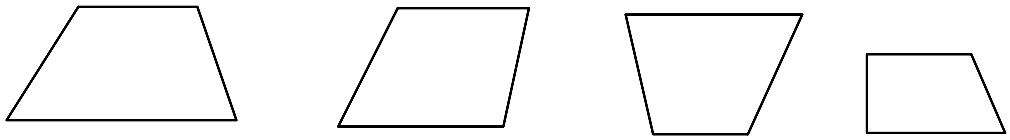
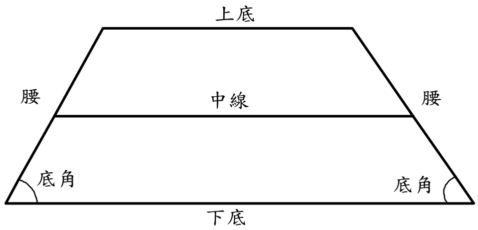
梯形

梯形的基本概念

梯形的定義:四邊形中，有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行，則稱此四邊形為梯形。



名詞介紹:上底、下底、腰、中線、底角。



（1）上底與下底：梯形中互相平行的兩邊，稱為上底與下底。

（2）腰：不平行的兩邊稱為腰。

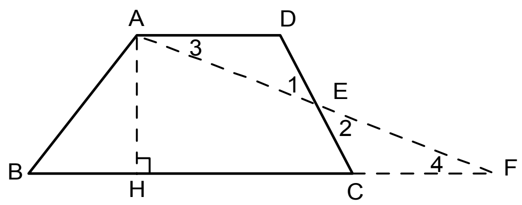
（3）中線：連接兩腰中點的線段，稱為梯形的中線。

（4）底角：兩腰與下底的夾角稱為底角。

梯形的面積$=\frac{1}{2}\times$(上底＋下底)$\times$高

以下我們用兩種不同方式來證明梯形的面積：

【方法一】將梯形化為三角形。



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。

【求證】梯形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$。

【證明】(1)取$\overline{CD}$之中點 E，作$\overline{AE}$交$\overline{BC}$於 F 點。

(2)由△ADE 與△CFE 中，∵$\overline{DE}=\overline{CE}$

$\angle 1=\angle 2$(對頂角相等)、$\angle 3=\angle 4$(內錯角相等)

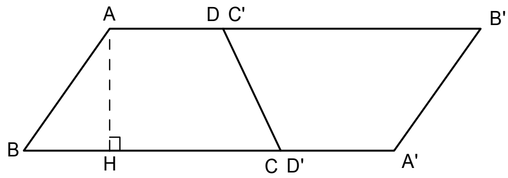
∴△ADE≅△FCE(ASA)　∴$\overline{AD}=\overline{CF}$

梯形 ABCD 面積$=$△ABF$=\frac{1}{2}\times(\overline{BF})\times\overline{AH}$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{CF}+\overline{BC})\times\overline{AH}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$$

【方法二】利用兩個梯形組合成平行四邊形。



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。

【求證】梯形 ABCD 面積＝$\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$。

【證明】(1) 我們將梯形 ABCD 複製成梯形 A'B'C'D'，並將梯形 A'B'C'D'旋轉使得 C'點與 D 點，C 點與 D'點重合。則四邊形 ABA'B'為平行四邊形（兩雙對邊平行且相等)。

(2) 梯形 ABCD 面積＝$\frac{1}{2}\times\square$ ABA'B'＝$\frac{1}{2}\times(\overline{A'D'}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$$

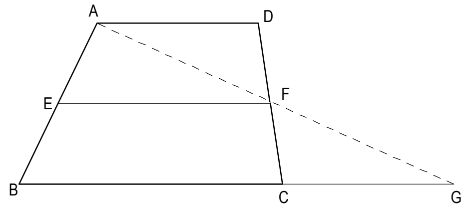
梯形的相關中線性質

【性質 1】**梯形的中線必平行於上下底，且其長等於上下底和的一半。**

【性質 2】**連接梯形兩對角線中點的線段，必平行於上下底，且其長等於兩差的一半。**

接著我們來證明以上這 2 個性質：

【性質 1】**梯形的中線必平行於上下底，且其長等於上下底和的一半。**



【已知】梯形 ABCD 中 E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$之中點。

【求証】$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$，$\overline{EF}//\overline{AD}$，$\overline{EF}//\overline{BC}$

【証明】(1)連接 $\overline{AF}$，並延長 $\overline{AF}$ 交 $\overline{BC}$ 的延長線於 G 點。

(2)在△ADF 和△GCF 中, ∠AFD＝∠GFC(對頂角相等)，

又 $\overline{AD}//\overline{BC}\Rightarrow$ ∠ADF＝∠GCF(內錯角相等)，

且 $\overline{EF}$ 為中線 $\Rightarrow\overline{DF}=\overline{CF}$

∴△ADF≅△GCF(ASA 全等性質) $\Rightarrow\overline{AF}=\overline{GF}$，且 $\overline{AD}=\overline{CG}$

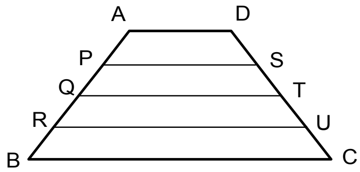
(3)∵E 為 $\overline{AB}$ 的中點，F 為 $\overline{AG}$ 的中點

$\Rightarrow\overline{EF}//\overline{BG}$，$\overline{EF}=\frac{1}{2}\times\overline{BG}=\frac{1}{2}\times(\overline{CG}+\overline{BC})$【三角形中點連線性質】

∴ $\overline{AD}//\overline{BC}$，且 $\overline{AD}=\overline{CG}$

∴ $\overline{EF}//\overline{AD}$，$\overline{EF}//\overline{BC}$，$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$

【範例】如圖梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，P、Q、R 四等分 $\overline{AB}$；S、T、U 四等分 $\overline{DC}$，



若 $\overline{AD}=12$，$\overline{BC}=30$，求 $\overline{PS}+\overline{QT}+\overline{RU}=$？

【解答】(1) $\because \overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB}$，且 $\overline{DS}=\overline{ST}=\overline{TU}=\overline{UC}$

$\therefore \overline{AD}//\overline{PS}//\overline{QT}//\overline{RU}//\overline{BC}$

