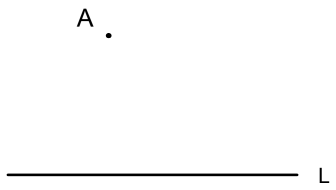
平行尺規作圖

在前面的作圖，都是有關垂直的作圖部分，但在幾何學中我們亦常用到平行的觀念及性質，所以我們接著來介紹如何畫平行線的尺規作圖。

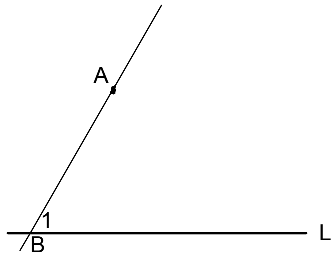
平行尺規作圖：給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。



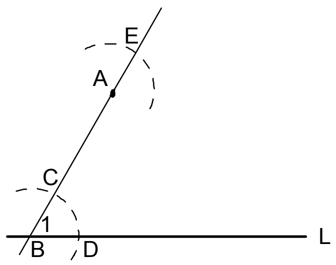
【已知】直線 L 與線外一點 A。

【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

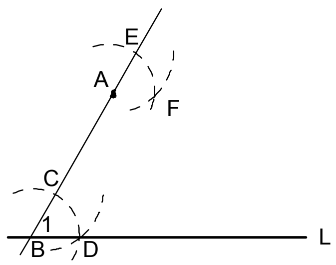
【作法一】步驟一：過線外一點 A 隨意畫與 L 交錯之直線，交直線 L 於 A 點，所設成的角為∠1。



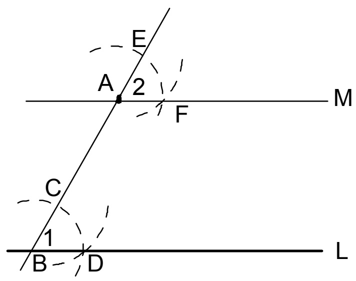
步驟二：分別以 A、B 為圓心，相同長度為半徑畫弧，交點分別為 C、D、E。



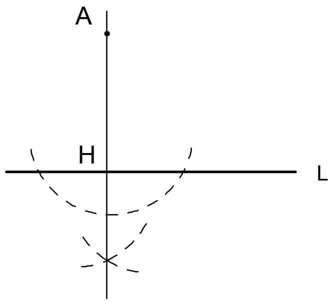
步驟三：以 E 為圓心，$\overline{CD}$ 為半徑畫弧，交點為 F 點。



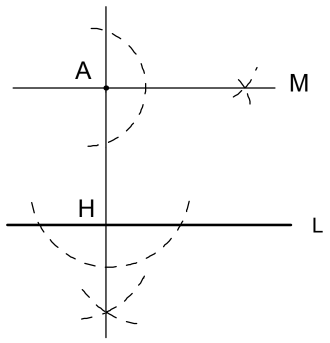
步驟四：連接 $\overline{AF}$ 線段即為所求。



【作法二】 步驟一：過 A 點作 $\overleftrightarrow{AH} \perp L$。



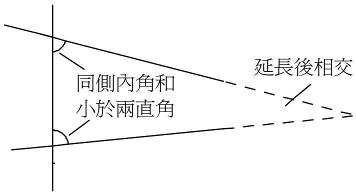
步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 $\overleftrightarrow{AH}$，則 M//L。



平行線性質與應用

古希臘的幾何，也就是歐幾里德的幾何是由公設所建立，其中公設五是很重要的，此公設又稱之為平行公設，是有關平行的幾何。

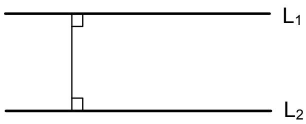
【公設五】若一直線和兩直線相交，且其中一側的同側內角和小於兩直角，則將此兩直線延長後，會交於同側內角和小於二直角的一側。



平行線的定義與性質

平行線的定義：

由【公設五】我們給定兩直線將平行的定義。在平面的兩條直線，若有一直線能同時垂直於這兩條直線，就說這兩條直線互相平行。且平行的兩條直線永不相交。如下圖，直線 L_1 與 L_2 平行，記作 $L_1 /\!/ L_2$，讀作「L_1 平行於 L_2」。

