

相似三角形

兩個多邊形相似，需同時具有「對應角相等」，且「對應邊成比例」，才能確定這兩個多邊形相似。

兩三角形相似則只需部份條件成立即可，比如（1）對應角相等，便可說明兩三角形相似（AAA相似、AA相似性質）；或（2）對應邊成比例，便可說明兩三角形相似（SSS相似性質）；或（3）一對角相等，且兩夾邊對應成比例（SAS相似性質），便可說明兩三角形相似，以下就此問題作進一步探討。

三角形的相似性質

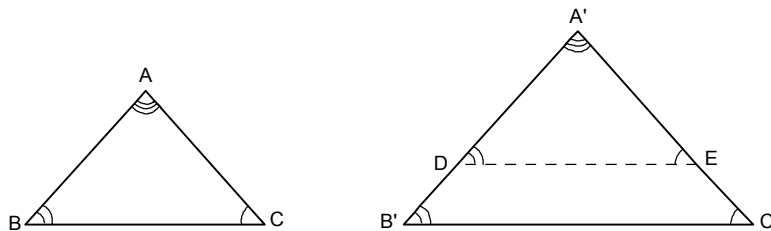
【AAA相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。

【SSS相似性質】如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

【SAS相似性質】如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

現在就上列【AAA相似性質】、【SSS相似性質】、【SAS相似性質】3個性質來一一證明。

【AAA相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。



【已知】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ 。

【求證】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

【證明】(1) 設 $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點D，使得 $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。

(2) 過D點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，交 $\overline{A'C'}$ 於E點，

則 $\angle A'DE = \angle B' = \angle B$ ， $\angle A'ED = \angle C' = \angle C$ 。

(3) 在 $\triangle A'DE$ 與 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\angle A' = \angle A$ ， $\angle A'DE = \angle B$ ，

$\therefore \triangle A'DE \cong \triangle ABC$ ， $\therefore \overline{AC} = \overline{A'E}$ 。

(4) $\because \overline{DE} \parallel \overline{B'C'}$ ， $\therefore \overline{A'D} : \overline{A'B'} = \overline{A'E} : \overline{A'C'}$ 。

(5) $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\overline{A'E} = \overline{AC}$ ，代入(4)式得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ 。

(6) 同理可得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ 。

(7) 由(5)與(6)可得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ ，

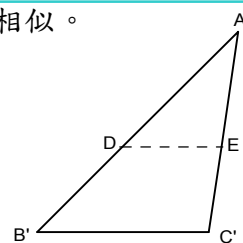
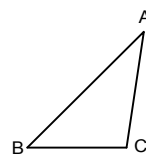
又 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ，所以 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

【SSS 相似性質】如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

【已知】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中， $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

【求證】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

【證明】(1) 設 $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 D，使得 $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。



(2) 過 D 點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，交 $\overline{A'C'}$ 於 E 點

$\angle A = \angle A'$ ， $\angle A'DE = \angle B'$ ， $\angle A'ED = \angle C'$ L L (i)

由 AAA 相似性質 $\Rightarrow \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$ 。

$$\text{故 } \frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}}$$

(3) $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ，且 $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}，\overline{A'E} = \overline{AC}，$$

$$\therefore \overline{A'D} = \overline{AB}，\overline{DE} = \overline{BC}，\overline{A'E} = \overline{AC}$$

由 SSS 全等性質 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ 。

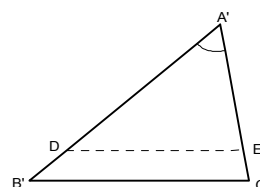
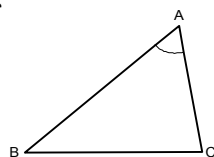
(4) $\because \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ ，

$\therefore \angle A' = \angle A$ ， $\angle A'DE = \angle B$ ， $\angle A'ED = \angle C$ (對應角相等) L L (ii)

由 (i) (ii) $\Rightarrow \angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

【SAS 相似性質】如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。



【已知】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ 。

【求證】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

【證明】(1) 設 $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 D，使得 $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。

(2) 過 D 點作 \overline{DE} ，使得 $\angle A'DE = \angle B$ ，且 E 點在 $\overline{A'C'}$ 上。

(3) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'DE$ 中， $\because \angle A = \angle A'$ ， $\overline{AB} = \overline{A'D}$ ， $\angle B = \angle A'DE$ ，