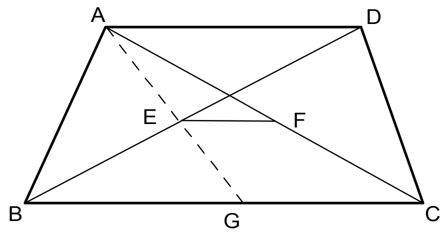
(2) $\overline{QT}=\dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\dfrac{1}{2}(12+30)=21$

(3)同理 $\overline{QT}=\dfrac{1}{2}(\overline{PS}+\overline{RU})$　$\therefore \overline{PS}+\overline{RU}=42$

(4) $\therefore \overline{PS}+\overline{QT}+\overline{RU}=42+21=63$

【性質 2】**連接梯形兩對角線中點的線段，必平行於上下底，且其長等於兩差的一半。**

【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AD}$，E、F 分別為 $\overline{DB}$、$\overline{AC}$ 之中點。



【求證】(1) $\overline{EF}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2) $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$

【證明】(1) $\because \overline{AD}//\overline{BC}$，$\therefore \angle ADE=\angle GBE$(內錯角)，

又 $\overline{BE}=\overline{DE}$(E 為 $\overline{BD}$ 中點)，$\angle AED=\angle GEB$(對頂角)，

故 $\triangle AED\cong\triangle GEB$(ASA)，可得 $\overline{AE}=\overline{EG}$(對應邊)，

在 $\triangle AGC$ 中，$\overline{AE}=\overline{EG}$，$\overline{AF}=\overline{FC}$(F 為 $\overline{AC}$ 中點)，

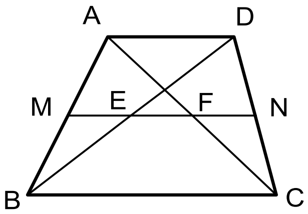
故 $\overline{EF}//\overline{GC}$(三角形兩邊中點連線性質)，即 $\overline{EF}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2)由(1)可得 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{GC}$

又 $\overline{GC}=\overline{BC}-\overline{BG}=\overline{BC}-\overline{AD}$，故 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$

【範例】已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{BC}=2\overline{AD}$，M、N 分別為兩腰的中點。

【求證】$\overline{ME}=\overline{EF}=\overline{FN}$



【證明】(1) $\because \overline{AD}//\overline{BC}$ 且 M、N 分別為兩腰上的中點

$\therefore \overline{MN}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2)在△ABD 中，$\because \overline{ME}//\overline{AD}$，且 $\overline{AM}=\overline{BM}$

$\therefore \overline{BE}=\overline{ED}$　$\therefore \overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{AD}$　同理 $\overline{NF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

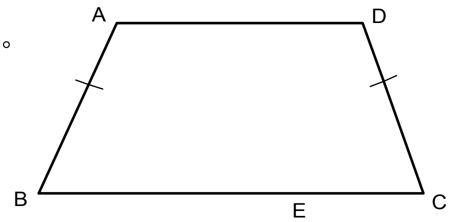
(3) $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})=\frac{1}{2}(2\overline{AD}-\overline{AD})=\frac{1}{2}\overline{AD}$

(4) $\therefore \overline{ME}=\overline{EF}=\overline{FN}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

等腰梯形

1. **等腰梯形的定義**:兩腰相等的梯形。如圖，梯形 ABCD 中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，

則稱四邊形 ABCD 為等腰梯形。



2. **等腰梯形的性質**:在小學我們已經學過以下等腰梯形的性質，現在我們一一來證明。

【性質 1】等腰梯形的兩底角相等。

【性質 2】若一梯形的兩底角相等，則此梯形必為等腰梯形。

【性質 3】等腰梯形的兩對角線相等。

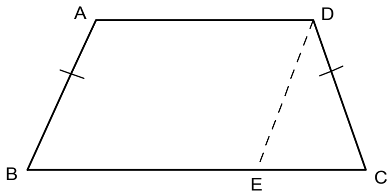
【性質 4】若一梯形的兩對角線相等，則此梯形必為等腰梯形。

Note:【性質 1】與【性質 2】互為等價，【性質 3】與【性質 4】也互為等價。

【性質 1】**等腰梯形的兩底角相等。**

【已知】等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【求證】∠B=∠C。



【證明】(1)過 D 點作 $\overline{AB}$ 的平行線 $\overline{DE}$，交 $\overline{BC}$ 於 E。

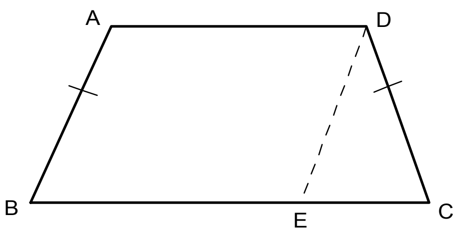
(2) $\because \overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{AD}//\overline{BE}$，∴ABED 為平行四邊形，$\therefore \overline{AB}=\overline{DE}$。

(3) $\because \overline{AB}=\overline{DC}$，$\therefore \overline{DE}=\overline{DC}$，即△DEC 為等腰三角形　∴∠DEC=∠C。

(4) $\because \overline{AB}//\overline{DE}$，∴∠B=∠DEC。

(5)由(3)與(4)可知∠B=∠C。

【性質 2】**若一梯形的兩底角相等，則此梯形必為等腰梯形。**



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，∠B＝∠C。

【求證】$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【證明】(1)過 D 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{BC}$ 於 E。

(2) ∵$\overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{AD}//\overline{BE}$，

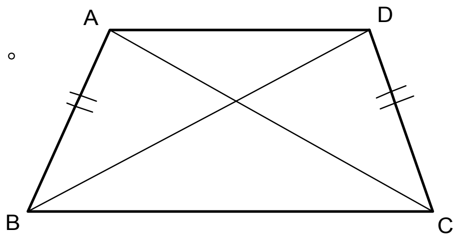
∴ABED 為平行四邊形，　∴$\overline{AB}=\overline{DE}$。