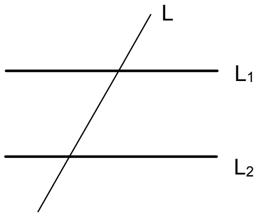


平行觀念：

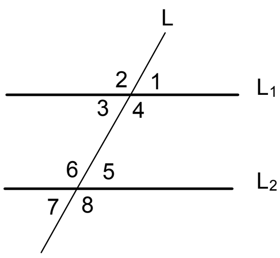
(1) 兩平行線之間保持相同的距離，且無限延伸後沒有交點。

(2) 一線段若垂直於平行線中的一條直線，必垂直於平行線中的另一條直線。

截線：在一平面上，直線 L 分別與直線 L_1 與 L_2 相交於不同兩點時，則 L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。如下圖，L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。

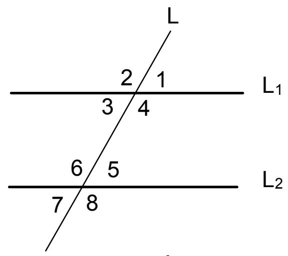


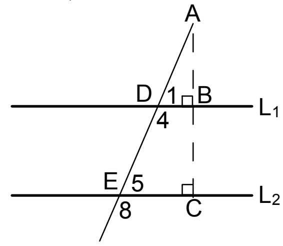
截角：直線 L 為 L_1 與 L_2 的截線，形成 8 個截角，如下圖。



(1)同位角相等：

$\angle 1$ 在 L_1 的右上方，$\angle 5$ 在 L_2 的右上方，位置相同都在右上方，故稱 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 為同位角，同理，$\angle 4$ 與 $\angle 8$、$\angle 2$ 與 $\angle 6$、$\angle 3$ 與 $\angle 7$ 都是同位角。在此我們可知:
$\angle 1=\angle 5$；$\angle 4=\angle 8$；$\angle 2=\angle 6$；$\angle 3=\angle 7$。





【證明】 如右圖，做 $\overline{AC}$ 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2。

在 ΔADB 與 ΔAEC 中，$\angle B=\angle C$ 皆為直角，

且 $\angle BAD=\angle CAE$。

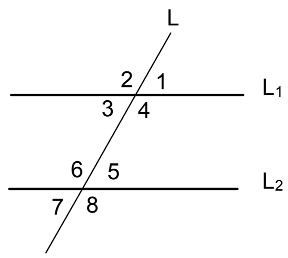
在 ΔADB 中，$\angle A+\angle B+\angle 1=180^0$（三角形內角和 180^0）。

在 ΔAEC 中，$\angle A+\angle C+\angle 5=180^0$（三角形內角和 180^0）。

$\Rightarrow \angle 1=\angle 5$，故同位角相等。

(2)內錯角相等：

$\angle 5$ 與 $\angle 3$、$\angle 4$ 與 $\angle 6$，都在 L_1 與 L_2 的內側，但交錯在 L 的兩邊，故稱為內錯角，在此我們可知 $\angle 3=\angle 5$；$\angle 4=\angle 6$。



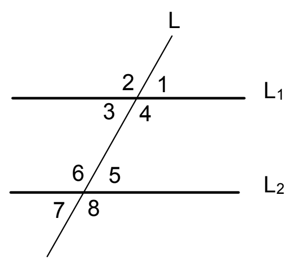
【證明】 如右圖，$\because \angle 1=\angle 3$(對頂角相等)

又Θ $\angle 1=\angle 5$(同位角相等)

$\therefore \angle 3=\angle 5$，故內錯角相等。

(3)同側內角互補：

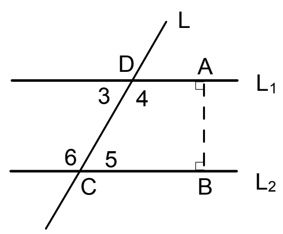
$\angle 5$ 與 $\angle 4$ 都在 L_1 與 L_2 的內側，且在 L 的同一側，故稱為同側內角；同理，$\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也為同側內角。
在此我們可知 $\angle 4+\angle 5 = 180^0$；$\angle 3+\angle 6 = 180^0$。



【證明一】 $\angle 1+\angle 4=180^0$

$\because \angle 1=\angle 5$(同位角相等)

$\therefore \angle 4+\angle 5=180^0$



【證明二】 如右圖，做 $\overline{AB}$ 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2。