由 ASA 全等性質 $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'DE$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ ，故 $\overline{A'E} = \overline{AC}$ ， $\overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\overline{DE} = \overline{BC}$ L L (i)

$$\angle A' = \angle A, \angle A'DE = \angle B, \angle A'ED = \angle C \quad \text{L L} \quad (\text{ii})$$

$$(4) \because \overline{A'D} = \overline{AB}, \overline{A'E} = \overline{AC}, \text{且 } \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$$

$$\therefore \overline{A'D} : \overline{A'B'} = \overline{A'E} : \overline{A'C'}, \text{故 } \overline{DE} // \overline{B'C'}$$

$$(5) \because \overline{DE} // \overline{B'C'} \therefore \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \angle A' = \angle A, \angle A'DE = \angle B, \angle A'ED = \angle C \quad \text{L L} \quad (\text{iii})$$

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} \quad \text{L L} \quad (\text{iiii})$$

$$(6) \text{ 由 (i) (ii) (iii) (iiii)}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

有關相似三角形的計算

若 $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，便可延伸出以下四個常見的計算公式：

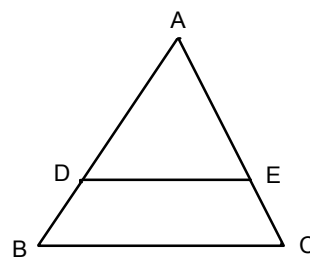
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$
$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} \\ = \overline{DE} : \overline{BC}$	$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$	$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$	$\overline{EA} : \overline{AC} = \overline{DA} : \overline{AB} \\ = \overline{ED} : \overline{BC}$

【已知】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 中， $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

【求證】 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$

【證明】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 中， $\ominus \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (線段成比例)

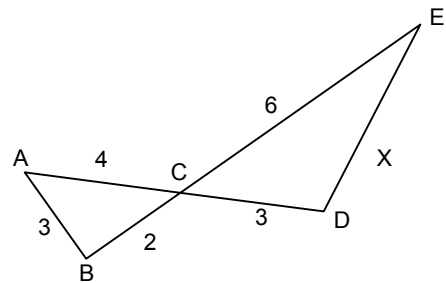


$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB} - \overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC} - \overline{AE}} \quad (\ominus \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{d}{c-a})$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}, \text{ 同理可證, } \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

【範例】如圖，求 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】

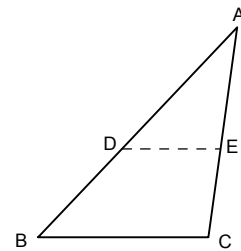


【範例】

【已知】在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

【求證】 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 且 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。

【證明】

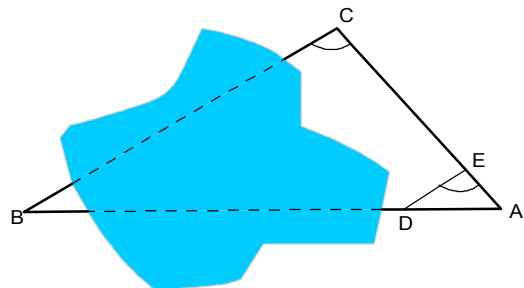


【範例】A、B兩點間有湖泊，為了求 \overline{AB} ，我們先找一點C，量得 $\overline{AC} = 100$ 公尺。

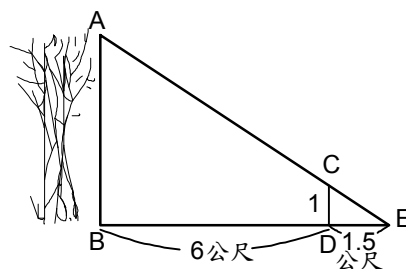
在 \overline{AC} 上取 \overline{AE} 為 20 公尺，過E點作 $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ ，使A、D、B三點共線，

量得 $\overline{AD} = 38$ 公尺，求 \overline{AB} 。

【解答】



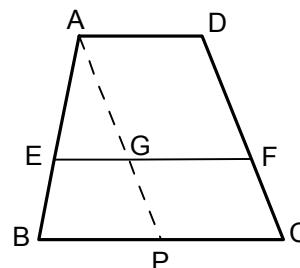
【範例】如右圖，某人為了要測樹高 \overline{AB} ，打了一根標桿 \overline{CD} 於離樹根6公尺處D點，並在 \overline{BD} 的延長線上找到一點E，使A、C、E三點成一直線。已知 $\overline{CD} = 1$ 公尺，又測得 $\overline{DE} = 1.5$ 公尺，求樹高 \overline{AB} 。



