幾何與證明

幾何推理

在歷史上出現過的文明當中，希臘文明是非常奇特的一個。希臘人不僅在哲學及文學上有輝煌的成就，他們還有個唯一無二的發明——邏輯系統。最有名的例子就是歐基里德幾何。從五個公設出發可以推導出一套非常壯麗的幾何體系。換句話說，所有的幾何知識都可以化約到少數幾個最根本的概念。

什麼是歐氏幾何的五個公設呢?

【公設一】過任意兩點可以作一直線。

【公設二】直線兩端可以無限延伸。

【公設三】給定一點為圓心，以任意長度為半徑可以作一圓。

【公設四】所有直角皆相等。

【公設五】若一直線和兩直線相交，且其中一側的同側內角和小於二直角，則將此兩直線延長後，會交於同側內角和小於二直角的一側。

歐幾里得把它們作為數學推理的基礎。在《幾何原本》裡，歐幾里得有條不紊地證明了 467 個最重要的數學定理。從此，古希臘豐富的幾何學知識，形成了一個邏輯嚴謹的科學體系。後來，大家乾脆把書中闡述的幾何學知識，叫做"歐幾里得幾何"。

基本幾何推理證明

前幾個章節我們學了很多幾何圖形的性質，而下列性質為已經知道是正確的幾何事實，都可以作為幾何推理的依據。例如：

(1)三角形的全等性質:

①SSS: 兩個三角形的三個邊分別對應相等。

②SAS: 兩個三角形各有兩邊和它們的夾角分別對應相等。

③ASA: 兩個三角形各有兩個角和這兩個角的夾邊分別對應相等。

④AAS: 兩個三角形各有兩個角和其中一個角的對邊分別對應相等。

⑤RHS: 兩個直角三角形中，斜邊及一股對應相等。

(2)平行線性質:兩平行線被一截線所截，則其同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。

(3)平行線判別:兩直線被一截線所截，若一組同位角相等、一組內錯角相等或一組同側內角互補，則這兩直線平行。

(4)三角形內角和定理:三角形的三個內角和為 180^0。

上述諸性質中，有部分是從觀察或實驗中得來的，另一部分是以觀察實驗所得的結果為根據，再加以**推論**得到的。然而，對於某些性質，往往不易由觀察或實驗中獲得確切的結果，這時就需要用到「推理證明」的方法，經由推論得出結果。

【範例】以“三角形的外角和定理”為基礎，做“三角形的內角和為 180^{0}”的推理證明：

【證明】

$\because \angle A+\angle 1=180^{0}$

$\angle B+\angle 2=180^{0}$

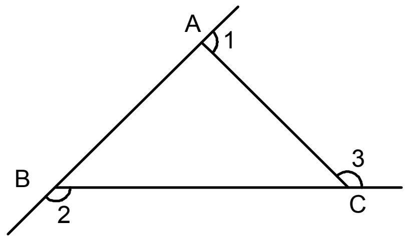
$\angle C+\angle 3=180^{0}$

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle 1+\angle 2+\angle 3=540^{0}$

但已知 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^{0}$(外角和定理)

$\Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C+360^{0}=540^{0}$

故 $\angle A+\angle B+\angle C=540^{0}-360^{0}=180^{0}$



【範例】試證在 ΔABC 中，$\angle A$ 的外角（$\angle 1$）等於 $\angle B+\angle C$。

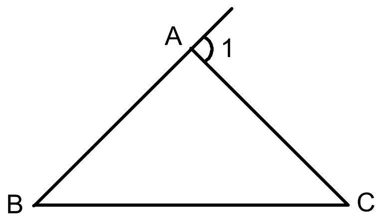
【證明】

$\because \angle 1+\angle A=180^{0}$

又 $\angle A+\angle B+\angle C=180^{0}$

$\therefore \angle 1+\angle A=\angle A+\angle B+\angle C=180^{0}$

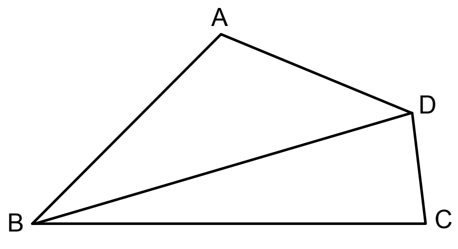
從兩邊消去 $\angle A$，得 $\angle 1=\angle B+\angle C$



【範例】試證任意四邊形的內角和等於 360^{0}。

【證明】

在四邊形 ABCD 中，連接 $\overline{BD}$，得到兩個三角形 ΔABD 與 ΔBCD



$\because$ 四邊形 ABCD 的內角和＝ΔABD 與 ΔBCD 的內角和，

由三角的內角和定理得知：

四邊形 ABCD 的內角和＝$180^{0}+180^{0}=360^{0}$。

我們在這三個例子中都是利用“推理”的方法，由一些已知的事實推出另一結果；我們也可以由這些新推出的結果再去推得更多的知識，所以，“推理”是獲得很多新知識的重要方法。在證明幾何問題時，為了使得證明清晰有條理，我們必須徹底了解所要證明的問題，並加以詳細分析：