$\because$ 四邊形 ABCD 內角和為 360^0

$\therefore \angle A+\angle B+\angle 5+\angle 4=360^0$

$\Rightarrow \angle 4+\angle 5=360^0-90^0-90^0=180^0$，

故同側內角互補。

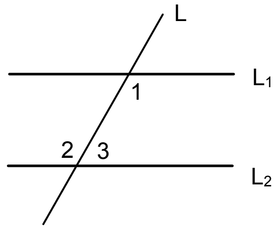
【範例】如圖，L_1 // L_2 ，L 是 L_1與 L_2 的一條截線，$\angle 1=55^{0}$，求$\angle 2$、$\angle 3$？

【解說】∵L_1 // L_2

∴$\angle 1=\angle 2=55^{0}$（內錯角相等）

$\angle 1+\angle 3=180^{0}$ （同側內角互補）

$\angle 3=180^{0}-55^{0}=125^{0}$

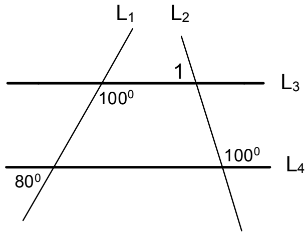


【範例】(1) 如附圖，直線 L_1、L_2、L_3、L_4 中，互相平行的有______。

(2) 其中$\angle 1$ ＝______。

【解說】(1) L_3 // L_4 （∵同側內角互補）

(2) $\angle 1=180^{0}-100^{0}=80^{0}$



【範例】設$\angle A$與$\angle B$的兩邊互相平行，若$\angle A=65^{0}$，求$\angle B$＝？

【解說】

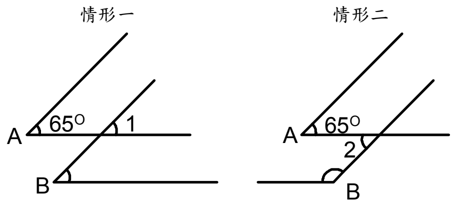
可能有兩種情形(如右圖)：

（1） $\angle 1=\angle A=65^{0}$（同位角相等），

$\angle B=\angle 1=65^{0}$（同位角相等）

（2） $\angle 2=\angle A=65^{0}$（內錯角相等）

$\angle B=180^{0}-\angle 2=180^{0}-65^{0}=115^{0}$（同側內角互補）

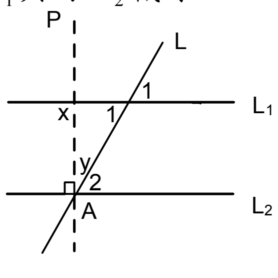


平行線的判別:

在前面我們知道，L_1// L_2 ，L 為 L_1與 L_2 的截線，則有同位角相等、內錯角相等及同側內角互補的性質，那反過來假設 L_1與的 L_2 被一直線所截，則此三性質是否也可推得 L_1// L_2 ？

(1)**兩條直線被一直線所截，若截出的同位角相等，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1與的 L_2 截線，且$\angle 1=\angle 2$



【證明】過 A 點作直線 P，使 P⊥L_2於 A。

$\Rightarrow \angle 2+\angle y=90^{0}$⋯①

$\angle 1+\angle y=180^{0}-x$⋯②

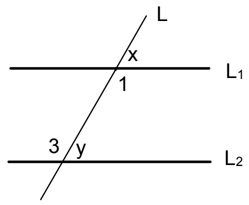
②－① $\angle 1-\angle 2=90^{0}-x$

∵$\angle 1=\angle 2$（同位角相等）。

∴$x=90^{0}$，故 L_1// L_2 。

(2)**兩條直線被一直線所截，若截出的內錯角相等，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1與的 L_2 截線，且∠1＝∠3



【證明】 $\angle x+\angle 1=180^0$

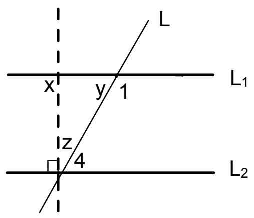
$\angle 3+\angle y=180^0$

$\Rightarrow \angle x=\angle y$

By(1)故 $L_1 // L_2$ 。

(3)**兩條直線被一直線所截，若截出的同側內角互補，則此兩直線平行。**

如下圖，若 L 為 L_1與的 L_2 截線，且$\angle 1+\angle 4=180^0$



【證明】 $\angle y+\angle 1=180^0$…①

$\angle z+\angle 4=90^0$…②

$\angle x=\angle y+\angle z$ (外角定理)…③

①＋②＋③

$\Rightarrow(\angle y+\angle 1)+(\angle z+\angle 4)+\angle x=180^0+90^0+(\angle y+\angle z)$

