

二次函數與其圖形

二次函數的意義與作圖

1. 函數複習：

(1) 函數：

如果對於每一個 x 值，都恰好只有一個 y 的對應值。那麼這種對應關係就表示 y 是 x 的函數。我們常用下面的符號

$$y = f(x) \text{ 或 } y = g(x)$$

等來表示。例如： $f(x) = 5x$ ， $g(x) = \frac{10}{x}$ ， $A(x) = x^2$ ， $B(x) = 100 + 8x$ ， $S(x) = \frac{200}{3x}$ ， $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 等都是 x 的函數。

(2) 線性函數：

1. 一般來說， x 的一次函數以下面的形式：

$$f(x) = ax + b$$

來表示，其中 a 和 b 都是常數，且 $a \neq 0$ 。

2. 當 $a = 0$ 時， $f(x) = 0 \cdot x + b$ ，即 $f(x) = b$ 。

我們會把這樣的函數叫做常數函數。

也就是，常數函數以下面的形式：

$$f(x) = b$$

來表示，其中 b 是已知常數。

【範例】：下面的函數中，哪些是一次函數？哪些是常數函數？

(A) $f(x) = 5$ (B) $g(x) = 3x + 1$ (C) $A(x) = -3 + x$ (D) $B(x) = -1$

解：(A) $f(x) = 5$ 為常數函數

(B) $g(x) = 3x + 1$ 為一次函數

(C) $A(x) = -3 + x$ 為一次函數

(D) $B(x) = -1$ 為常數函數

(3) 一次函數的作圖：

我們可以把一次函數 $y = f(x) = ax + b$ 看成是一個二元一次方程式，我們知道二元一次方程式的圖形是一條直線，所以一次函數的圖形也是一條直線。

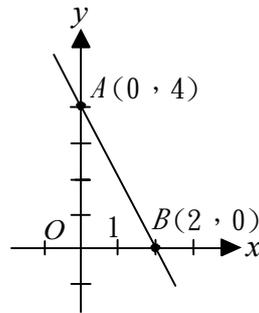
【範例】：畫出一次函數 $f(x) = -2x + 4$ 的圖形。

解：

我們取 $y = f(x) = -2x + 4$ 的兩組對應值如右：

x	0	2
y	4	0

在坐標平面上，描出兩點 $A(0, 4)$ ， $B(2, 0)$ ，則過 A 、 B 兩點的直線就是這函數的圖形，如右所示：



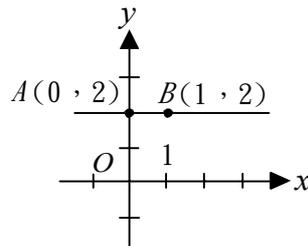
【範例】：畫出一次函數 $f(x) = 2$ 的圖形。

解：

我們取 $y = f(x) = 2$ 的兩組對應值如右：

x	0	1
y	2	2

在坐標平面上，描出兩點 $A(0, 2)$ ， $B(1, 2)$ ，則過 A 、 B 兩點的直線就是這函數的圖形，如下所示：



2. 二次函數的意義：

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的形式為所謂的二次函數，其中 a 、 b 、 c 為常數，但 $a \neq 0$ ，在此我們想知道其圖形的長相為何？

例如： $y = x^2$ ， $y = -3x^2 + 6$ ， $y = 2x^2 - 1$ ， $y = x^2 + 2x + 1$ 皆是二次函數。

【範例】：正方形面積 y 與邊長 x 的關係為 $y = x^2$ 。

正方形每個邊長 x 皆會對應一個面積 y 。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

【範例】：有一個二次函數為 $y = 2x^2$ ，當 x 值確定時，會有一個 y 值跟著確定，如下表所示：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	32	18	8	2	0	2	8	18	32	...

