \overline{DB}$，求證$\overline{CB} = \overline{DA}$

【證明】



【範例十三】

如圖，已知$\overline{AD} = \overline{AE}$，$\overline{BD} = \overline{BE}$，C 點在$\overleftrightarrow{AB}$上，求證$\overline{CD} = \overline{CE}$

【證明】