$\Rightarrow \angle 1+\angle 4+\angle x=270^0$

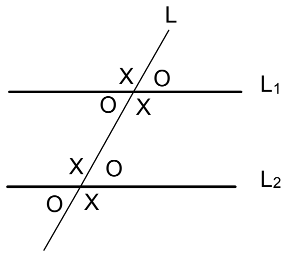
$\because \angle 1+\angle 4=180$

$\therefore x=90^0$，故 $L_1 // L_2$ 。

【結論】 若兩平行線被一直線所截，則(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補。

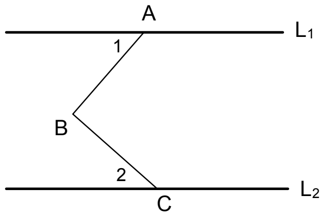
若兩條直線被一直線所截若(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，三者其中一個成立，則此兩直線平行。

若兩條平行線被截線所截時，形成的八個角，角度只有兩種，如圖所示。



平行線性質的應用：對於平行線，除了常用平行線性質：(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，我們將介紹幾個相關延伸性質。

1. 若 $L_1 // L_2$，則 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$

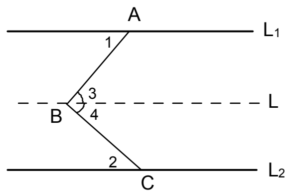


【證明】過 B 點作 L 平行 L_1，

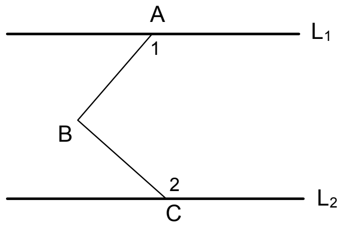
$\because L_1 // L_2 \quad \therefore L // L_2$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$（內錯角相等）

故 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$。



2. 若 $L_1 // L_2$，則 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^0$



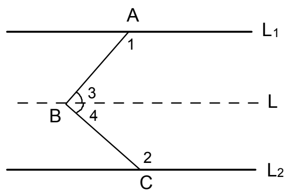
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1，

$\because L_1 // L_2 \quad \therefore L // L_2$

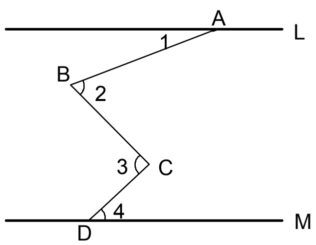
$\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180^0$，

$\angle 2 + \angle 4 = 180^0$（同側內角互補）

故 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$



3. 如右圖，若 $L // M$，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$。



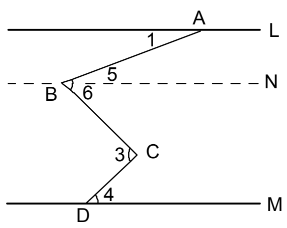
【證明】過 B 點作 N 平行 L，

$\because L // M \therefore N // M$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$，

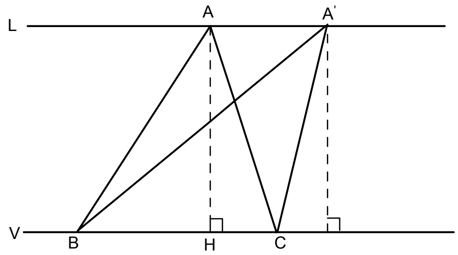
$\angle 3 = \angle 4 + \angle 6$

故 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 4$



4. 平行線上的三角形面積（同底等高的概念）

當 A 點在 L 上移動時…ΔABC 的形狀會隨之改變，但是ΔABC 的面積是不變的。

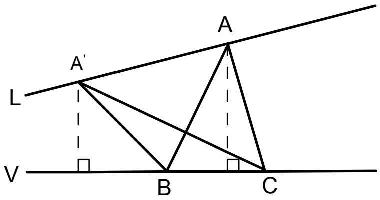


說明：ΔABC 的底永遠是 $\overline{BC}$（同底）

ΔABC 的高 $\overline{AH}$ 是定值（等高）（$\overline{AH}$ 即為平行線 L 、V 的距離）

那假設 L 與 V 不平行的話，如下圖:

當 A 點在 L 上移動時…ΔABC 的形狀會隨之改變，則ΔABC 的面積會隨著高度不同而改變。



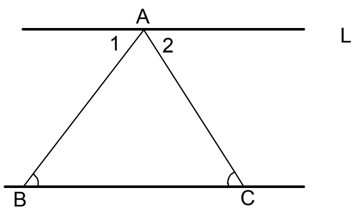
說明: ΔABC 的底永遠是 $\overline{BC}$（同底）

ΔABC 的高會隨著 L、V 之間的距離不同而改變，所以面積也會跟著改變。

ΔABC 面積〉$\Delta A' BC$ 面積

5. 利用平行線性質證明三角形內角和＝180^{0}

如圖，試證明∠ACB＋∠ABC＋∠BAC＝180^{0}



【證明】 過 A 點作直線 L 平行 $\overline{\mathrm{BC}}$

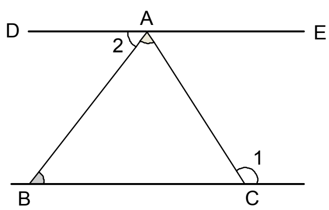
∵∠ABC＝∠1；∠ACB＝∠2 （內錯角相等）

∴△ABC 內角和＝∠ACB＋∠ABC＋∠BAC

＝∠2＋∠1＋∠BAC＝180^{0}

6. 利用平行線性質證明外角定理

如圖，試證明∠1＝∠ABC＋∠BAC



【證明】 過 A 點作直線 $\overline{\mathrm{DE}}//\overline{BC}$

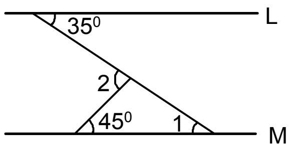
∵∠ABC＝∠2（內錯角相等）

∴∠1＝∠DAC

＝∠2＋∠BAC

＝∠ABC＋∠BAC

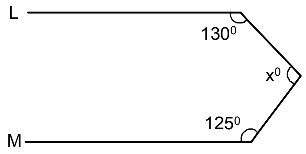
【範例】如圖，若 L // M，求$\angle 1=$？$\angle 2=$？



【解說】$\angle 1=35^0$（內錯角相等）

$\angle 2=35^0+45^0=80^0$

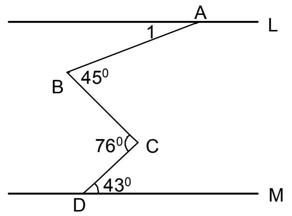
【範例】如圖，若 L // M，求 x＝？



【解說】$130^0+x+125^0=360^0$

$\therefore x=105^0$

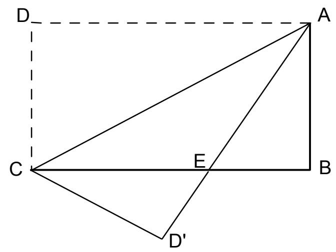
【範例】如圖，若 L // M，求$\angle 1=$？



【解說】$\angle 1+76^0=45^0+43^0$

$\therefore \angle 1=12^0$

【範例】如附圖，長方形 ABCD 中，沿 $\overline{AC}$ 摺疊，D 點落在 D’ 點上，若$\angle DAC=25^0$，則：
（1）$\angle ACD=$？（2）$\angle AEB=$？ (3) $\angle ECD=$？



【解說】（1）$\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=25^0$，$\angle D=90^0$

$\therefore \angle ACD=180^0-25^0-90^0=65^0=\angle ACD'$

（2）$\because \angle DAC=\angle D'AC=25^0$

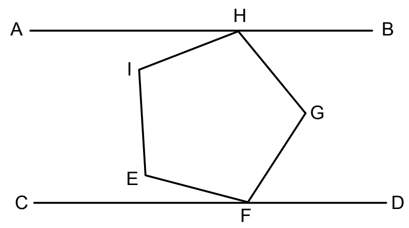
$\therefore \angle DAE=\angle DAC+\angle D'AC=50^0$

$\therefore \angle DAE=\angle AEB=50^0$（內錯角相等）

（3）$\because \angle ACE=\angle DAC=25^0$（內錯角相等）

$\therefore \angle ECD'=\angle ACD'-\angle ACE=65^0-25^0=40^0$

【範例】如附圖，$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$，且正五邊形 EFGHI 的頂點 H、F 分別在 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 上，又$\angle GFD$ 的度數是$\angle EFC$ 的 3 倍，求：(1) $\angle GFD=$？
(2) $\angle AHI=$？



