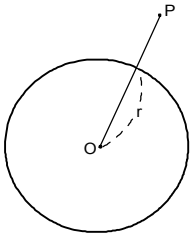
圓

點、直線與圓的關係

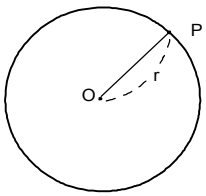
點與圓的位置關係

任意一點 P 與圓 0 的位置：將一點 P 慢慢向圓靠近，會有下列三種情形：

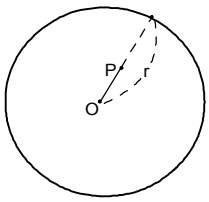
1. P 點在圓 0 外：如圖，即 $\overline{OP}>r$



2. P 點在圓 0 上：如圖，即 $\overline{OP}=r$



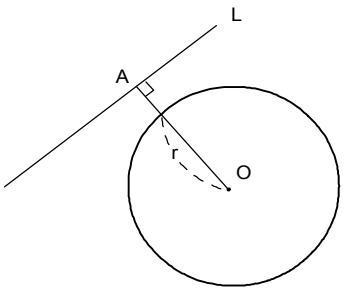
3. P 點在圓 0 內：如圖，即 $\overline{OP}<r$



直線與圓的位置關係

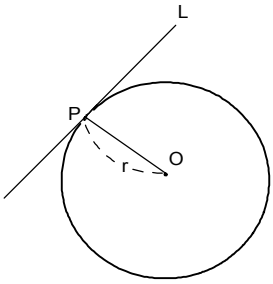
在平面上一圓與一直線位置關係：將一直線 L 慢慢向圓靠近，會有下列三種情形：

1. 不相交：直線 L 與圓 0 不相交，即直線 L 與圓 0 的距離 $\overline{OA}>r$（圓 0 的半徑）



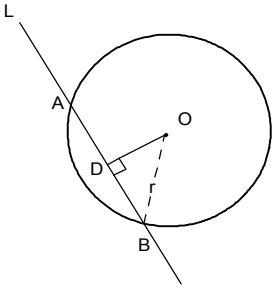
2. 相交於一點：直線 L 與圓 O 只交於 P 點，則直線 L 叫做圓 O 的**切線**，P 點叫做**切點**，

直線 L 與圓 O 的距離 $\overline{OP}$ ＝r（圓 O 的半徑）



3. 相交於兩點：直線 L 與圓 O 相交於 A 與 B 兩點，則稱直線 L 叫做圓 O 的**割線**。

直線 L 與圓 O 的距離 $\overline{OD}$ ＜r（圓 O 的半徑）



切線性質：

【性質 1】圓心到切線距離等於圓的半徑且圓心與切點的連線必垂直此切線。

【性質 2】過一圓直徑端點的垂線必為此圓切線。

1. 圓心到切線距離等於圓的半徑且圓心與切點的連線必垂直此切線。

【已知】L 為圓 O 之切線，切點為 P 點，圓的半徑為 r。

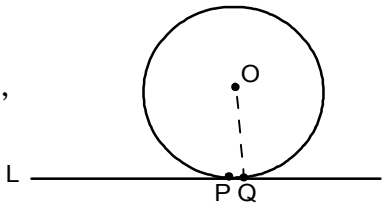
【求證】$\overline{OP}$ ＝r 且 L⊥ $\overline{OP}$

【證明】(i)自圓心 O 作直線 L 的垂線交 L 於 Q 點

(ii)若點 P 與 Q 點不是同一點，則△OPQ 中，

∵∠OQP＝90^0

∴ ∠OQP＞∠OPQ



⇒ $\overline{OP} > \overline{OQ}$，即 $\overline{OQ}$ ＜r

⇒Q 點在圓 O 的內部

(iii) ∵L 為圓 O 之切線，切點為 P 點

∴L 與圓 O 只交一點 P

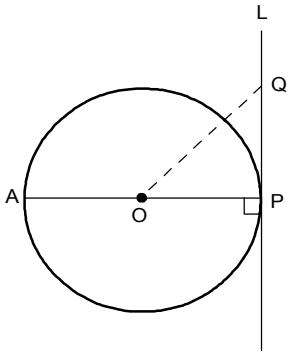
⇒L 上除了 P 點以外的均在圓 O 外部，與（ii）矛盾

⇒點 P 與 Q 點是同一點；即 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ＝r　⇒ L⊥ $\overline{OP}$