什麼是題目的已知條件？

什麼是所要求證的事實？

我們常將所要證明的幾何問題，作一個簡單的圖形，並在圖中標出適當的記號，再根據這個已標示記號的幾何圖形去證明。

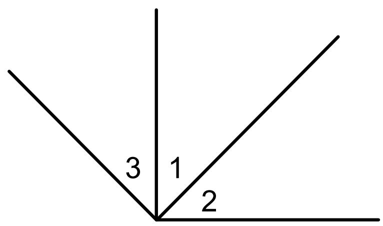
◎ 幾何證明的格式

已知:問題給的條件。

求證:想要得到的結論。

證明:根據已知事實及適當幾何性質推導出結論的過程。

【範例】試證同角的餘角相等。



我們先作如上圖的圖形,並以 $\angle 2$ 與 $\angle 3$ 表示 $\angle 1$ 的餘角,再將其已知與求證分別寫出來:

已知：$\angle 2$ 與 $\angle 3$ 都是 $\angle 1$ 的餘角。

求證：$\angle 2 = \angle 3$

【證明】

(1)因為 $\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的餘角，以 $\angle 2 + \angle 1 = 90^0$。

(2)又因為 $\angle 3$ 是 $\angle 1$ 的餘角，所以 $\angle 3 + \angle 1 = 90^0$。

(3)由(1)、(2)得 $\angle 2 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 1$。

(4)由兩邊消去 $\angle 1$，即得 $\angle 2 = \angle 3$。

◎ 證明題思考步驟:

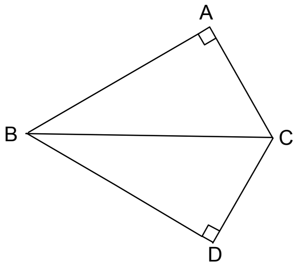
(1)分析:對所要證明的幾何問題加以分析,判別什麼是題目的「已知條件」,什麼是所要的「求證的事實」。

(2)畫圖並標示記號:依所要證明的幾何問題畫出一個幾何圖形，並在圖中標上適當的記號。

(3)證明:按部就班的推演驗證。

【範例】如圖中，$\overline{AB}=\overline{BD}$，$\angle A=\angle D=90^{0}$。

【求證】$\overline{CA}=\overline{CD}$



【分析】(1) 欲證明$\overline{CA}=\overline{CD}$，只要能證明$\Delta ABC\cong\Delta DBC$, 則由「兩個三角形全等時，對應邊相等」，即可得$\overline{CA}=\overline{CD}$

(2)因此本題就先往$\Delta ABC\cong\Delta DBC$的方向著手$\Rightarrow$全等三角形的判別性質。

【證明】在ΔABC與ΔDBC中，

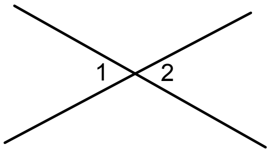
Θ $\angle A=\angle D=90^{0}$、$\overline{AB}=\overline{BD}$、$\overline{BC}=\overline{BC}$

$\therefore\Delta ABC\cong\Delta DBC$(RHS)　則$\overline{CA}=\overline{CD}$(對應邊相等)

小　試　身　手

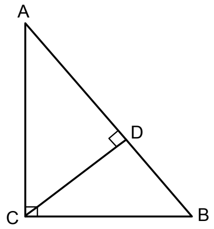
【範例一】

如圖，$\angle 1$、$\angle 2$是對頂角，試證$\angle 1=\angle 2$。

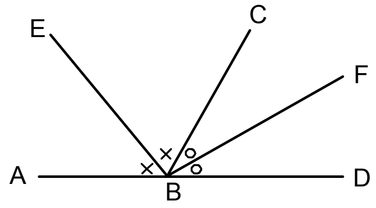


【練習一】

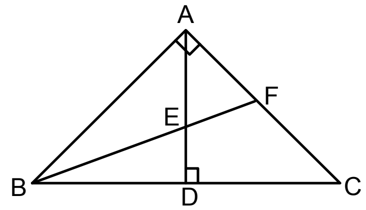
如圖，ΔABC為直角三角形，$\angle C=90^{0}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，試證$\angle ACD=\angle B$。



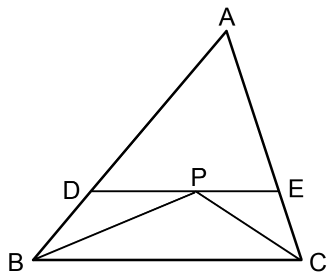
【範例二】
【已知】A、B、D 三點共線，$\overline{BF}$ 平分∠CBD，$\overline{BE}$ 平分∠ABC。
【求證】∠EBF＝90^0
【證明】



【練習二】
【已知】ΔABC 中，∠BAC＝90^0，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，∠B 平分線分別交 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AC}$ 於 E、F
【求證】ΔAEF 為等腰三角形
【證明】