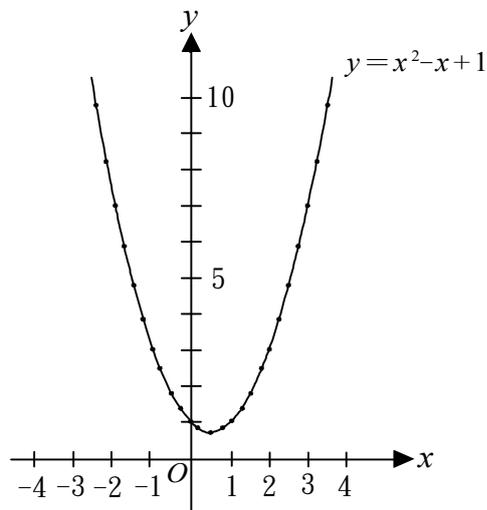
【範例】：有一個二次函數為 $y = x^2 - x + 1$ ，當 x 值確定時，會有一個 y 值跟著確定，如下表所示：

x	...	-2.5	-2.25	-2	-1.75	-1.5	-1.25	-1	-0.75	-0.5	-0.25
y	...	9.75	8.3125	7	5.8125	4.75	3.8125	3	2.3125	1.75	1.3125

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
y	1	0.8125	0.75	0.8125	1	1.3125	1.75	2.3125	3	3.8125

x	2.5	2.75	3	3.25	3.5	...
y	4.75	5.8125	7	8.3125	9.75	...

由以上的表格，我們畫出其二次函數之圖形：



由以上結果可發現二次函數的解有無限多組解，我們無法一一找出所有解並將其畫在圖形上，於是我們接下來要開始討論二次函數的作圖方法與圖形討論，來解決作圖上所產生的困難。

3. 二次函數的圖形討論與作圖：

我們已經知道一次函數的圖形是直線，那麼二次函數的圖形是什麼形狀呢？
我們主要目的就是要討論二次函數的圖形。

【問題】：是否有一般的規則能夠很快的判定二次函數的大致圖形嗎？

二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 可以利用配方法把它化為

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

令 $h = -\frac{b}{2a}$ ， $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 並且代入上面的等式中，

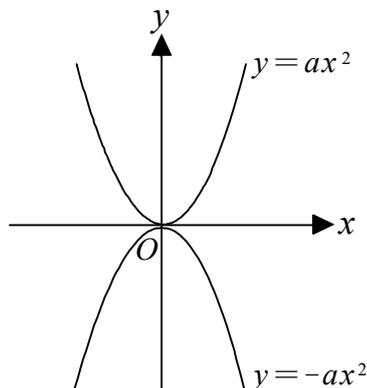
得 $f(x) = a(x - h)^2 + k$ 。

因此，二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$ 。

(1) 若 $h = 0$ ， $k = 0$ ，則 $f(x) = ax^2$ 。

當 $a > 0$ 時，其圖形為開口向上的拋物線，頂點在 $(0, 0)$ 的位置。

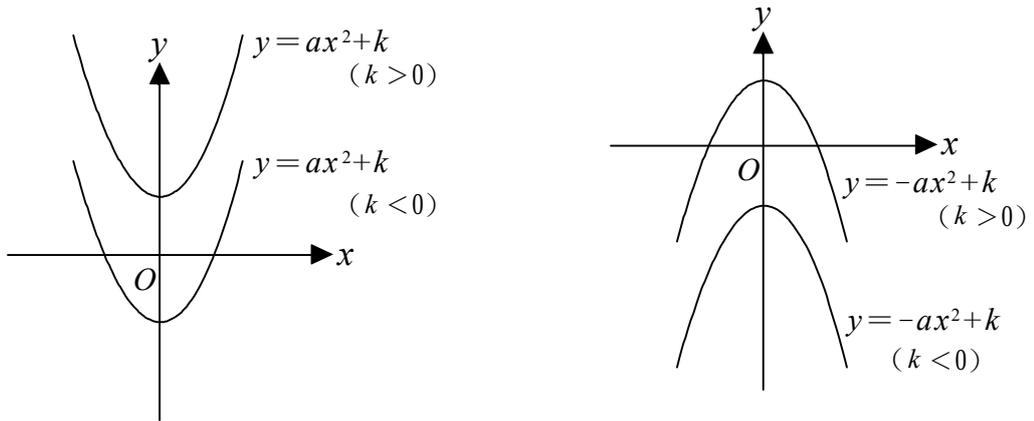
當 $a < 0$ 時，其圖形為開口向下的拋物線，頂點在 $(0, 0)$ 的位置。



(2) 若 $h = 0$ ， $k \neq 0$ ，則 $f(x) = ax^2 + k$ 。

當 $k > 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向上移動 k 個單位長，其頂點在 $(0, k)$ 且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。