2. 過一圓直徑端點的垂線必為此圓切線

【已知】$\overline{AP}$ 為圓 O 的直徑，L⊥ $\overline{AP}$ 。

【求證】L 為圓 O 的切線。



【證明】(1)設 Q 為 L 上異於 P 的任意一點，連接 $\overline{OQ}$ 。

(2)在直角三角形 OPQ 中，

∵ $\overline{OQ}$ 為斜邊， ∴ $\overline{OQ} > \overline{OP}$ 。

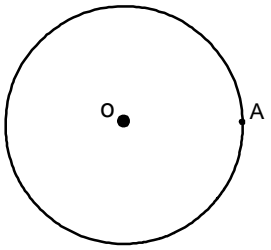
(3)∵ $\overline{OP}$ 是圓 O 的半徑且 $\overline{OQ} > \overline{OP}$ ，

∴ $\overline{OQ}$ 大於圓 O 的半徑，即 Q 在圓 O 外。

(4)∵L 上除了 P 以外的任意一點都在圓 O 外，

∴直線 L 與圓 O 僅相交於一點 P，即直線 L 與圓 O 相切於 P。

3. 切線作圖：過圓 O 上一點 A，求作圓 O 的切線

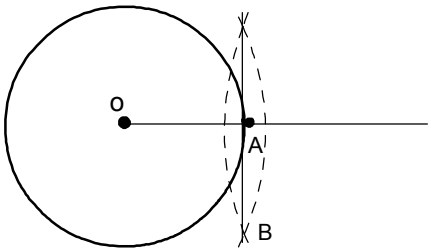


【已知】A 為圓 O 上一點。

【求證】過 A 作圓 O 的切線。

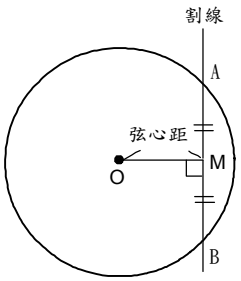
【求作】(1)作 $\overline{OA}$

(2)過 A 點作 $\overline{OA}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{AB}$ ，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為所求



【證明】(1) ∵ $\overleftrightarrow{AB}$ ⊥ $\overline{OA}$ 於 A

(2) ∴ $\overleftrightarrow{AB}$ 是圓 O 的切線（過一圓半徑端點的垂線必為此圓切線）

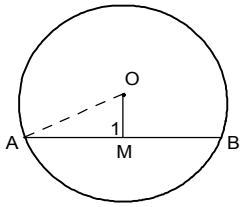


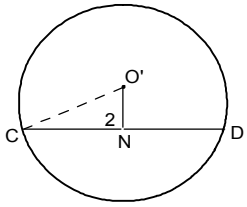
弦心距:圓心到弦的距離（這邊所指的距離是指圓心到弦的**垂直**距離）

如右圖，圓心 O 到弦 $\overline{AB}$ 的垂直距離 $\overline{OM}$ 即為此弦的弦心距。

弦心距的性質:

等圓中，如果兩弦相等，則它們的弦心距也相等，反之，如果兩弦的弦心距相等，則這兩弦相等



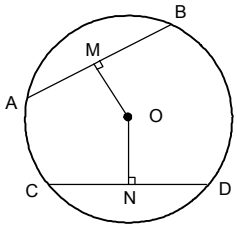


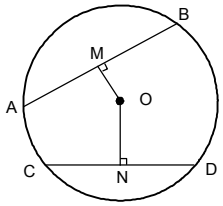
注意: 1. 通過圓心的弦是最長的弦，也就是直徑。

2. 在等圓(同圓)中，如果兩弦相等，則其弦心距也相等，反之亦然。

3. 在等圓(同圓)中，如果兩弦不相等，則較長弦的弦心距較短，如下圖:

$\overline{AB}=\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM}=\overline{ON}$　　$\overline{AB}>\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM}<\overline{ON}$