【範例三】
如圖，$\overline{BP}$ 平分∠ABC，$\overline{CP}$ 平分∠ACB，$\overline{DE}$ 經過 P，且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$
（1） 求證：$\overline{DE}=\overline{BD}+\overline{CE}$
（2） 若 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=6$，求△ADE 的周長
【證明】

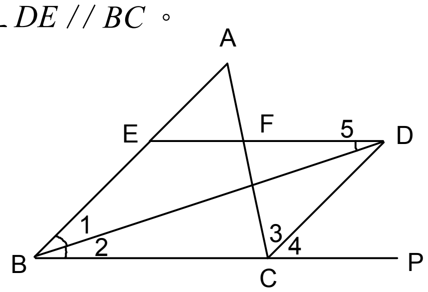


【練習三】

如圖，△ABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，若∠1＝∠2，∠3＝∠4，且 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$。

（1） 求證：$\overline{EF}=\overline{BE}-\overline{CF}$

（2） 若 $\overline{BE}=6$，$\overline{BC}=7$，求四邊形 EBCF 的周長



【證明】

【範例四】

一三角形三邊長分別 12 公分，12 公分，16 公分，求此三角形的面積

【練習四】

等腰三角形的周長是 16 公分，底邊上的高是 4 公分，求：(1) 三角形面積 (2) 腰上的高。

綜合證題法

一. 垂直平分線(中垂線)性質:

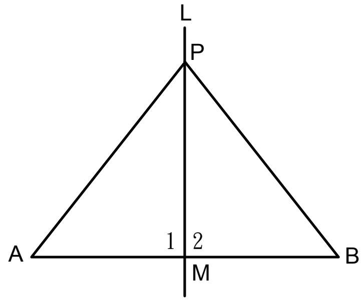
一線段垂直平分線上的任一點，到此線段的兩端點等距離。

【範例】試證垂直平分線到線段的兩端點等距離。

【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，交 $\overline{AB}$ 於 M，且 P 為 L 上的點。

【求證】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【證明】



∵L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線且交 $\overline{AB}$ 於 M

$\therefore \angle 1=\angle 2=90^0$ 且 $\overline{AM}=\overline{BM}$

在 ΔAMP 與 ΔBMP 中

$\because \angle 1=\angle 2$，$\overline{AM}=\overline{BM}$、$\overline{PM}=\overline{PM}$

$\therefore \Delta AMP \cong \Delta BMP$ (SAS) 則 $\overline{PA}=\overline{PB}$

二. 垂直平分線的判別性質:

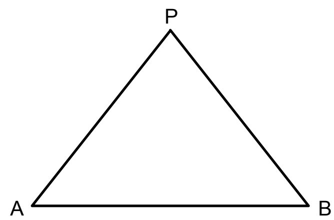
與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

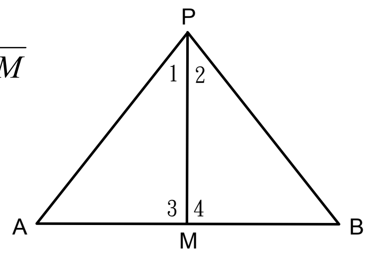
【範例】試證與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

【已知】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【求證】P 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

【證明】





作∠APB 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 M，則∠1＝∠2

在 ΔAPM 與 ΔBPM 中 $\because \overline{PA}=\overline{PB}$、$\angle 1=\angle 2$、$\overline{PM}=\overline{PM}$

$\therefore \Delta APM \cong \Delta BPM$ (SAS) 則 $\overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle 3=\angle 4$

又$\because \angle 3+\angle 4=180^0$　$\therefore \angle 3=\angle 4=90^0 \Rightarrow \overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\because \overline{AM}=\overline{BM}$ 且 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{PM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，即 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

三. 角平分線性質:

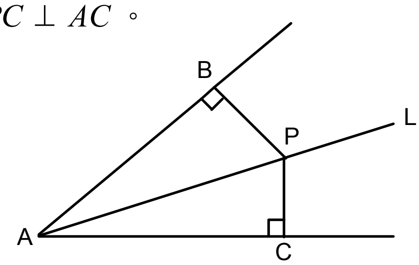
一個角的角平分線上任一點，到角的兩邊等距離。

【範例】試證角平分線上任意一點到此角兩邊等距離。

【已知】L 為∠BAC 的平分線，P 點在 L 上，且 $\overline{PB}\perp\overline{AB}$，$\overline{PC}\perp\overline{AC}$。

【求證】$\overline{PB}=\overline{PC}$

【證明】



在 ΔABP 與 ΔACP 中，

$\because \angle BAP=\angle CAP$，$\angle ABP=\angle ACP=90^0$，

$\overline{AP}=\overline{AP}$

所以由 AAS 可知 $\Delta ABP \cong \Delta ACP$　故得 $\overline{PB}=\overline{PC}$

四. 等腰三角形的重要性質:

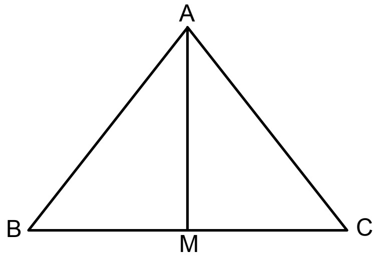
(1)等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【範例】試證等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【已知】在ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AM}$平分∠A。

【求證】$\overline{BM}=\overline{CM}$且$\overline{AM}\perp\overline{BC}$。

【證明】



∵$\overline{AM}$平分$\angle A$　∴∠BAM＝∠CAM，

在△ABM與△ACM中

∵$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠BAM＝∠CAM，$\overline{AM}=\overline{AM}$

∴△ABM≅△ACM（SAS）

因此$\overline{BM}=\overline{CM}$，∠AMB＝∠AMC

又∵∠AMB＋∠AMC＝180^0

∴∠AMB＝∠AMC＝90^0　故得$\overline{AM}\perp\overline{BC}$

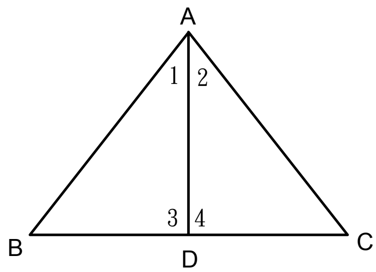
(2)等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【範例】試證等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【已知】若ΔABC為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$。

【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$且∠1＝∠2

【證明】



在ΔABD與ΔACD中

∵$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

∴△ABD≅△ACD（SSS）

則∠1＝∠2、∠3＝∠4

又∵∠3＋∠4＝180^0

∴∠3＝∠4＝90^0

即$\overline{AD}\perp\overline{BC}$

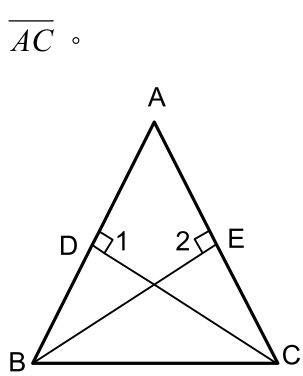
(3)等腰三角形兩腰上的高相等。

【範例】等腰三角形兩腰上的高相等

【已知】ΔABC為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$。

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$。

【證明】



在ΔABE與ΔACD中

∵$\angle 1=\angle 2$、$\angle A=\angle A$、$\overline{AB}=\overline{AC}$

∴$\Delta ABE\cong\Delta ACD$（AAS）

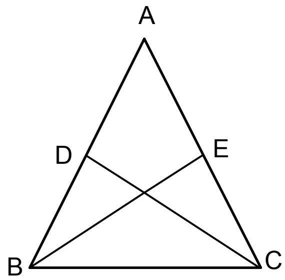
故$\overline{BE}=\overline{CD}$

(4)等腰三角形兩腰上的中線相等。

【範例】試證等腰三角形兩腰上的中線相等。

【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$



【證明】

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

∴ $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{AE}=\overline{CE}$

在 ΔBDC 與 ΔCEB 中

∵ $\overline{BD}=\overline{CE}$、$\overline{BC}=\overline{BC}$，$\angle ABC=\angle ACB$

∴ $\Delta BDC\cong\Delta CEB$（SAS）

則 $\overline{BE}=\overline{CD}$

【範例】試證平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。

【已知】ABCD 為平行四邊形，$\overline{AC}$ 為對角線。

【求證】$\Delta ABC\cong\Delta CDA$ 。

【證明】

(1) ∵ABCD 為平行四邊形 ∴$\overline{AB}//\overline{DC}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$。

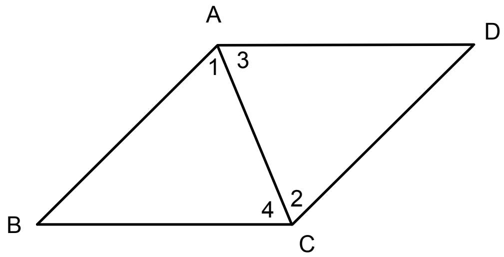
(2) ∵ $\overline{AB}//\overline{DC}$ ∴$\angle 1=\angle 2$。

(3) ∵ $\overline{AD}//\overline{BC}$ ∴$\angle 3=\angle 4$。

(4) 在 ΔABC 與 ΔCDA 中，

∵$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

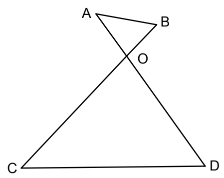
∴ΔABC≅ΔCDA（ASA 全等性質



小　試　身　手

【範例一】

如附圖 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 O 點，甲、乙兩人要證明∠A +∠B ＝∠D +∠C，證法如下，