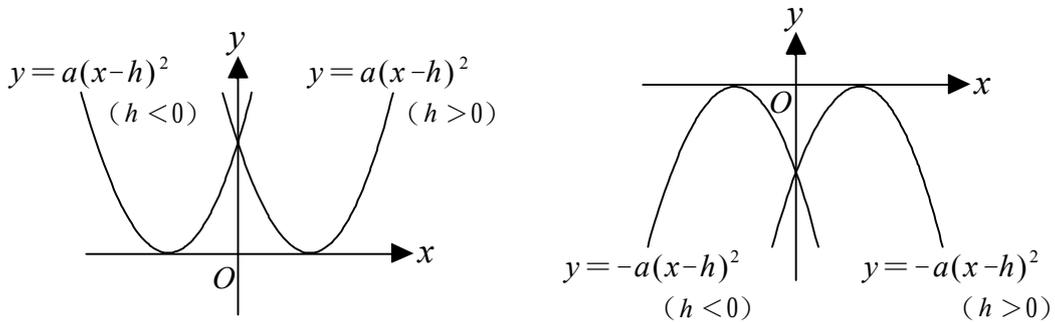
當 $k < 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向下移動 k 個單位長，其頂點在 $(0, k)$ 且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。



(3) 若 $h \neq 0, k = 0$ ，則 $f(x) = a(x-h)^2$ 。

當 $h > 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 x 軸) 向右移動 h 個單位長，其頂點在 $(h, 0)$ 且以直線 $x = h$ 為對稱軸。

當 $h < 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 x 軸) 向左移動 h 個單位長，其頂點在 $(h, 0)$ 且以直線 $x = h$ 為對稱軸。

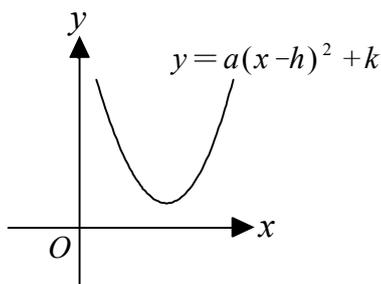


(4) 若 $h \neq 0, k \neq 0$ ，則 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 。

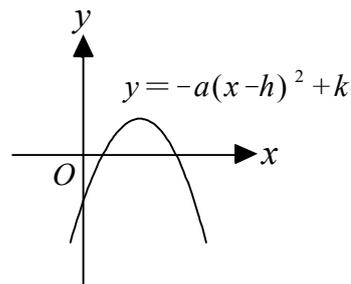
當 $a > 0$ 時，其圖形為開口向上的拋物線，頂點在 (h, k) ，其對稱軸為直線 $x = h$ 。

當 $a < 0$ 時，其圖形為開口向下的拋物線，頂點在 (h, k) ，其對稱軸為直線 $x = h$ 。

開口向上



開口向下

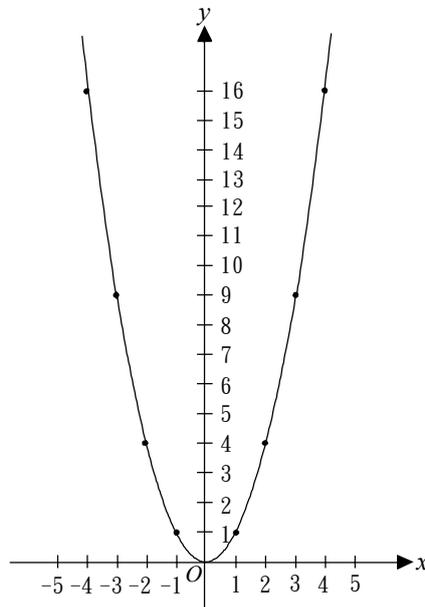


【範例】：請描繪出 $f(x) = x^2$ 的圖形。

解：令 $y = f(x) = x^2$ ，首先將 x 和 y 的對應情形列表如下：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得下列圖形，即為 $y = x^2$ 的圖形：