【已知】圓 0 與 0' 是等圓，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{OM}$ 是 $\overline{AB}$ 的弦心距，$\overline{O'N}$ 是 $\overline{CD}$ 的弦心距。

【求證】$\overline{OM}=\overline{O'N}$ 。

【證明】(1)連接 $\overline{OA}$ 和 $\overline{O'C}$ ，則 $\overline{OA}=\overline{O'C}$ 。

(2)$\because \overline{OM}$ 是 $\overline{AB}$ 的弦心距，

$\therefore \overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ，　$\therefore \overline{AM}=\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，$\angle 1=90^0$ 。

(3)$\because \overline{O'N}$ 是 $\overline{CD}$ 的弦心距，

$\therefore \overline{O'N}$ 垂直平分 $\overline{CD}$ ，　$\therefore \overline{CN}=\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ ，$\angle 2=90^0$ 。

(4)$\because \overline{AB}=\overline{CD}$ ，　$\therefore \overline{AM}=\overline{CN}$ 。

(5)$\because$△AOM 與△CO'N 都是直角三角形，且

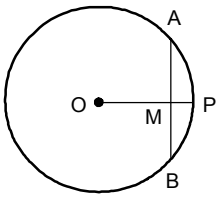
$\overline{AO}=\overline{CO'}$ ，$\overline{AM}=\overline{CN}$ ，

$\therefore$△AOM≅△CO'N(RHS)　$\therefore \overline{OM}=\overline{O'N}$ 。

有關弦心距的計算：弦心距的計算問題多與垂直有關，因此常常會用到商高定理計算之。

【範例】圓 O 的半徑是 17，弦 $\overline{AB}$ 垂直半徑 $\overline{OP}$ 且交於 M，$\overline{OM}=8$，求 $\overline{AB}$ 的長。

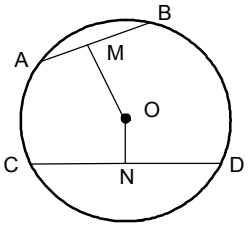
【解】



【範例】$\overline{AB}=6$ 公分，$\overline{CD}=8$ 公分，$\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OM}$ 為 4 公分，

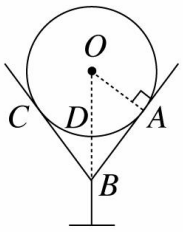
求 $\overline{CD}$ 的弦心距 $\overline{ON}$ 之長。

【解】



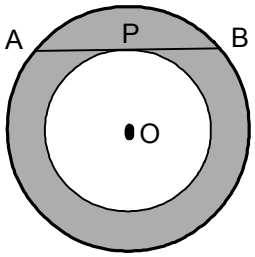
【範例】將乒乓球放入高腳杯內，若該球與杯子的接觸點為 A、C 兩點，且球的半徑為 1.8 公分，$\overline{AB}=2.4$ 公分，則此球表面離杯底 B 點最短的距離為多少公分？

【解】



【範例】左圖為兩個同心圓，$\overline{AB}$ 切小圓於 P 點，已知 $\overline{AB}$ 長為 10，則灰色面積為?

【解】



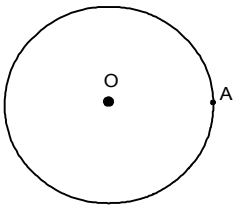
小　試　身　手

【範例一】

過圓 O 上一點 A，求作圓 O 的切線

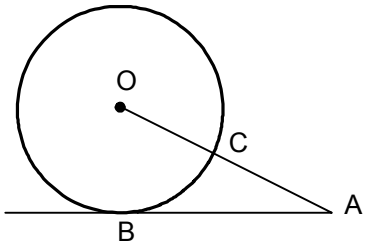
已知：A 為圓 O 上一點

求作：通過 A，作圓 O 的切線



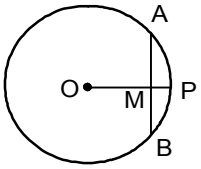
【練習一】

$\overline{AB}$ 切圓 O 於 B，$\overline{AO}$ 交圓 O 於 C，$\overline{AB}=12$，$\overline{OC}=5$，求 $\overline{AC}$ 的長