甲：作一圓通過 A、B、C、D 四點

∵∠A 與∠C 對圓弧$\overset{\frown}{BD}$，

∴ ∠A ＝∠C，∠B ＝∠D

∴∠A ＋∠B ＝∠C ＋∠D

乙：∵∠BOD 是△AOB 和△DOC 的外角

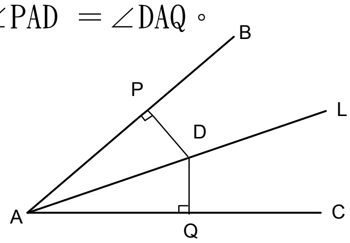
∴∠BOD ＝∠A+∠B ＝∠C ＋∠D

聰明的你，判斷甲、乙兩人的證法，誰正確？答：______。

【練習一】

如附圖，∠APD ＝∠AQD ＝90^0，$\overline{PD}=\overline{QD}$ 。

求證：∠PAD ＝∠DAQ。



證明：∵∠APD=∠AQD=90^0（已知）

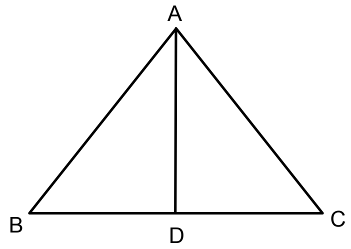
______（已知）

$\overline{AD}=\overline{AD}$（共同邊）

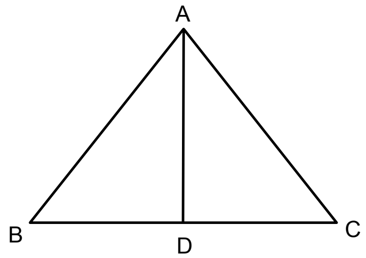
∴△PAD≅△QAD（______全等性質）

∴∠PAD=∠DAQ（對應角相等）

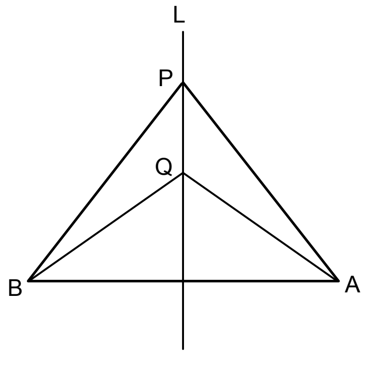
【範例二】
【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}=\overline{CD}$
【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$
【證明】



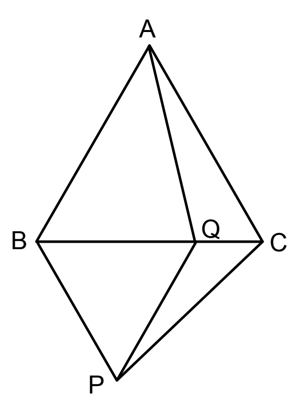
【練習二】
【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle$B＝$\angle$C， $\overline{AD}$ 為$\angle$BAC 的平分線
【求證】$\triangle$ABD≅$\triangle$ACD
【證明】



【範例三】
【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，P、Q 在 L 上
【求證】$\triangle$APQ≅$\triangle$BPQ
【證明】



【練習三】
【已知】$\triangle$ABC 與$\triangle$BPQ 都是正三角形
【求證】$\overline{AQ}=\overline{CP}$
【證明】

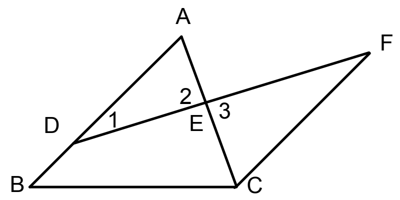


【範例四】

【已知】如圖，D 為 $\overline{AB}$ 上一點，$\overline{DF}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，$\overline{DE}=\overline{EF}$ ，$\overline{FC}//\overline{AB}$ 。

【求證】$\overline{AE}=\overline{CE}$

【證明】

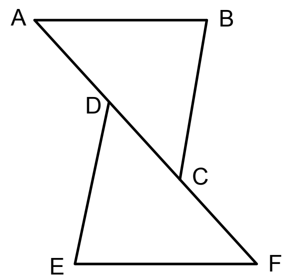


【練習四】

【已知】$\overline{AB}//\overline{EF}$ ，$\overline{AD}=\overline{CF}$ ，$\angle B=\angle E$

【求證】$\overline{AB}=\overline{EF}$

【證明】

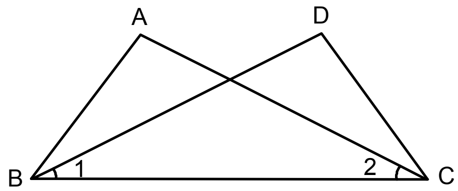


【範例五】

【已知】$\angle ABC=\angle DCB$，$\angle 1=\angle 2$

【求證】$\overline{BD}=\overline{AC}$

【證明】

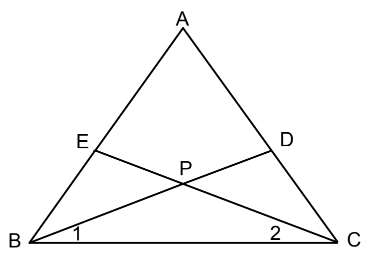


【練習五】

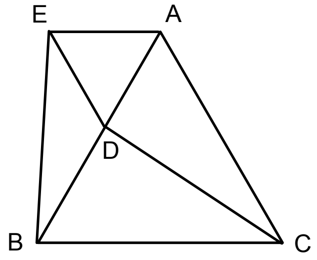
【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\angle 1=\angle 2$