∵$\overline{DE}//\overline{AB}$　∴∠B＝∠DEC

(3) ∵∠B＝∠DEC＝∠C，即 ΔDEC 為等腰三角形

∴$\overline{DE}=\overline{DC}$ $\Rightarrow \overline{AB}=\overline{DC}$

【性質 3】**等腰梯形的兩對角線相等。**



【已知】在等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【求證】$\overline{AC}=\overline{BD}$。

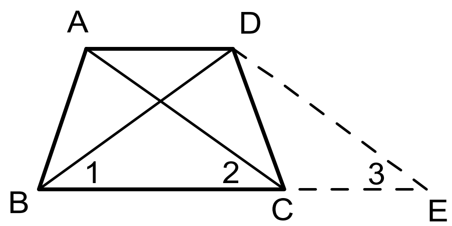
【證明】(1) ∵ABCD 為等腰梯形，∴∠ABC＝∠DCB。

(2) 在△ABC 與△DCB 中，

∵$\overline{AB}=\overline{DC}$，∠ABC＝∠DCB，$\overline{BC}=\overline{BC}$，

∴△ABC≅△DCB(SAS)　∴$\overline{AC}=\overline{BD}$。

【性質 4】**若一梯形的兩對角線相等，則此梯形必為等腰梯形。**



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$。

【求證】$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【證明】(1)過 D 點作 $\overline{DE}//\overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E 點，

∵$\overline{DE}//\overline{AC}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$

∴四邊形 ACED 為平行四邊形$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{AC}$

由△BDE 中，$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{DE}$

∴∠1＝∠3LL (i)　∵$\overline{DE}//\overline{AC}$ ∴∠2＝∠3LL (ii)

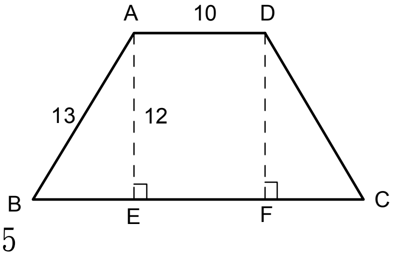
由(i) (ii)$\Rightarrow$∠1＝∠2

(2)在△ABC 與△DCB 中，∵$\overline{AC}=\overline{BD}$，∠1＝∠2，$\overline{BC}=\overline{BC}$，

∴△ABC≅△DCB(SAS)，∴$\overline{AB}=\overline{DC}$

梯形的相關應用:

【範例】等腰梯形腰長 13 公分，高 12 公分，上底長 10 公分，求其面積、周長及中線長。



【解說】(1)作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$ 於 F

$\therefore\overline{EF}=\overline{AD}=10$

(2) ∵ABCD 為等腰梯形　$\therefore\overline{BE}=\overline{CF}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

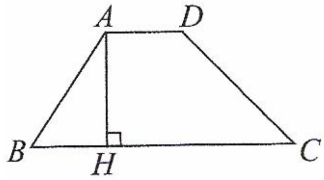
$\therefore\overline{BC}=5+10+5=20$

(3) 梯形面積 $=\frac{1}{2}(10+20)\times12=180$（平方公分）

(4) 周長 $=10+20+13\times2=56$(公分)

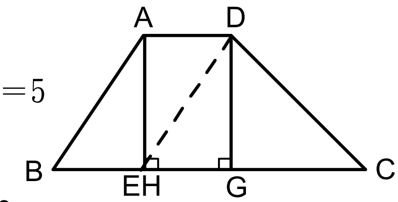
(5) 中線長 $=(10+20)\div2=15$(公分)

【範例】如右圖， ABCD 為一梯形，已知上底 $\overline{AD}=2$，下底 $\overline{BC}=7$，兩腰 $\overline{AB}=3$，$\overline{CD}=4$，求此梯形的高 $\overline{AH}$ 的長度。



【解說】作 $\overline{DE}//\overline{AB}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E

$\because\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{DE}//\overline{AB}$　∴ABED 為平行四邊形

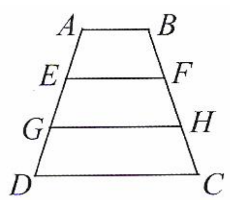


$\therefore\overline{DE}=\overline{AB}=3$，$\overline{BE}=\overline{AD}=2$　$\therefore\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=7-2=5$

∵ΔDEC 之三邊長為 3、4、5　∴ΔDEC 為直角Δ

作 $\overline{DG}\perp\overline{BC}$ 於 G，則 $\overline{DG}=\overline{DE}\times\overline{DC}/\overline{CE}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}=\overline{AH}$

【範例】如右圖，梯形 ABCD 之高為 10，$\overline{AB}//\overline{CD}$，且 $\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{GD}$，$\overline{BF}=\overline{FH}=\overline{HC}$，若 $\overline{EF}=6$，$\overline{GH}=8$，則梯形 ABCD 之面積為多少?



【解說】(1) $\because\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{GD}$，且 $\overline{BF}=\overline{FH}=\overline{HC}$

$\therefore\overline{AB}//\overline{EF}//\overline{GH}//\overline{DC}$

(2) $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{GH})$

$\Rightarrow6=\frac{1}{2}(\overline{AB}+8)\Rightarrow\overline{AB}=4$

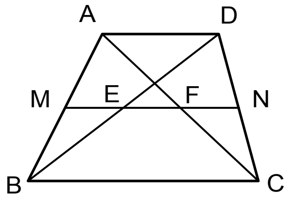
$\overline{GH}=\frac{1}{2}(\overline{EF}+\overline{DC})\Rightarrow8=\frac{1}{2}(6+\overline{DC})\Rightarrow\overline{DC}=10$

∴梯形面積 $=(4+10)\times10\div2=70$

【範例】如右圖，梯形 $ABCD$，$\overline{CD}//\overline{AB}$ 且 $\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，$F$ 為對角線 $\overline{AC}$ 之中點，E 為對角線 $\overline{BD}$ 之中點，$\overline{EF}$ 分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{DC}$ 於 M、N，若 $\overline{BC}=4$，則 $\overline{MN}$？

【解說】$\because \overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{BC}=4$　　$\therefore \overline{AD}=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\overline{MN} \Rightarrow \dfrac{1}{2}(2+4)=3$



【範例】等腰梯形ABCD中，已知 $\overline{AB}//\overline{CD}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$，E、F、G、H分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點，那麼四邊形EFGH為何種四邊形？