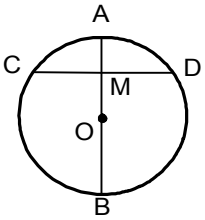
【範例二】

圓 O 的半徑是 15，弦 $\overline{AB}$ 垂直半徑 $\overline{OP}$ 且交於 M，$\overline{OM}=12$，求 $\overline{AB}$ 的長。



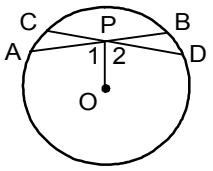
【練習二】

圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 平分弦 $\overline{CD}$ 於 M 點，$\overline{CD}=6$ 公分，$\overline{AM}=1$ 公分，求 $\overline{AB}$ 的長。



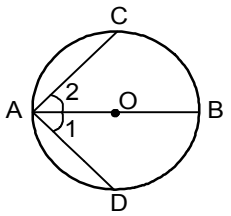
【範例三】

$\overline{AB}$、$\overline{CD}$是圓 0 中相等的兩弦相交於 P 點。
試證：$\angle 1=\angle 2$



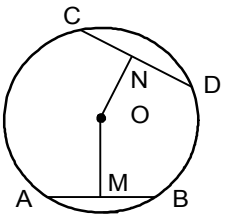
【練習三】

$\overline{AB}$是圓 0 的直徑，$\angle 1=\angle 2$。
試證：$\overline{AC}=\overline{AD}$



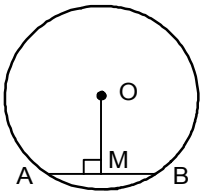
【範例四】

$\overline{AB}=8$ 公分，$\overline{CD}=6$ 公分，$\overline{AB}$的弦心距$\overline{OM}$為 3 公分，求$\overline{CD}$的弦心距$\overline{ON}$之長。



【練習四】

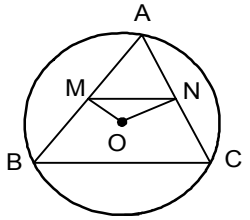
已知圓 0 的直徑是 26 公分，$\overline{AB}$是圓 0 的一弦，它的弦心距為 12 公分，求$\overline{AB}$的長。



【範例五】

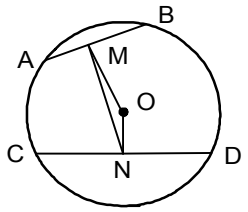
圓 O 是△ABC 的外接圓，∠C＞∠B，$\overline{OM} \perp \overline{AB}$，$\overline{ON} \perp \overline{AC}$。

試證：∠OMN＞∠ONM



【練習五】

在圓 O 中，$\overline{OM} \perp \overline{AB}$，$\overline{ON} \perp \overline{CD}$，∠OMN＜∠ONM。

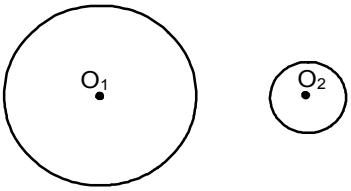


兩圓的位置關係與公切線

兩圓的位置關係：我們如果兩圓慢慢靠近可以依序得到下列五種兩圓的位置關係

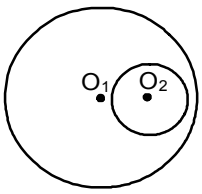
(一)兩圓不相交:

1. 兩圓**外離**：圖中，圓 0_1 與圓 0_2 兩圓外離。

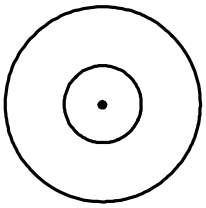


2. 兩圓**內離**：圖(一)中，圓 0_1 與圓 0_2 兩圓內離。

在內離的情況下，若圓 0_1 與圓 0_2 的圓心重疊，我們稱這兩圓為**同心圓**(如圖二)。



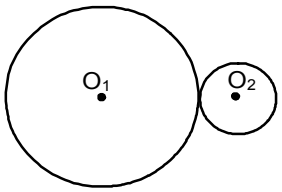
圖(一)



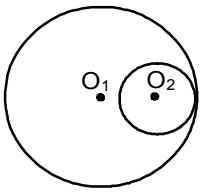
圖(二)

(二)兩圓相交於一點:

3. 兩圓**外切**：圖中，圓 0_1 與圓 0_2 兩圓外切。

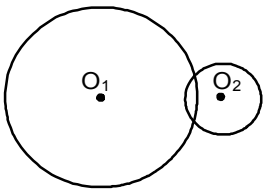


4. 兩圓**內切**：圖中，圓 0_1 與圓 0_2 兩圓內切。



＊這兩圓叫做**相切圓**，相切的點叫做**切點**。

(三)兩圓相交於兩點:圖中，圓 0_1 與圓 0_2 兩圓相交兩點。

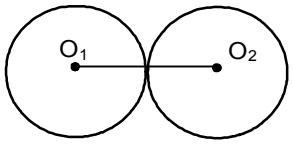


連心線的定義及性質

1. 連心線的定義：

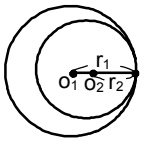
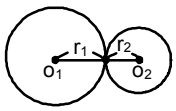
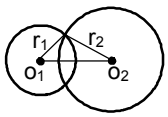
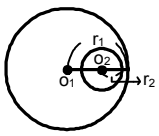
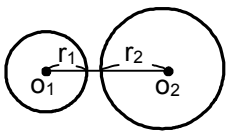
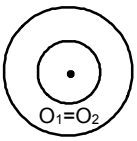
(1) 連心線: 平面上，兩圓的圓心分別為 0_1 與 0_2，連接 0_1、0_2 的直線，稱為這兩圓的連心線。

(2) 連心線長:為連接圓 0_1 與圓 0_2 的直線，稱為圓 0_1 與圓 0_2 的連心線，$\overline{O_1O_2}$ 為圓 0_1 與圓 0_2 兩圓心的距離，稱為圓 0_1 與圓 0_2 的連心線長。



(3) 連心線長與兩圓半徑的關係:

設圓 0_1 的半徑為 r_1、圓 0_2 的半徑為 r_2，則:

兩圓關係	圖示	連心線長與半徑關係
內切		$\overline{O_1O_2}=\lvert r_1-r_2\rvert$
外切		$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$
相交於兩點		$\lvert r_1-r_2\rvert<\overline{O_1O_2}<r_1+r_2$
內離		$\overline{O_1O_2}<\lvert r_1-r_2\rvert$
外離		$\overline{O_1O_2}>r_1+r_2$
同心圓		$\overline{O_1O_2}=0$

【範例 1】已知有兩圓半徑分別為 5 公分和 3 公分，若兩圓的位置關係是外切，則連心線長為何?

【解答】

【範例 2】若兩圓半徑分別為 5 公分和 3 公分，而連心線長為 4 公分，則兩圓的位置關係為何?

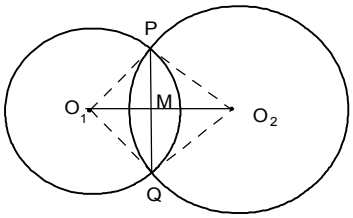
【解答】

2. 連心線的相關性質:

（1）兩圓相交於 P、Q 兩點，兩圓的連心線必垂直 $\overline{PQ}$

【已知】圓 O_1 與圓 O_2 相交於 P、Q 兩點，$\overline{PQ}$ 交 $\overline{O_1O_2}$ 於 M。

【求證】$\overline{O_1O_2} \perp \overline{PQ}$，$\overline{PM} = \overline{QM}$。



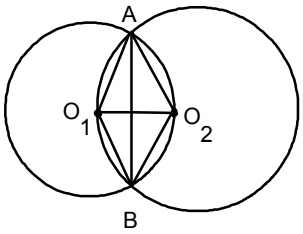
【證明】連接 $\overline{O_1P}$、$\overline{O_1Q}$、$\overline{O_2P}$、$\overline{O_2Q}$。

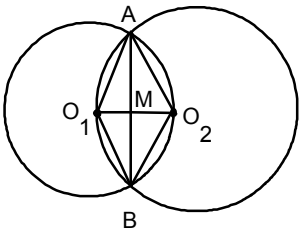
$\because \overline{O_1P} = \overline{O_1Q}$，$\overline{O_2P} = \overline{O_2Q}$，

$\therefore \overline{O_1O_2}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$，$\overline{PM} = \overline{QM}$。

【範例】如下圖，圓 O_1 與圓 O_2 相交於 A、B 兩點，若 $\overline{O_1O_2}=14$、$\overline{O_1A}=13$、$\overline{O_1B}=15$，

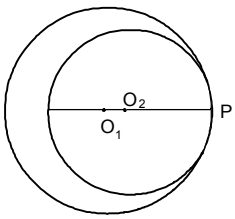
則 $\overline{AB}=$?四邊形 A O_1B O_2 的面積為?