【求證】$\overline{BD}=\overline{CE}$

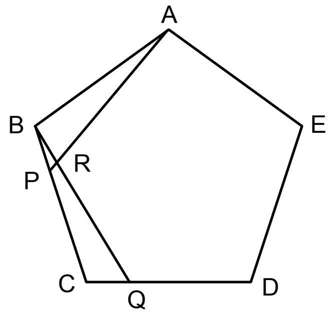
【證明】



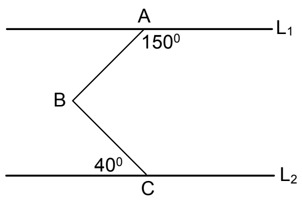
【範例六】
【已知】△ABC 與△ADE 皆為正三角形
【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$
【證明】



【練習六】
【已知】ABCDE 為正五邊形，$\overline{BP}=\overline{CQ}$
【求證】$\overline{AP}=\overline{BQ}$
【證明】



【範例七】
如圖，L_1 // L_2 ，求證∠ABC＝70 度
【證明】



【練習七】
如圖，L_1 // L_2，若∠1＝100^0，∠2＝150^0，求證∠3＝110 度

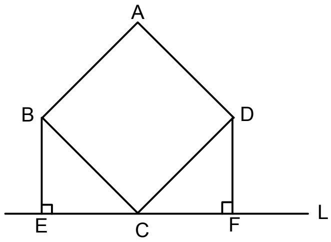
【證明】

【範例八】

【已知】過正方形 ABCD 之 C 點，作一直線 L，分別過 B、D 點作 $\overline{BE} \perp L$ 、 $\overline{DF} \perp L$ 。

【求證】 $\overline{EF} = \overline{DF} + \overline{BE}$

【證明】

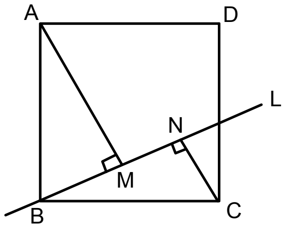


【練習八】

【已知】直線 L 通過正方形 ABCD 的頂點 B， $\overline{AM} \perp L$ ， $\overline{CN} \perp L$

【求證】 $\overline{AM} = \overline{BN}$

【證明】



【範例九】

三角形 ABC 三邊長分別為 24 公分、24 公分、32 公分，試求其面積。

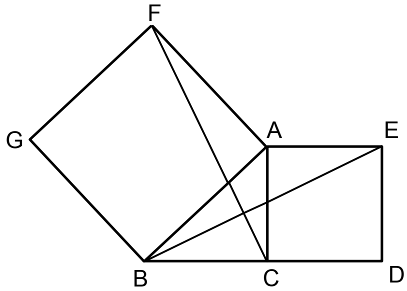
【練習九】

△ABC 中，若$\overline{AB}=\overline{AC}=30$公分，$\overline{BC}=36$公分，試求△ABC 一腰上的高為多少？

【範例十】

如圖，以△ABC 的兩邊$\overline{AB},\overline{AC}$為邊，作正方形 ABGF、ACDE，求證：$\overline{BE}=\overline{CF}$

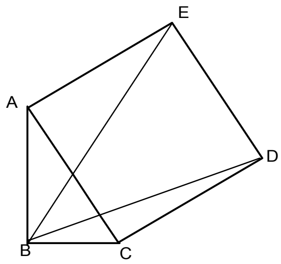
【證明】



【練習十】

如圖，△ABC 中，　$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，ACDE 為正方形，求：

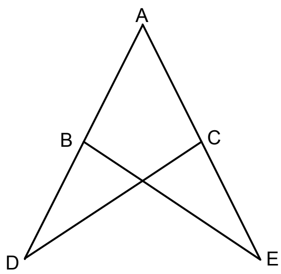
（1）$\overline{BD}$＝？（2）$\overline{BE}$＝？



【範例十一】

如圖，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$，求證∠ABE＝∠ACD

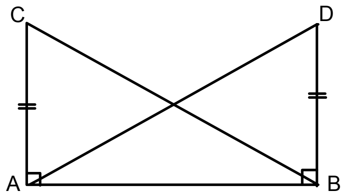
【證明】



【範例十二】

如圖，已知$\overline{CA} \perp \overline{AB}$，$\overline{DB} \perp \overline{AB}$，$\overline{CA} = \overline{DB}$，求證$\overline{CB} = \overline{DA}$