【解說】連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$，$\because$ABCD為等腰梯形，$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}$

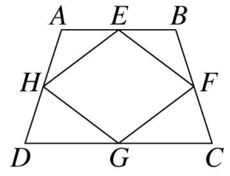
△ABD中，$\because$E、H為 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 中點

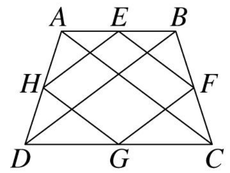
$\therefore \overline{EH}//\overline{BD}$，且 $\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$

同理 $\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，又同理 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

$\because \overline{AC}=\overline{BD}$　$\therefore \overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

故四邊形EFGH為菱形

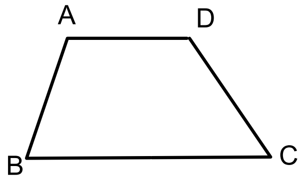




小　試　身　手

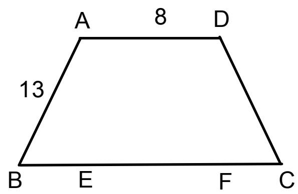
【範例一】

梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，求∠A=？



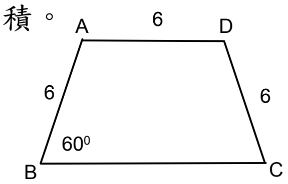
【練習一】

等腰梯形腰長 13 公分，高 12 公分，上底長 8 公分，求其面積。



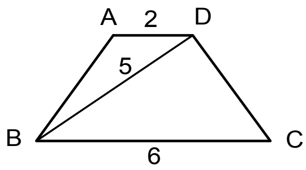
【範例二】

一等腰梯形 ABCD 中，若 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=6$ 公分，$\angle$ABC$=60^0$，求對角線 $\overline{BD}$ 的長及此梯形的面積。



【練習二】

一等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，若 $\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=6$，$\overline{BD}=5$，求此梯形面積。



【範例三】

已知一梯形的上底為 5，下底為 7，求：

(1)此梯形的中線長

(2)此梯形對角線中點所連成的線段長

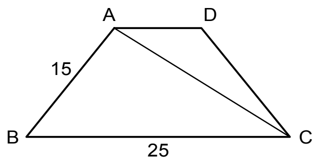
【練習三】

梯形一底長 10 公分，連接對角線中點的線段長 4 公分，求另一底長

【範例四】

如圖，等腰梯形 ABCD，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=15$，$\overline{BC}=25$，$\overline{AC}\perp\overline{AB}$，

求：(1)此梯形之高　(2)上底 $\overline{AD}$ 之長　(3)梯形 ABCD 面積　(4)此梯形的中線長。

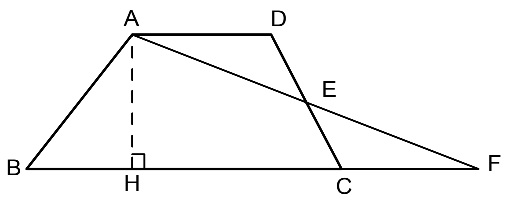


【練習四】

如圖梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，E 為 $\overline{CD}$ 中點，延長 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 的延長線於 F，若 ΔABF 面積為 36 平方公分，且其高為 9 公分，則：

(1)梯形 ABCD 面積為多少平方公分

(2) $\overline{AD}+\overline{BC}=$？



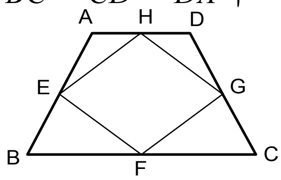
【範例五】

已知梯形高 10 公尺，中線長 8 公尺，求其面積。

【練習五】

已知：ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{AB} = \overline{CD}$，E、F、G、H 為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 中點

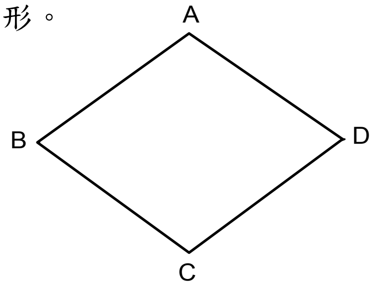
求證：EFGH 為菱形



菱形的定義與性質

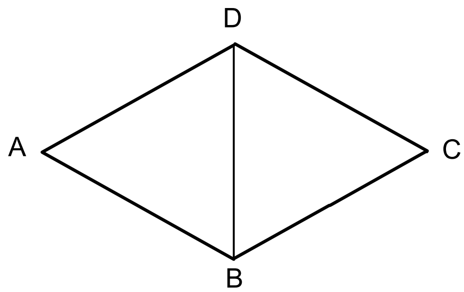
1. **菱形的定義**：四邊形的四邊都等長。如右圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CD}$

則 ABCD 稱為菱形。



2. **菱形的性質**：

平行四邊形的判別為四邊形兩雙對邊相等，菱形依其定義為四邊都相等，所以菱形是平行四邊形之一種特例，故平行四邊形的性質，菱形都具備。



【已知】菱形四個邊等長。

【求證】菱形為平行四邊形。

【證明】1. 在△ABD 與△CBD 中。

∵四個邊等長。

$\therefore \overline{AD}=\overline{CD}$、$\overline{AB}=\overline{CB}$、$\overline{DB}=\overline{DB}$

則△ABD≅△CBD(SSS)

2. △ABD 與△CBD 皆為等腰三角形。

∴∠ABD＝∠CDB、∠ADB＝∠CBD(內錯角相等)

$\Rightarrow \overline{AD}//\overline{CB}$、$\overline{AB}//\overline{CD}$

故可知菱形為平行四邊形。

菱形有下列六種性質，

其中（1）（2）（3）（4）項性質為平行四邊形與菱形皆有；（5）（6）項性質為菱形特有性質，平行四邊形不一定有此性質。

（1）一對角線平分原平行四邊形為兩個全等三角形。

（2）兩雙對邊相等。

（3）兩雙對角相等。

（4）兩對角線互相平分。

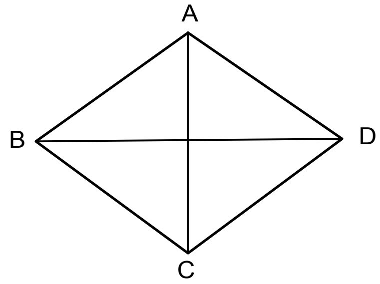
（5）菱形任一對角線會平分其頂角。

（6）菱形的兩對角線互相垂直平分。

前四項性質前面有關平行四邊形已經證明，在此僅證明後兩項菱形特有性質。

（5）**菱形任一對角線會平分其頂角**

【已知】ABCD 為一菱形。



【求證】$\overline{AC}$ 平分 $\angle A$ 與 $\angle C$，$\overline{BD}$ 平分 $\angle B$ 與 $\angle D$。