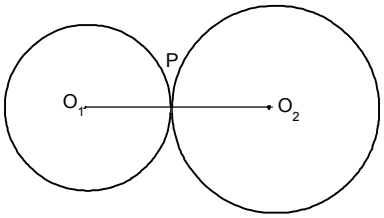
【解答】

（2）兩圓相切，則這兩圓的切點必在它們連心線上



【已知】如圖，圓 O_1 與圓 O_2 相交於 P。

【求證】P 點在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上。



【證明】設 P 點不在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上，

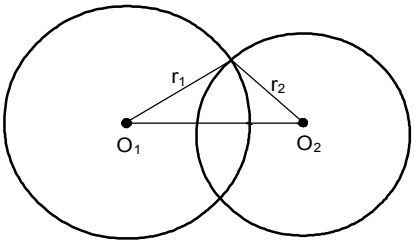
則圓 O_1 與圓 O_2 必有另一交點 Q。

但此與兩圓相切僅有一交點的事實互相矛盾，

所以 P 點不在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 的假設不能成立，因此 P 點必在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上。

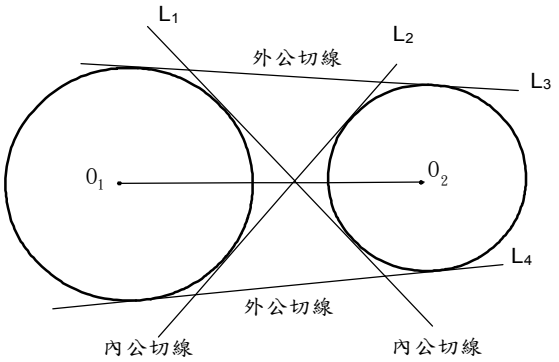
（3）交於兩點的兩圓，其連心線長必小於這兩圓半徑的和，大於兩圓半徑之差

如圖圓 O_1 與圓 O_2 兩圓相交兩點，連心線長 $\overline{O_1O_2}$；$|r_1-r_2|<\overline{O_1O_2}<r_1+r_2$



兩圓的公切線:

(1)在平面上，如果直線 L 同時為兩圓的切線，則直線 L 稱為這兩圓的**公切線**，兩切點間的距離，稱為**公切線的長**。



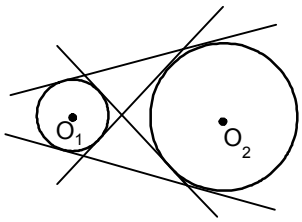
若一直線是兩圓的公切線，且兩圓分別在直線的兩側，則此直線稱為兩圓的內公切線；如上圖的 L_1 與 L_2 。

若一直線是兩圓的公切線，且兩圓分別在直線的同側，則此直線稱為兩圓的外公切線。如上圖的 L_3 與 L_4 。

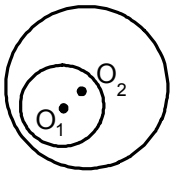
(2)根據兩圓的位置關係，其公切線有下列情形:

(一) 兩圓不相交

(a) 外離:4 條公切線

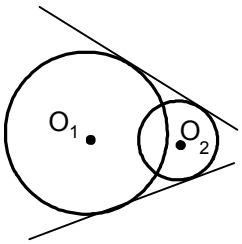


(b) 內離:沒有公切線

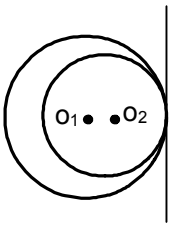


(二)兩圓相交

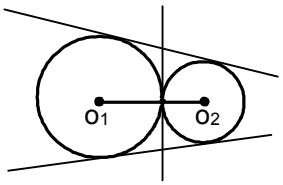
(a) 相交兩點:2 條公切線



(b)內切:1 條公切線



(c)外切:3 條公切線



公切線的求法

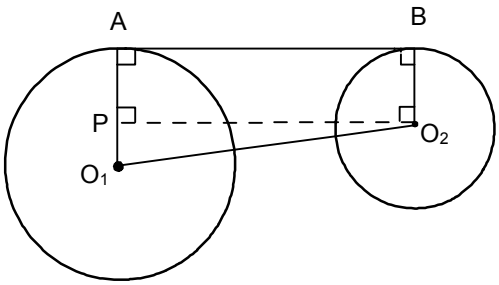
若 r_1、r_2 為圓 0_1 與圓 0_2 的半徑，且 $r_1 > r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，則

(1) 外公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$　　(2) 內公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$

【公式推導】

（1） 外公切線長：

如右圖，若 r_1、r_2 為圓 O_1 與圓 O_2 的半徑，且 $r_1 > r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，求外公切線 $\overline{AB}$ 的長度?



【解】:過 O_2 作 $\overline{O_2P} \perp \overline{O_1A}$ 於 P

$\Rightarrow APO_2B$ 為矩形

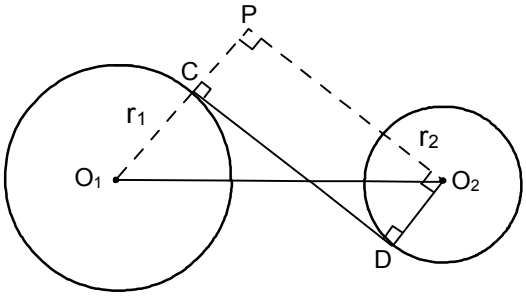
$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{O_2P}$

$= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2}$

$= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}$

（2）內公切線長：

如右圖，若 r_1、r_2 為圓 O_1 與圓 O_2 的半徑，且 $r_1 > r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，求內公切線 $\overline{CD}$ 的長度?



【解】

過 O_2 作 $\overline{O_2P} \perp \overset{\text{Suuu}}{O_1C}$ 於 P

$\Rightarrow PCDO_2$ 為矩形

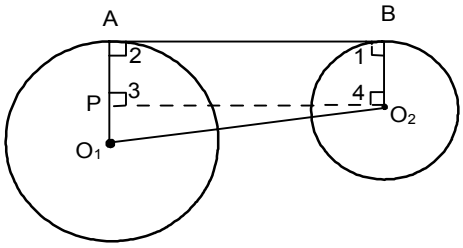
$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{O_2P}$

$= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2}$

$= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - (r_1 + r_2)^2}$

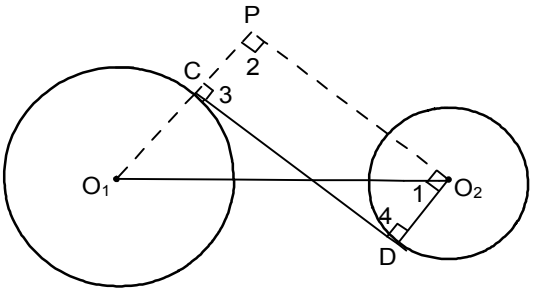
【範例】圓 O_1 的半徑為 4，圓 O_2 的半徑為 2，$\overline{O_1O_2}=10$，$\overline{AB}$ 分別外切圓 O_1 與圓 O_2 於 A 和 B 兩點，試求 $\overline{AB}$ 的長

【解】



【範例】圓 O_1 的半徑為 4，圓 O_2 的半徑為 2，$\overline{O_1O_2}=10$，$\overline{CD}$ 分別內切圓 O_1 與圓 O_2 於 C 和 D 兩點，試求 $\overline{CD}$ 的長

【解】

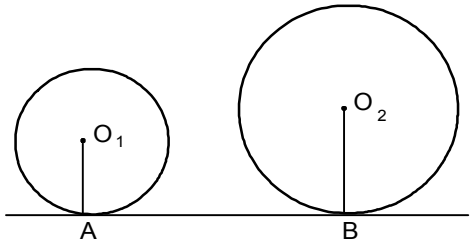


小 試 身 手

【範例一】

已知：$\overleftrightarrow{AB}$ 為圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，A、B 為切點