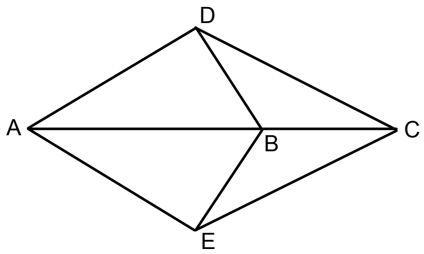
【證明】



【範例十三】

如圖，已知$\overline{AD} = \overline{AE}$，$\overline{BD} = \overline{BE}$，C 點在$\overleftrightarrow{AB}$上，求證$\overline{CD} = \overline{CE}$

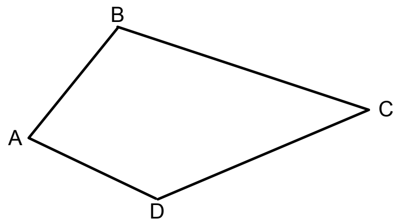
【證明】



輔助線

輔助線

在某些幾何問題的證明中，為了需要起見，常常要連接某一線段或作某一直線，這種線段或直線稱為輔助線。



【範例】

【已知】$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$

【求證】$\angle B=\angle D$

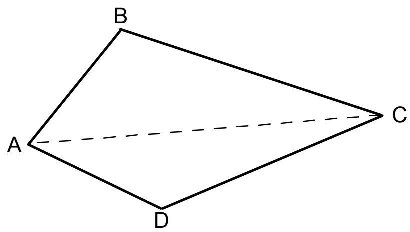
【證明】(1)連接$\overline{AC}$

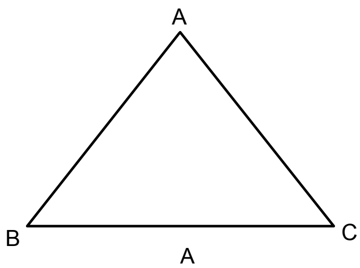
(2)在ΔABC與ΔADC中，

$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

$\therefore$由 SSS 可知$\Delta ABC\cong\Delta ADC$

故得$\angle B=\angle D$





【範例】證明等腰三角形兩底角相等

【已知】在ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$

【求證】$\angle B=\angle C$

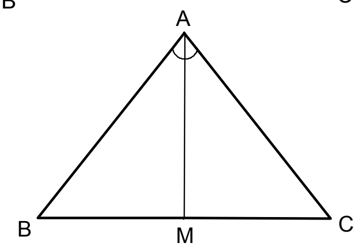
【證明】(1)過 A 點作$\angle A$的平分線交$\overline{BC}$於 M。

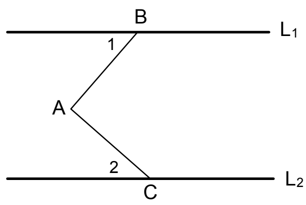
(2)在ΔABM與ΔACM中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAM=\angle CAM$，$\overline{AM}=\overline{AM}$，

$\therefore$由 SAS 可知$\Delta ABM\cong\Delta ACM$

故得$\angle B=\angle C$





【範例】

【已知】$L_1//L_2$

【求證】$\angle 1+\angle 2=\angle A$

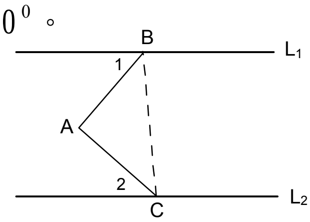
【證明】(1)連接$\overline{BC}$，

(2) $\because L_1//L_2$，$\therefore (\angle 1+\angle ABC)+(\angle 2+\angle ACB)=180^0$。

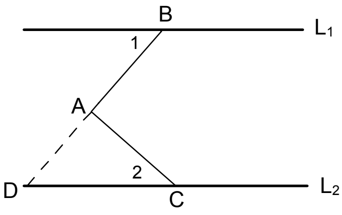
(3)由三角形的內角和定理知

$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^0$。

(4)由(2)、(3)得知 $\angle 1+\angle 2=\angle A$



【另證】(1)延長$\overline{BA}$與L_2交於 D。



(2)$\because L_1 // L_2$，$\therefore \angle 1 = \angle ADC$。

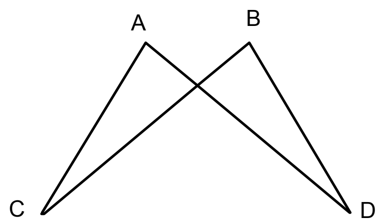
(3)由三角形的內角和定理知$\angle A + \angle ADC + \angle 2 = 180^0$。

$\Rightarrow \angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180^0$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 180^0 - \angle A = \angle BAC$

故$\angle 1 + \angle 2 = \angle BAC$

【範例】

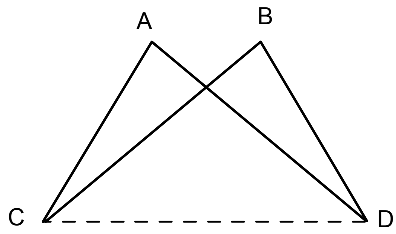


【已知】$\overline{AC} = \overline{BD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$