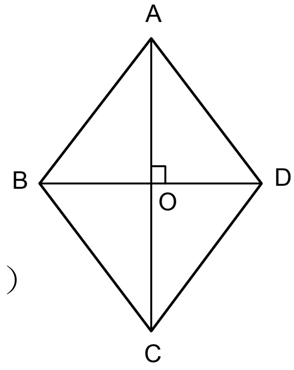
【證明】在△ABC 與△ADC 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

∴△ABC≅△ADC(SSS)，∴∠BAC＝∠DAC，∠BCA＝∠DCA，

即 $\overline{AC}$ 平分∠A 與∠C。 同理，$\overline{BD}$ 平分∠B 與∠D。

（6）**菱形的兩對角線互相垂直平分**



【已知】在菱形 ABCD 中，O 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點。

【求證】$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。

【證明】(1)在△ABO 與△CBO 中，

∵∠ABO＝∠CBO(由菱形任一對角線會平分其頂角)

且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BO}=\overline{BO}$，

∴△ABO≅△CBO(SAS)　∴∠AOB＝∠COB。

(2)∵∠AOB＋∠COB＝180^0， ∴∠AOB＝∠COB＝90^0，$\therefore \overline{AC}\perp\overline{BD}$。

(3)由(1)知，△ABO≅△CBO，$\therefore \overline{AO}=\overline{CO}$。

(4)同理可證 $\overline{BO}=\overline{DO}$。

Note:(5)、(6)項性質，平行四邊形不一定成立。

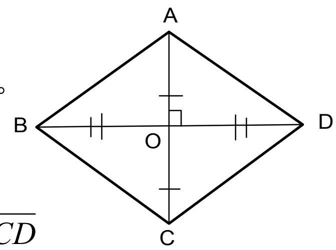
菱形的判別：我們如果已經知道以下其中一項判別性質，我們就可以說此四邊形是菱形。

1.若四邊形的兩對角線互相垂直平分，則這個四邊形一定是菱形。

2.若四邊形的兩對角線分別平分其內角，則此四邊形一定是菱形。

接著我們一一來證明：

1.若四邊形的兩對角線互相垂直平分，則這個四邊形一定是菱形。



【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。

【求證】ABCD 為菱形。

【證明】(1)$\because \overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 的垂直平分線段，$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$

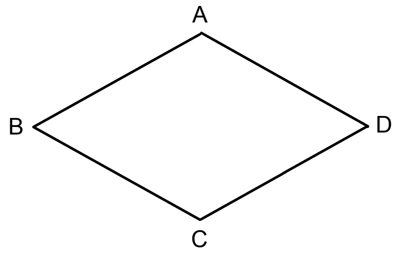
(2)$\because \overline{BD}$ 為 $\overline{AC}$ 的垂直平分線段，$\therefore \overline{BA}=\overline{BC}$，$\overline{DA}=\overline{DC}$

(3)由(1)與(2)得，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CB}$　　即 ABCD 為菱形。

2.若四邊形的兩對角線分別平分其內角，則此四邊形一定是菱形。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$ 平分 $\angle A$ 與 $\angle C$ ，$\overline{BD}$ 平分 $\angle B$ 與 $\angle D$ 。

【求證】ABCD 為菱形。

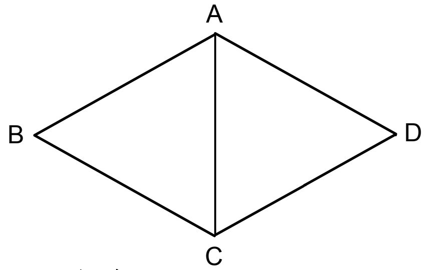


【證明】(1)考慮△ABC 及△ADC，由 $\overline{AC}$ 平分∠A 與∠C，

∴∠BAC＝∠DAC，∠BCA＝∠DCA。

且 $\overline{AC}=\overline{AC}$ ，故△ABC≅△ADC(ASA)

∴ $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\overline{BC}=\overline{CD}$ 。



(2)同理可證 $\overline{AB}=\overline{BC}$ ，$\overline{AD}=\overline{CD}$ 。

(3)由(1)與(2)可知，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}$ ，∴ABCD 為菱形。

有關菱形的應用：

菱形的面積與周長的計算

- 菱形的兩對角線長分別為 a 與 b，則菱形面積＝$\frac{1}{2}$ab 。

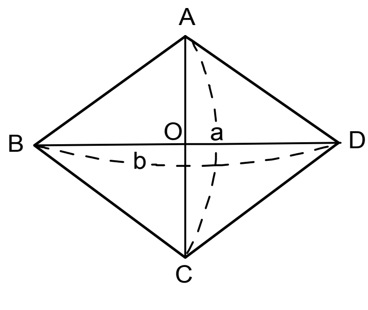
- 菱形的兩對角線長分別為 a 與 b，則菱形周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CD}$ 。

【求證】四邊形 ABCD 面積＝$\frac{1}{2}$ab，且四邊形 ABCD 周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

【證明】∵四邊形 ABCD 為菱形且 O 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點。

∴ $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ，$\overline{AO}=\overline{CO}=\frac{1}{2}$a，$\overline{BO}=\overline{DO}=\frac{1}{2}$b



四邊形 ABCD 面積＝△ABD＋△BCD

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}+\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{BD}$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times a\times b$$

四邊形 ABCD 周長＝$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}$

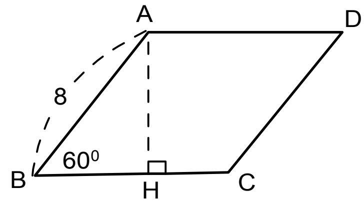
$$=4\overline{AB}=4\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