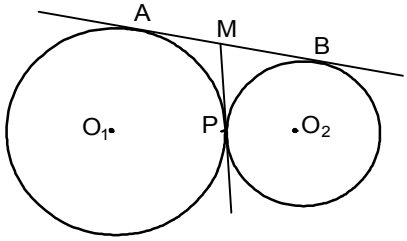
求證：$\overline{O_1A} // \overline{O_2B}$ 。



【練習一】

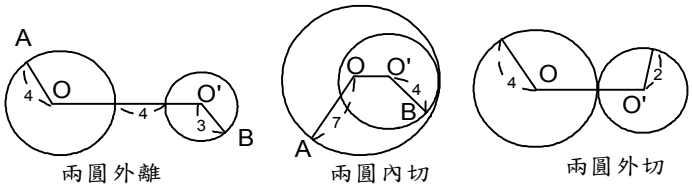
已知：圓 O_1 與圓 O_2 外切於 P，$\overset{\text{sum}}{MP}$ 為其內公切線，$\overset{\text{sum}}{AB}$ 為其外公切線，A 和 B 為切點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{MP}$ 交於 M

試證：$\overline{MA} = \overline{MB}$ 。



【範例二】

求下列各圖中連心線 $\overline{OO'}$ 的長：



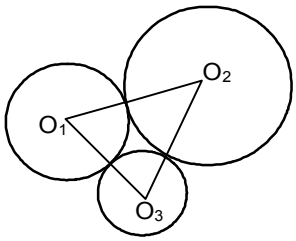
【練習二】

(1)兩圓內切，其半徑分別為 6 與 3，求連心線的長。

(2)兩圓外切，其半徑分別為 4 與 5，求連心線的長。

【範例三】

0_1、0_2和0_3分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，已知$\overline{O_1O_2}$＝5 公分，$\overline{O_2O_3}$＝4 公分，$\overline{O_3O_1}$＝3 公分，求此三圓的半徑。

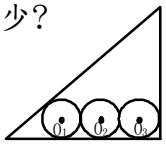


【練習三】

三圓兩兩外切，圓心分別為0_1、0_2、0_3，若$\overline{O_1O_2}$＝17，$\overline{O_2O_3}$＝15，$\angle 0_1\,0_3 0_2 = 90^0$，求圓$0_2$之半徑。

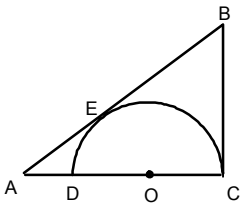
【範例四】

如圖，丸子三兄弟的身體都是等圓，他們住在ΔABC 裡面。已知在ΔABC 中，$\overline{AC}$＝4、$\overline{BC}$＝3，∠C＝90^0，三個等圓除了互相外切外，與ΔABC 三邊也各相切，則丸子三兄弟身體的半徑為多少?



【練習四】

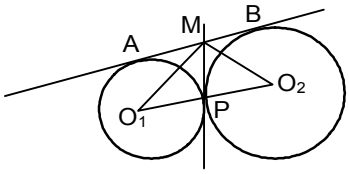
如圖，ΔABC 中，有一半圓圓心 0 在$\overline{AC}$上，且切$\overline{AB}$於 E、切$\overline{BC}$於 C，若$\overline{AC}$＝4 公分、$\overline{BC}$＝3 公分，則此半圓的半徑為多少?



【範例五】

圓 O_1 與圓 O_2 外切於 P，$\overleftrightarrow{MP}$ 為其內公切線，$\overleftrightarrow{AB}$ 為其外公切線，A 和 B 為切點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{PM}$ 交於 M

試證：(1) $\overline{MA}=\overline{MB}$　(2) $\angle O_1MO_2=90^0$



【練習五】

如圖，設 O 為圓 O 的圓心，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點，$\overleftrightarrow{AO}$ 交圓 O 於 C、D 兩點，而弦 $\overline{BE}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於 F 點，若 $\overline{AB}=12$、$\overline{AC}=8$，則 $\overline{BE}=$?