【解】

【範例】如圖，ABCD 為梯形，且 $\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 3$ 公分， $\overline{BC} = 6$ 公分，且 $\overline{AE} : \overline{EB} = 3 : 2$ ，求 \overline{EF} 的長。

【解】



【範例】 $\angle ACD = \angle B$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{CD} = 9$ ， $\overline{BC} = 18$ ，則 $\overline{AB} = ?$ $\overline{AD} = ?$

【解】

相似三角形的相關性質：

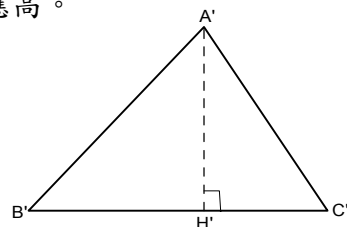
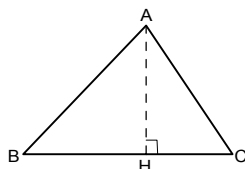
- 【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。
- 【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。
- 【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。
- 【性質 4】兩個相似三角形對應中線的比等於任一組對應邊的比。
- 【性質 5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

現在就上列 5 個性質來一一證明：

【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， \overline{AH} 與 $\overline{A'H'}$ 是這兩個三角形的對應高。

【求證】 $\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ 。



【證明】(1) 在 $\triangle ABH$ 與 $\triangle A'B'H'$ 中，

$$\therefore \angle B = \angle B', \quad \angle AHB = 90^\circ = \angle A'H'B',$$

$$\therefore \angle BAH = \angle B'A'H'.$$

(2) $\therefore \triangle ABH$ 與 $\triangle A'B'H'$ 的三內角對應相等，

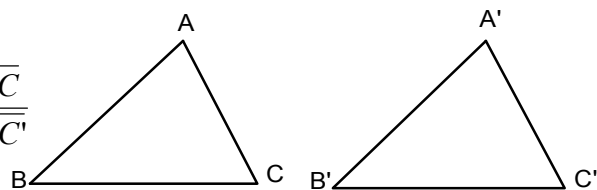
$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'.$$

$$(3) \therefore \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \quad \therefore \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}.$$

【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

【求證】 $\frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$



【證明】(1) $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$(2) \text{ 設 } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r$$

$$\text{則 } \overline{AB} = r\overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = r\overline{B'C'}, \quad \overline{CA} = r\overline{C'A'}$$

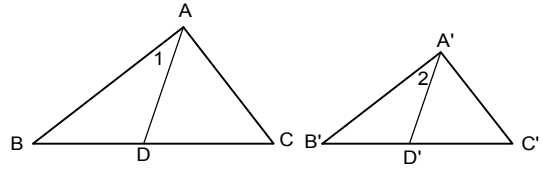
$$(3) \frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{A'C'}} = \frac{r\overline{A'B'} + r\overline{B'C'} + r\overline{A'C'}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{A'C'}} = r$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， \overline{AD} 、 $\overline{A'D'}$ 分別為 $\angle A$ 、 $\angle A'$ 的分角線

【求證】 $\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$



【證明】(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$\therefore \angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ (對應角)

(2) 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle A'B'D'$ 中

$\because \angle B = \angle B'$ ，又 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \angle A' = \angle 2$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ (AA 相似)

(3) $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (對應邊成比例)

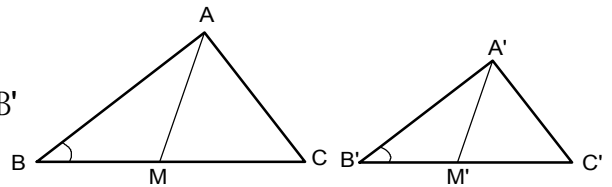
【性質 4】兩個相似三角形對應中線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， \overline{AM} 為 \overline{BC} 上中線， $\overline{A'M'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上中線。

【求證】 $\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

【證明】(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\therefore \angle B = \angle B'$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



(2) 又 \overline{AM} 、 $\overline{A'M'}$ 分別為 \overline{BC} 、 $\overline{B'C'}$ 上的中線

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$$

(3) 在 $\triangle ABM$ 與 $\triangle A'B'M'$ 中

$\because \angle B = \angle B'$ ， $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$