【範例】一菱形的兩對角線長分別為 10 公分及 24 公分，求此菱形的周長及面積。

【解答】(1) 菱形面積＝$\frac{1}{2}$ab＝$\frac{1}{2}\times 10\times 24$＝120（平方公分）

(2) 菱形周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10^2+24^2}=2\times 26=52$

【範例】菱形的邊長為 8 公分，有一內角為 60^0，試求菱形的面積。



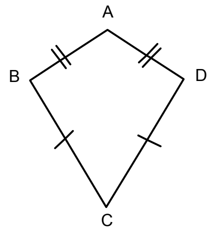
【解答】作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於 H，

則△ABH 為 30^0、60^0、90^0的直角三角形，

$\because\overline{AB}=8\quad\therefore\overline{AH}=4\sqrt{3}$

$\therefore$ABCD 面積＝$8\times 4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$（平方公分）

從菱形的性質，我們知道四邊都相等的四邊形是菱形，但若只有兩雙鄰邊相等則稱為鳶(箏)形。如下圖。

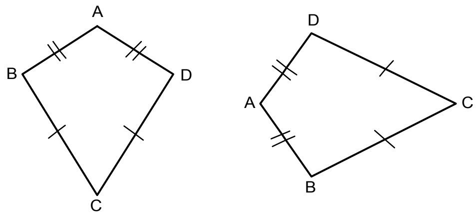


鳶(箏)形的定義與性質

1. **鳶(箏)形的定義**:兩雙鄰邊分別等長的四邊形，稱為鳶(箏)形。

如圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，則 ABCD 稱為鳶形。

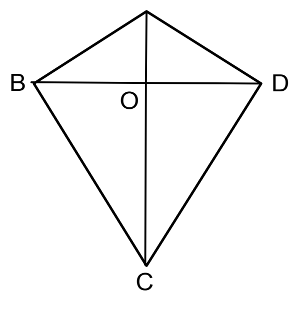
(Note: $\overline{AB}=\overline{AD}\neq\overline{CB}=\overline{CD}$)



2. **鳶(箏)形的性質**:鳶形的對角線互相垂直，且其一對角線被另一對角線平分。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$。

【求證】$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{BO}=\overline{DO}$。



【證明】(1)$\because\overline{AB}=\overline{AD}$，$\therefore$A 在 $\overline{BD}$ 垂直平分線上。

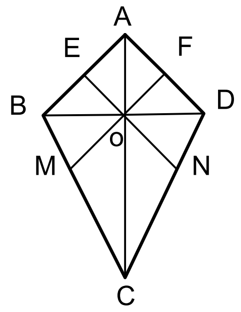
(2)$\because\overline{CB}=\overline{CD}$，$\therefore$C 在 $\overline{BD}$ 的垂直平分線上。

(3)由(1)與(2)可知，$\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 的垂直平分線段，

$\therefore\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{BO}=\overline{DO}$。

【範例】

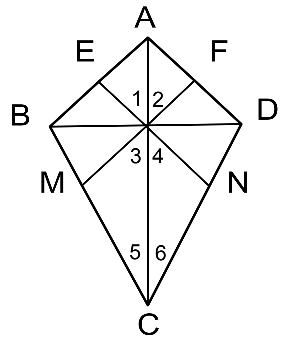
【已知】 $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\overline{BC}=\overline{DC}$ ，E、F 分別為 $\overline{AB}$ ，$\overline{AD}$ 的中點。



【求證】(1) AEOF 為菱形 (2)OMCN 為鳶形。

【證明】(1)(i) $\because \overline{AB}=\overline{AD}$ ，$\overline{BC}=\overline{DC}$

$\therefore$ABCD 為鳶形　$\therefore \overline{AC}\perp\overline{BD}$



(ii)在△AOB 中，∠AOB＝90^0，

且 $\overline{AE}=\overline{BE}$　$\therefore \overline{AE}=\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

同理 $\overline{AF}=\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

(iii) $\overline{AB}=\overline{AD}$

$\therefore \overline{AE}=\overline{EO}=\overline{FO}=\overline{AF}$　$\therefore$AEOF 為菱形

(2)(i)　$\therefore$∠1＝∠2，即∠3＝∠4

(ii) $\because$ABCD 為鳶形，$\therefore$△ABC≅△ADC

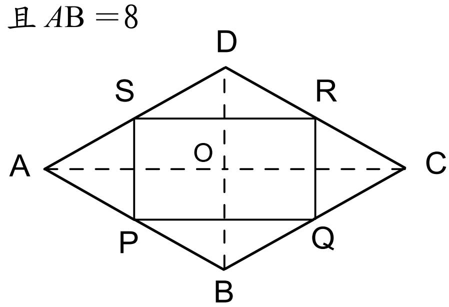
$\therefore$∠5＝∠6

(iii)又 $\overline{OC}=\overline{OC}$ ，$\therefore$△OMC≅△ONC(ASA)

$\therefore \overline{OM}=\overline{ON}$ ，$\overline{MC}=\overline{NC}$ ，$\therefore$OMCN 為鳶形

【範例】ABCD 中，P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ 的中點，且 $\overline{AB}$ ＝8 公分，∠A＝60^0，求(1) $\overline{BD}$ (2) $\overline{AC}$ (3)矩形 PQRS 的周長及面積。

【解說】(1)$\because$△AOD 為 30^0、60^0、90^0的直角三角形，且 $\overline{AB}$ ＝8



$\therefore \overline{OB}=4$，$\overline{AO}=4\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{BD}=8$，$\overline{AC}=8\sqrt{3}$

$\therefore \overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4\sqrt{3}$，