【求證】$\angle A = \angle B$

【證明】連接$\overline{CD}$，

在$\triangle ACD$與$\triangle BDC$中，

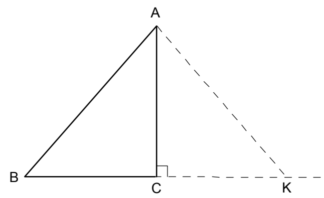


$\because \overline{AC} = \overline{BD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$，$\overline{CD} = \overline{CD}$，

$\therefore$由 SSS 可知$\triangle ACD \cong \triangle BDC$

故得$\angle A = \angle B$

【範例】當一個三角形一邊長的平方等於另兩邊長的平方和時，此三角形為直角三角形。（商高定理的定理）



【已知】在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$。

【求證】$\triangle ABC$為直角三角形

【證明】(1)過 C 作垂直$\overline{AC}$的直線，並在此直線上取一點 K，使$\overline{CK} = \overline{BC}$。

(2)連接$\overline{AK}$，在$\triangle AKC$中，$\angle ACK = 90^0$，

$\therefore \overline{AK}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CK}^2$。

(3)已知$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$且由(1)知$\overline{CK} = \overline{BC}$，

$\therefore \overline{AB} = \overline{AK}$。

(4)在$\triangle ABC$與$\triangle AKC$中，

$\overline{BC} = \overline{CK}$，$\overline{AC} = \overline{AC}$，$\overline{AB} = \overline{AK}$

由 SSS 可知$\triangle ABC \cong \triangle AKC$

(5) $\because \triangle ABC \cong \triangle AKC$，

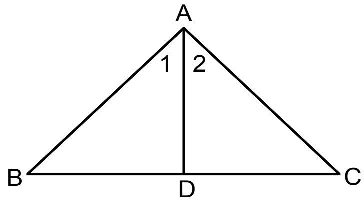
$\therefore \angle ACB = \angle ACK = 90^0$，故$\triangle ABC$為直角三角形。

小試身手

【範例一】

試證在一個三角形中，若有兩個角相等，則這個三角形必為等腰三角形

【已知】在 ΔABC 中，$\angle B = \angle C$ 。



【求證】$\overline{AB} = \overline{AC}$

【證明】

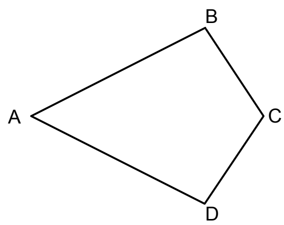
【練習一】

試證六邊形的內角和為 720^0

【證明】

【範例二】

如圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB} = \overline{AD}$ ，$\angle B = \angle D$



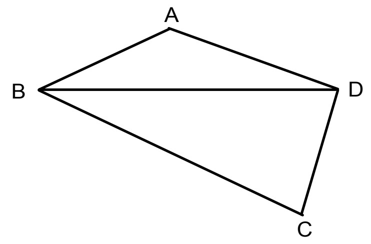
【求證】$\overline{BC} = \overline{CD}$

【證明】

【練習二】

如圖，$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，$\overline{AD}=\overline{CD}$，$\overline{BC}>\overline{AB}$

試證$\angle A+\angle C=180^{0}$

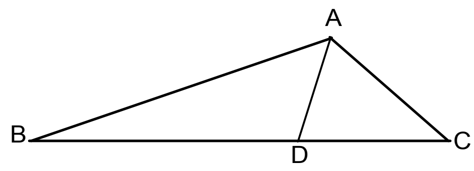


【解答】

【範例三】

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，$\angle C=2\angle B$，$\overline{AD}$平分$\angle A$，試証：$\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CD}$

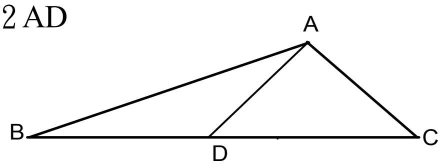
【證明】



【練習三】

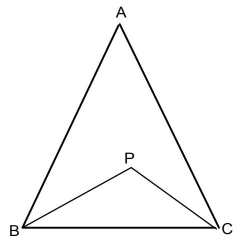
如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$是$\overline{BC}$上的中線，求證：$\overline{AB}+\overline{AC}>2\overline{AD}$

【證明】



【範例四】

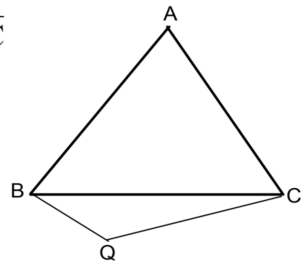
如圖，設 P 為△ABC 中任一點，試証：$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{PB}+\overline{PC}$



【證明】

【練習四】

已知∠ABC＞∠QBC，∠ACB＞∠QCB，試証：$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{QB}+\overline{QC}$



【證明】