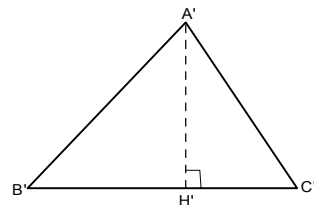
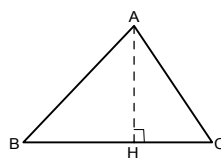
$\therefore \triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$ (SAS 相似)

(4) $\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (對應邊成比例)

【性質 5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， \overline{BC} 與 $\overline{B'C'}$ 為對應邊。

【求證】 $\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$ 。



【證明】(1) 設 \overline{AH} 與 $\overline{A'H'}$ 為這兩個三角形的對應高。

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

$$(2) \because \Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH},$$

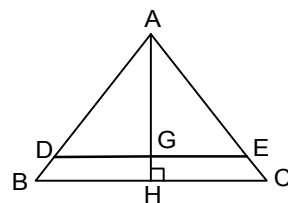
$$\Delta A'B'C' \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'H'},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} &= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}}{\frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'H'}} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AH}}{\overline{B'C'} \times \overline{A'H'}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

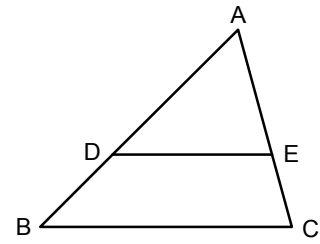
【範例】如右圖，設在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，已知 $\overline{AH} = 2$ 公尺， $\overline{BC} = 3$ 公尺， $\overline{GH} = 0.5$ 公尺，求 \overline{DE} 。

【解】



【範例】如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 1$ ，那麼 $\triangle ADE$: 四邊形 BDEC 為多少？

【解】



直角三角形的相似性質：

我們很容易把一個直角三角形分成兩個直角三角形，而這兩個大小不等的直角三角形亦為相似的。

【定理】：直角三角形斜邊上的高，把原形分成兩個直角三角形與原來的三角形相似

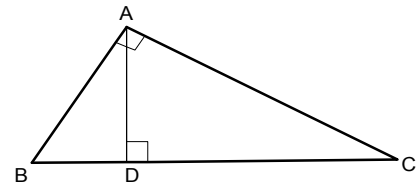
如下圖，證明 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為直角， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，則 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ ， $\triangle CAD \sim \triangle CBA$ 。

【證明】

(1) 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBA$ 中，

$$\because \angle ADB = 90^\circ = \angle CAB, \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA. \text{ (AA 相似)}$$

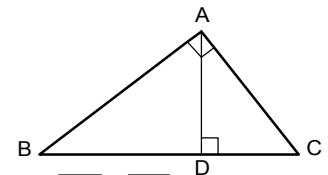


(2) 在 $\triangle CAD$ 與 $\triangle CBA$ 中，

$$\because \angle CAB = 90^\circ = \angle ADC, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA. \text{ (AA 相似)}$$

【範例】 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

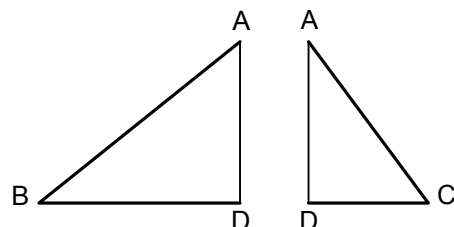


【求證】(1) $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$ (2) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ (3) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$

【證明】 $\triangle ABC$ 中， $\because \angle BAC = 90^\circ$ 且 $\overline{AD} \perp \overline{BC} \therefore \triangle ABD \sim \triangle CAD \sim \triangle CBA$

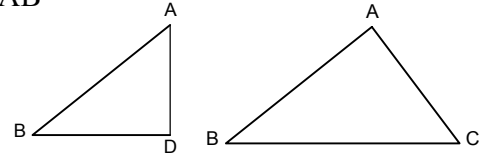
$$(1) \because \triangle ABD \sim \triangle CAD \therefore \overline{AD} : \overline{CD} = \overline{BD} : \overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$$



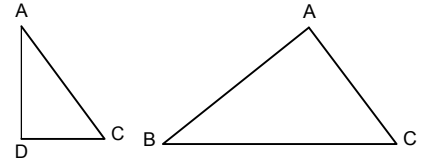
$$(2) \because \triangle ABD \sim \triangle CBA \quad \therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BD} : \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$$



$$(3) \because \triangle CAD \sim \triangle CBA \quad \therefore \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$$