$\overline{SP}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$

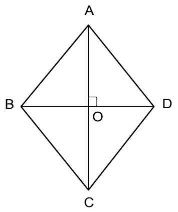
(2)$\therefore$PQRS 周長＝$8+8\sqrt{3}$

PQRS 面積＝$\overline{SR}\times\overline{SP}=4\sqrt{3}\times4=16\sqrt{3}$（平方公分）

小 試 身 手

【範例一】

ABCD 為菱形，若 $\overline{OB}=3$ 公分，ABCD 面積為 24 平方公分，求此菱形周長。

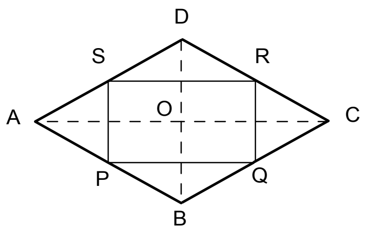


【練習一】

一菱形的兩對角線長分別為 12 公分及 16 公分，求此菱形的周長及面積。

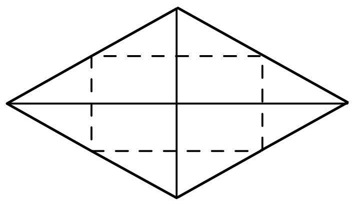
【範例二】

ABCD 中，P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點，且 $\overline{AD}=10$ 公分，$\angle A=60^{0}$，求矩形 PQRS 的面積。



【練習二】

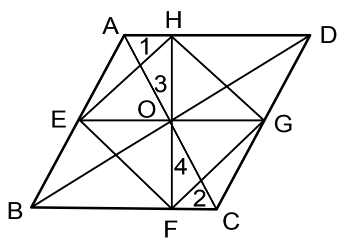
已知菱形的一對角線長 7 公分，面積為 28 平方公分，求此菱形四邊中點連線，所形成新四邊形的周長。



【範例三】

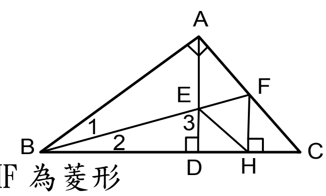
已知：ABCD 為平行四邊形，$\overline{EG}\perp\overline{HF}$

求證：EFGH 為菱形



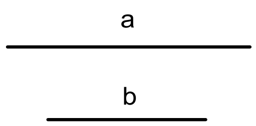
【練習三】

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^{0}$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BF}$ 平分 $\angle ABC$，$\overline{FH}\perp\overline{BC}$

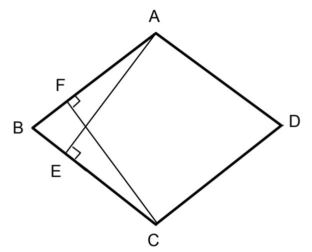


求證：AEHF 為菱形

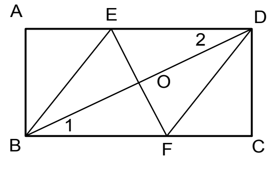
【範例四】
已知：線段 a 和線段 b
求作：以 a 和 b 為兩對角線的菱形



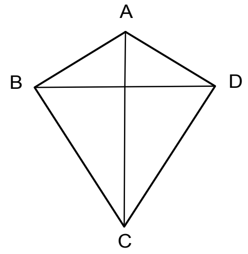
【練習四】
已知：ABCD 為平行四邊形，$\overline{AE} \perp \overline{BC}$，$\overline{CF} \perp \overline{AB}$，$\overline{AE} = \overline{CF}$
求證：ABCD 為菱形



【範例五】
已知：ABCD 為矩形，$\overline{EF}$ 垂直平分 $\overline{BD}$
求證:(1)BEDF 為菱形　(2)若 $\overline{AB} = 4$，$\overline{BC} = 8$，求菱形 BEDF 面積



【練習五】
已知:四邊形 ABCD 中 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$，$\overline{AC}$ 平分 $\overline{BD}$
求證：ABCD 為鳶形

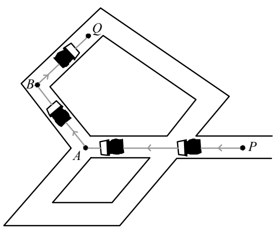


第一回

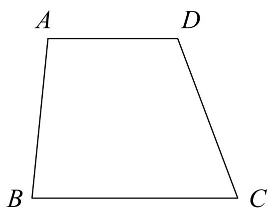
一、選擇題：

(　　) 1. 如附圖，一個玩具車軌道圖，將白色車頭的玩具車自 P 點沿著箭頭方向前進，途中經由 A 點轉向 B 點，再經由 B 點轉向 Q 點。若 $\angle BAP = 130^\circ$ 、$\angle QBA = 95^\circ$。請問此玩具車至少共要轉多少度才能抵達 Q 點？【91 年第一次基測】

(A) 35　(B) 55　(C) 135　(D) 225



(　　) 2. 如附圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} // \overline{BC}$ ，$\overline{AB} \neq \overline{DC}$ 。請問下列哪一種作圖法，可將此梯形分割為兩個面積相等的圖形？　【91 年第二次基測】



(A) 連接 $\overline{AC}$

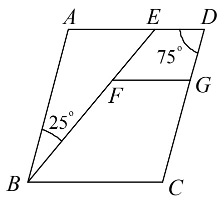
(B) 作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L

(C) 分別取 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的中點 P、Q，連接 $\overline{PQ}$

(D) 分別取 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的中點 H、K，連接 $\overline{HK}$

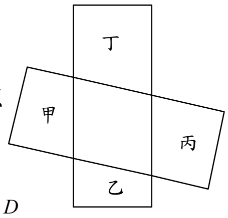
(　　) 3. 如附圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，$\overline{ED} // \overline{FG}$ ，$\angle D = 75^\circ$ ，$\angle ABE = 25^\circ$ 。求 $\angle GFB + \angle GCB =$ ？【93 年第二次基測】

(A) 155°　(B) 210°　(C) 235°　(D) 270°



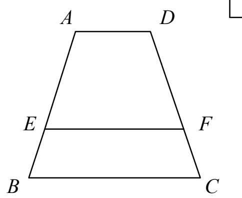
(　　) 4. 右圖是兩全等長方形玻璃板放置的情形，其中分成甲、乙、丙、丁四塊梯形及一塊平行四邊形。若甲、乙、丙、丁的面積比為 4：3：5：6，則此四梯形的關係，下列敘述何者正確？　【94 年第一次基測】