【解說】(1) 正五邊形一內角＝$\dfrac{(5-2)\times 180^0}{5}=108^0$

設$\angle EFC=x^0$ $\therefore \angle GFD=3x^0$

$\Rightarrow x^0+108^0+3x^0=180^0$，$x^0=18^0$

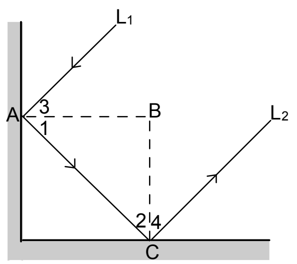
故$\angle GFD=18^0\times 3=54^0$

(2) $\because \overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ $\therefore \angle HGF=\angle BHG+\angle GFD$

$\therefore 108^0=\angle BHG+54^0$，$\angle BHG=54^0$

$\therefore \angle AHI=180^0-54^0-108^0=18^0$

【範例】如附圖，有一條光線 L_1 經過兩個互相垂直的平面鏡反射後，反射光線為 L_2，那麼 L_1 和 L_2 是否平行？為什麼？



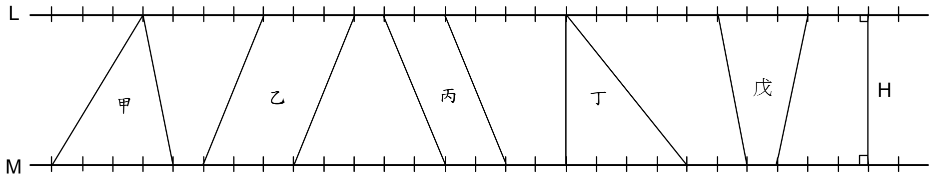
【解說】$\angle ABC = 90^0 \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90^0$，

又 $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，

所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^0$（同側內角互補）

，故 $L_1 // L_2$。

【範例】若 L // M，選出面積相同的圖形

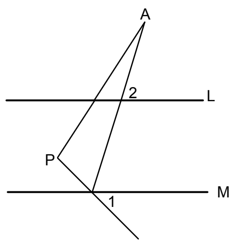


【解說】甲面積：甲$=\dfrac{1}{2}\times 4\times H=2H$　　乙面積：乙$=3H$

丙面積：丙$=2H$　　丁面積：丁$=\dfrac{1}{2}\times 4\times H=2H$

戊面積：戊$=\dfrac{1}{2}\times(3+1)\times H=2H$

【範例】如圖，已知 L // M，若 $\angle 1 = 40^0$、$\angle 2 = 70^0$、$\angle A = 25^0$，則 $\angle P =$＿＿＿＿度。



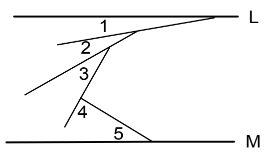
【解說】$\angle P = \angle 1 + \angle 2 - \angle A$

$= 110^0 - 25^0$

$= 85^0$

【範例】如圖，已知 L//M，請問：

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 等於＿＿＿＿＿度。



【解說】作 L_1、L_2、L_3 平行 L

$\because L // L_1$　　$\therefore \angle 1 = \angle a$（同位角相等）

$\because L_1 // L_2$　　$\therefore \angle a + \angle 2 = \angle b$（同位角相等）

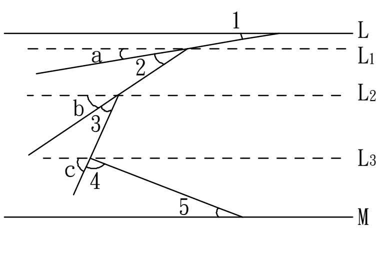
$\because L_2 // L_3$　　$\therefore \angle b + \angle 3 = \angle c$（同位角相等）

則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

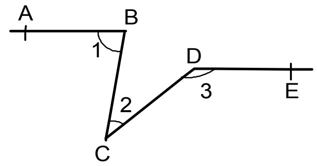
$= \angle a + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= \angle b + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= \angle c + \angle 4 + \angle 5 = 180^0$



【範例】 如附圖，已知 $\overline{AB}//\overline{DE}$，若 $\angle 1 = 80^{0}$，$\angle 2 = 40^{0}$，則 $\angle 3 =$______。