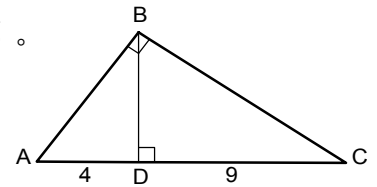
$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$$



【範例】如右圖， $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 為直角， D 為 B 到 \overline{AC} 的垂足。

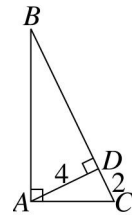
已知 $\overline{CD} = 9$ 公分， $\overline{AD} = 4$ 公分，求 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{BD} 。

【解】

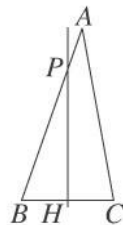


【範例】如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， \overline{AD} 為斜邊 \overline{BC} 上的高，若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{CD} = 2$ ，試求：(1) $\overline{AC} = ?$ (2) $\overline{BD} = ?$

【解】



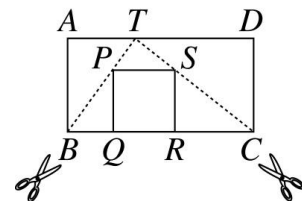
【範例】如圖，在 $\triangle ABC$ 中， \overline{BC} 的中垂線分別與 \overline{AB} 、 \overline{BC} 相交於 P 、 H 兩點。已知 $\overline{BP} = 18$ 公分， $\overline{AP} = 6$ 公分， $\overline{BC} = 12$ 公分，且 $\triangle ABC$ 的面積為 $96\sqrt{2}$ 平方公分，則 $\overline{PH} = ?$



【解】

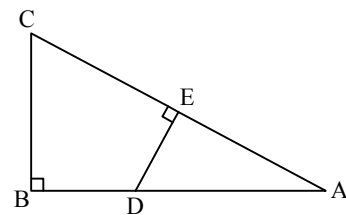
【範例】如圖，將邊長為14公分的正方形 $PQRS$ 放在矩形 $ABCD$ 上，其中 \overline{QR} 疊在 \overline{BC} 上。今沿 \overline{BP} 、 \overline{CS} 剪出 $\triangle PST$ ，結果頂點 T 恰好在 \overline{AD} 上，已知 $\overline{BC} = 42$ 公分，試求 $\overline{AB} = ?$

【解】



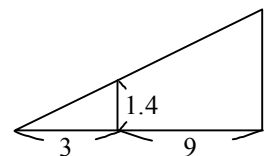
【範例】如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{BC} = 8$ ，又 \overline{DE} 是 \overline{AC} 的中垂線，求 $\overline{DE} = ?$

【解】



【範例】某大樓前有一盞探照燈，照在大樓前的牆壁上，小榮的身高為1.4公尺，站在離大樓9公尺，離探照燈3公尺處，則小榮在大樓牆壁上的人影高多少公尺？

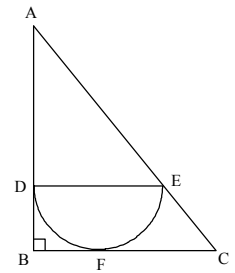
【解】



【範例】直角三角形 ABC 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{BC} = 15$ ，內接半圓的直徑 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

且切 \overline{BC} 於 F，則 $\overline{FC} = ?$

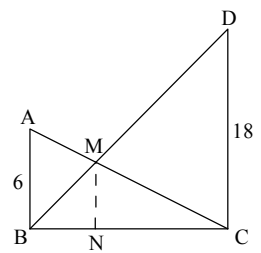
【解】



【範例】如圖中， \overline{AB} ， \overline{CD} ， \overline{MN} 都和 \overline{BD} 垂直， $\overline{AB} = 6$ 公分， $\overline{CD} = 18$ 公分， $\overline{BD} = 12$

公分，則 \overline{MN} 之長為？

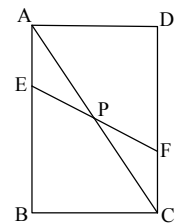
【解】



【範例】如圖，長方形 ABCD 中， \overline{AC} 為對角線， $\overline{AD} = 9$ 公分， $\overline{AB} = 12$ 公分，若 $\overline{AE} =$