(A)甲乙相似　(B)甲丙相似　(C)乙丁相似　(D)甲乙丙丁均不相似



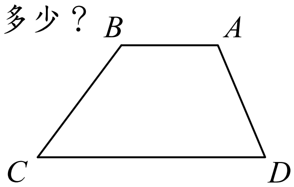
(　　) 5. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 為梯形，$\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{EF} // \overline{BC}$，$\overline{AE} : \overline{EB} = 3:2$，$\overline{AD} = 3$ 公分，$\overline{BC} = 6$ 公分，求 $\overline{EF} = ？$

(A) $\frac{12}{5}$　(B) $\frac{24}{5}$　(C) $\frac{12}{7}$　(D) $\frac{24}{7}$



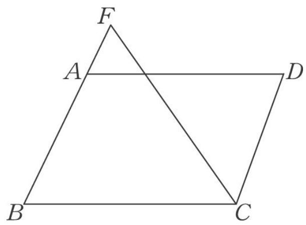
(　　) 6. 如右圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{AB} = 3$，$\overline{CD} = 9$，將兩腰 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 延長相交於 E 點，若梯形 $ABCD$ 的高為 8，則 $\triangle EAB$ 中 $\overline{AB}$ 上的高是多少？

(A) 3 (B) 3.5 (C) 4.5 (D) 4

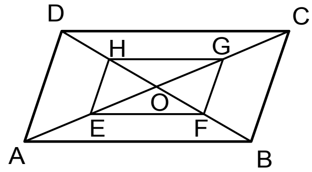


二、計算題

1. 如附圖，平行四邊形中，$\overline{CF}$ 平分 $\angle BCD$，若 $\overline{BF} = 11$，$\overline{AB} = 8$，$\angle BCD = 110°$，試求：(1) $\angle F = ？$　(2) 求平行四邊形 $ABCD$ 的周長為何？



2. 已知：▱ ABCD 中，對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 相交於 O，又 E、F、G、H 分別為 $\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$、$\overline{DO}$ 的中點。求證：EFGH 為平行四邊形。

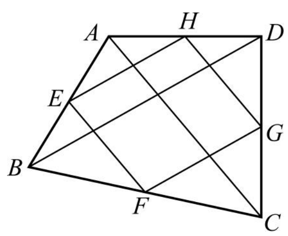


3. 如附圖，已知四邊形 $ABCD$ 的面積為 60 cm^2，且 $\overline{AC}$ = 8 cm、$\overline{BD}$ = 9 cm，若 E、F、G、H 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 之中點，則：

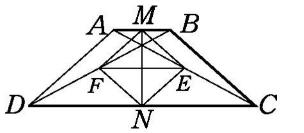
(1) 四邊形 $EFGH$ 為何種四邊形？

(2) 四邊形 $EFGH$ 的周長為何？

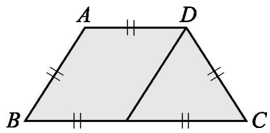
(3) 四邊形 $EFGH$ 的面積為何？



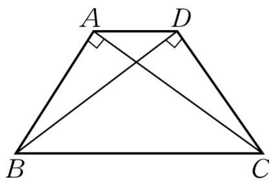
4. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$，M、N 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的中點，E、F 分別是 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的中點，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=8$，則四邊形 $MFNE$ 的面積為何？



5. 如附圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，求 $\angle A$。

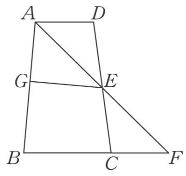


6. 如附圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，$\overline{AC}\perp\overline{AB}$，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$，若 $\overline{BC}=25$，$\overline{AB}=15$，求梯形 $ABCD$ 的面積。



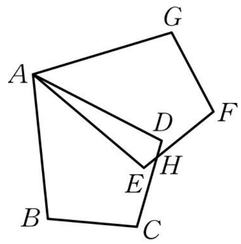
7. 如附圖，在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$。如果 $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{BD}$，$\angle A=120^\circ$，求：(1) $\angle ABC$、$\angle ABD$ 及 $\angle CBD$ 的角度。(2) $\angle C$ 及 $\angle ADC$ 的角度。

8. 如附圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$E$ 為 $\overline{CD}$ 的中點，延長 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 的延長線於 F，若 $\overline{AD}=8$，$\overline{BC}=12$，$\triangle ABF$ 中，$\overline{BF}$ 上的高為 16，若 $\overline{EG}\perp\overline{AB}$，且 $\overline{AB}=18$，求 $\overline{EG}=$？

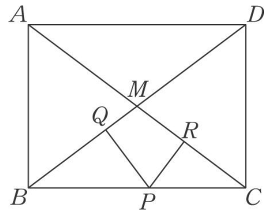


9. 兩條寬度(膠帶上、下邊之間的垂直距離)相同的透明膠帶交叉重疊，如附圖。
請問重疊部分的四邊形是不是菱形？

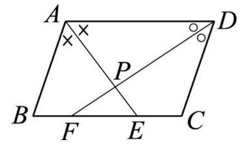
10. 如附圖，四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $AEFG$ 為兩個全等鳶形，$\overline{EF}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 H。
若 $\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=\angle BAG=101$ 度，則 $\angle DHF=$？



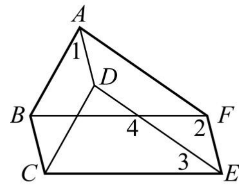
11. 如附圖，在矩形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 相交於 M。設 $\overline{AB}=6$、$\overline{AD}=8$，P 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{BD}$ 於 Q，$\overline{PR}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 R，求 $\overline{PQ}+\overline{PR}=$？



12. 如附圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AE}$ 平分 $\angle A$，$\overline{DF}$ 平分 $\angle D$，則：
(1)若 $\angle C=108^\circ$，求 $\angle APD$ 的度數＝？
(2)若 $\overline{AD}=12$ 公分，$\overline{CD}=8$ 公分，求 $\overline{EF}=$？。



13. 如附圖，平行四邊形 $ABCD$、平行四邊形 $BCEF$ 在同一平面上，若 $\angle 1=43^\circ$、$\angle 2=104^\circ$、$\angle 3=35^\circ$，求：（1）$\angle 4=$？　（2）$\angle CDE=$？



14. 如附圖長方形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點，若 $\overline{BC}=12$ 公分，$\overline{AC}=13$ 公分，則：

（1）四邊形 $EFGH$ 周長＝？　（2）長方形 $ABCD$ 面積為何？