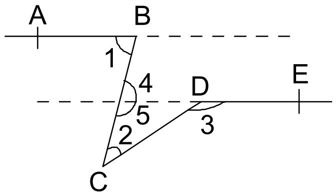
【解說】 作 $\xrightarrow[AB]{}$ 與 $\xleftarrow[ED]{}$

$\because \overline{AB}//\overline{DE}$

$\therefore \angle 1 = \angle 4 = 80^{0}$（內錯角相等）

$\therefore \angle 5 = 180^{0} - \angle 4 = 180^{0} - 80^{0} = 100^{0}$

$\angle 3 = \angle 2 + \angle 5 = 40^{0} + 100^{0} = 140^{0}$



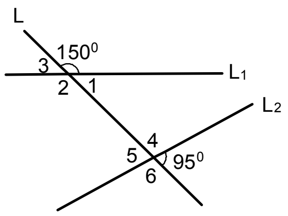
小 試 身 手

【範例一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，求：

(1) $\angle 1 =$_____度，$\angle 1$ 的內錯角是___，其度數是_____度。

(2) $\angle 2 =$_____度，$\angle 3$ 的同位角是___，其度數是_____度。



【練習一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，設 $\angle 1 = 50^{0}$ 求：

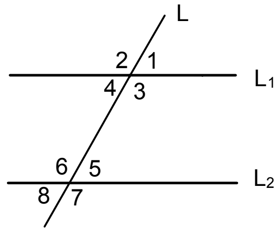
(1) $\angle 3$ 的內錯角是___，其度數是_____度。

$\angle 3$ 的同側內角是___，其度數是____度。

(2) $\angle 5$ 的同位角是___，其度數是_____度。

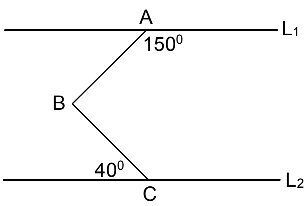
(3) $\angle 4$ 的鄰角是______，其度數是____度。

(4) $\angle 6$ 的對頂角是___，其度數是_____度。



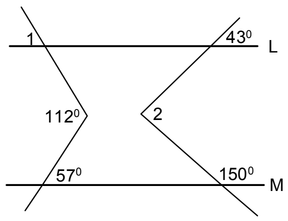
【範例二】

如圖，$L_1 // L_2$，求 $\angle ABC =$？



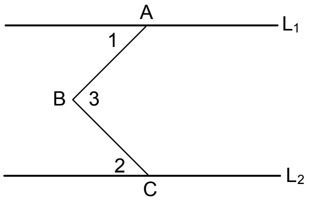
【練習二】

如圖，已知 L // M，則 $\angle 1 + \angle 2 =$？



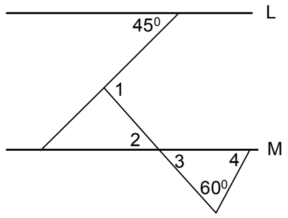
【範例三】

如圖，L // M，$\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$，且 $\angle 3 = 99^0$，則 $\angle 1 = ?$



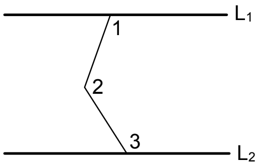
【練習三】

如圖，已知 L // M，若 $\angle 1 = (7x+1)^0$，$\angle 2 = (3x+8)^0$，則 $\angle 1 + \angle 4 = ?$



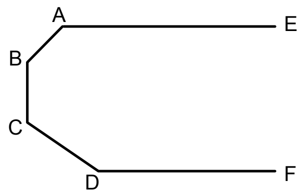
【範例四】

如圖，L_1 // L_2，若 $\angle 1 = 100^0$，$\angle 2 = 150^0$，則 $\angle 3 = ?$



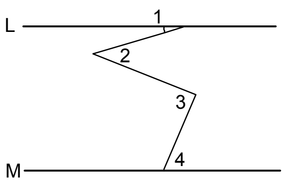
【練習四】

如圖，$\overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{DF}$，$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$



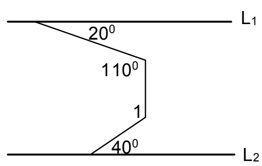
【範例五】

如圖，L // M，若 $\angle 1 = 12^0$、$\angle 2 = 33^0$、$\angle 3 = 95^0$，則 $\angle 4 = ?$