\overline{CF} ，則 \overline{AP} 為多少公分？

【解】

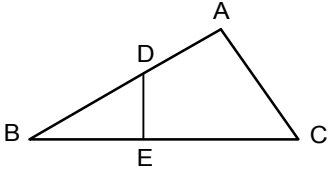




小 試 身 手

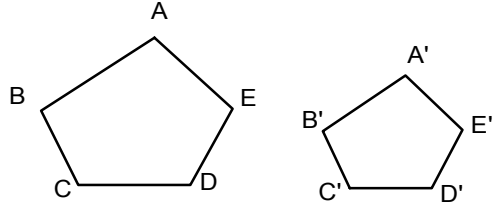
【範例一】

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， D 在 \overline{AB} 上且 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$
求證： $\triangle ABC \sim \triangle EBD$



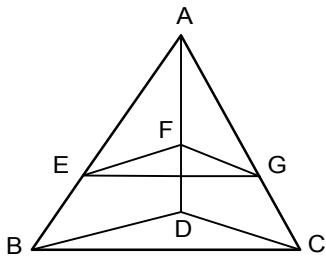
【練習一】

如圖，五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$
求證： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



【範例二】

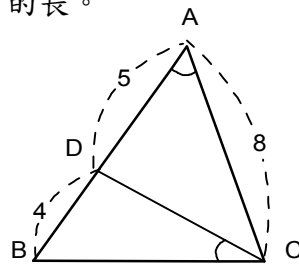
如圖， D 為 $\triangle ABC$ 內部一點， E 、 F 、 G 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AD} 、 \overline{AC} 之中點
求證： $\triangle EFG \sim \triangle BDC$



【練習二】

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BCD = \angle A$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 4$

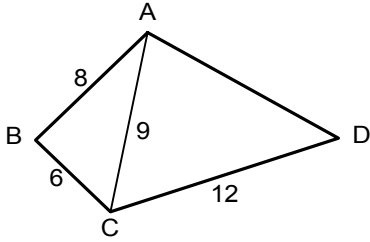
- (1) 求證： $\triangle BCD \sim \triangle BAC$
- (2) 求 \overline{BC} 的長。



【範例三】

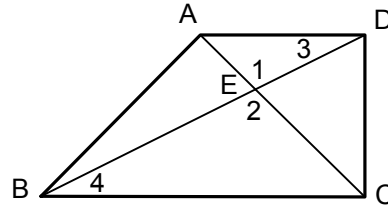
如圖， $\angle B = \angle ACD$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{CD} = 12$

求證：(1) $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ (2) 求 \overline{AD} 之長



【練習三】

ABCD 為一梯形 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ，若 $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CD} = 12$ ，求 \overline{CE} 之長。

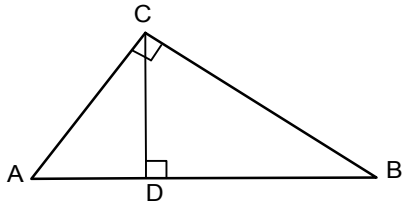


【範例四】

$\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 D ，若 $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，求

(1) $\overline{AD} = ?$

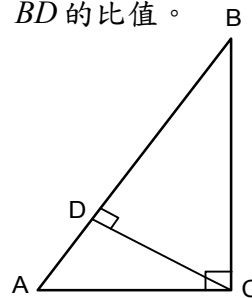
(2) $\triangle ABC : \triangle CBD = ?$



【練習四】

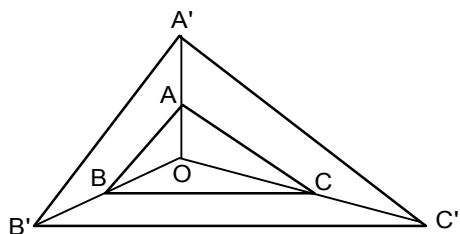
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

求 $\overline{AD} : \overline{BD}$ 的比值。



【範例五】

如圖， $\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \frac{1}{2}$ ，其中 A' 、 B' 、 C' 分別在 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 的延長線上，
 則 $\frac{\Delta ABC \text{ 的面積}}{\Delta A'B'C' \text{ 的面積}} = ?$



【練習五】

如右圖， P 為 ΔABC 外一點，試分別在直線 PA 、 PB 、 PC 上各取一點 D 、 E 、 F ，使 $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ ，而且 ΔDEF 面積是 ΔABC 面積的 4 倍。