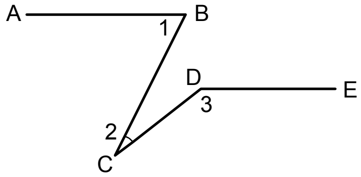
【練習五】

如圖，L_1 // L_2，求 $\angle 1$ 的度數。

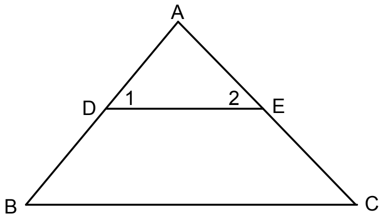


【範例六】

(1)如圖，已知 $\overline{AB} // \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^{0}$，$\angle 2 = 40^{0}$，則 $\angle 3 =$______。

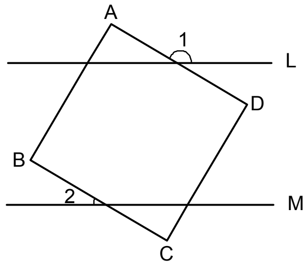


(2) 如圖，$\angle 1 = \angle A$，且 $10\angle 1 = 5\angle B = 2\angle C$＝則 $\angle B$＝______度。

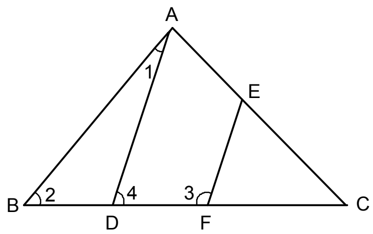


【練習六】

(1) 如圖，已知 L // M，四邊形 ABCD 為正方形，若 $\angle 1 = 150^{0}$，則 $\angle 2$＝？

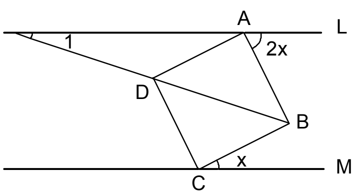


(2) 如圖，$\angle 1 = 15^{0}$，$\angle 2 = 50^{0}$，則當 $\angle 3$＝？時 $\overline{AD} // \overline{EF}$ 。



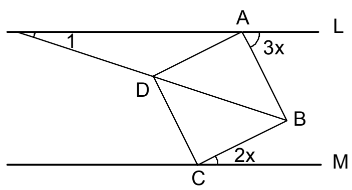
【範例七】

如圖，L // M，*ABCD* 為正方形，求 $\angle 1$ 。



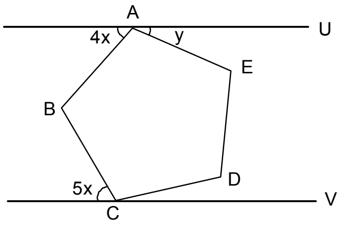
【練習七】

如圖，L // M，*ABCD* 為正方形，求 $\angle 1$



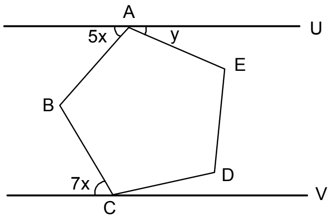
【範例八】

如圖，U//V，*ABCDE* 為正五邊形，求 y^0



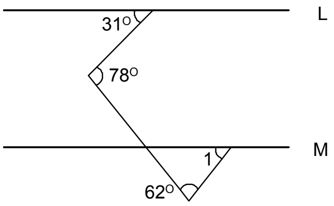
【練習八】

如圖，U//V，*ABCDE* 為正五邊形，求 y^0



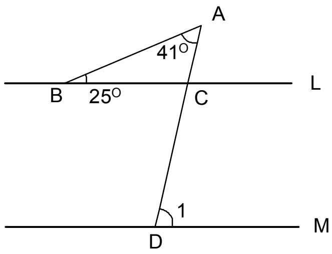
【範例九】

如圖，若 L//M，求∠1。



【練習九】

如圖，若 L//M，求∠1。



【範例十】

如圖，已知 $\overline{AB}//\overline{CD}$，L 為截線，$\overline{EP}$ 平分∠BEF，$\overline{FP}$ 平分∠EFD，試說明 $\overline{EP}$ 與 $\overline{FP}$ 之間的關係。

【練習十】

如圖，已知 $\overline{AB}//\overline{CD}$，L 為截線，$\overline{EP}$ 平分∠BEF，$\overline{FP}$ 平分∠EFD，且∠BEF＝120^0，試問：(1) ∠1、∠2、∠3、∠4 各多少度?

(2)∠1＋∠3＝?