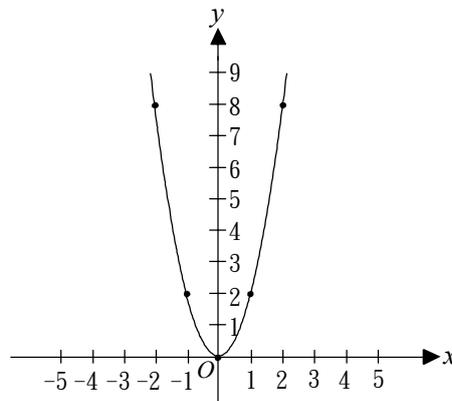


【範例】：請描繪出 $f(x) = 2x^2$ 的圖形。

解：令 $y = f(x) = 2x^2$ ，首先找出 5 個 x 和 y 的數對如下表所示：

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得右邊圖形，即為 $y = 2x^2$ 的圖形：



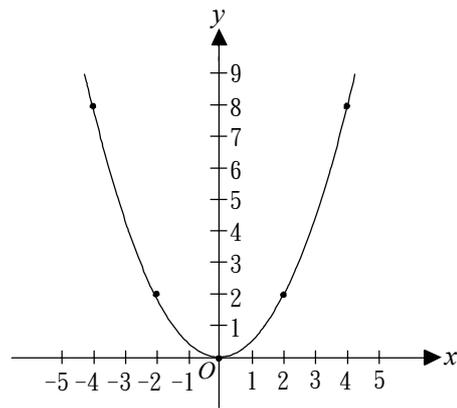
【範例】：請描繪出 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形。

解：

令 $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ，首先找出 5 個 x 和 y 的數對如下表所示：

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

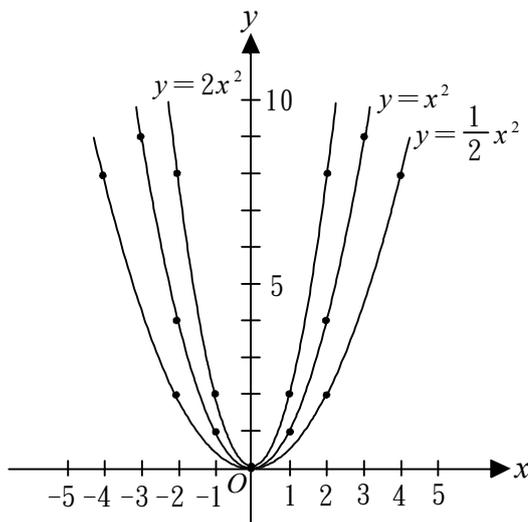
在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得右邊圖形，即為 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形：



4. 二次函數圖形的比較：

(1) 我們在同一坐標平面上，描繪出 $y = x^2$ 、 $y = 2x^2$ 和 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形，

來比較 $y = x^2$ 、 $y = 2x^2$ 和 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形之間的關係，如下圖所示：



$$(\because 2 > 1 > \frac{1}{2},$$

\therefore 開口大小：

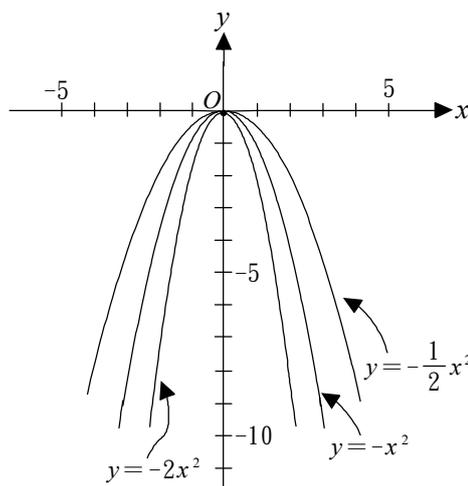
$$y = 2x^2 < y = x^2 < y = \frac{1}{2}x^2 \text{。})$$

由此可知：

1. 這些函數的 x^2 項係數都是正數。
2. 原點為頂點，且 y 軸 ($x=0$) 為對稱軸。
3. 開口向上的對稱圖形（頂點為最低點）。
4. 當 x^2 的係數的絕對值愈大，圖形的開口愈小。

(2) 這次我們在同一坐標平面上，描繪出 $y = -x^2$ 、 $y = -2x^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，

來比較 $y = -x^2$ 、 $y = -2x^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的圖形之間的關係，如下圖所示：



$$\left(\because -2 < -1 < -\frac{1}{2}, \right.$$

\therefore 開口大小：

$$y = -2x^2 < y = -x^2 < y = -\frac{1}{2}x^2 \text{。}$$

由此可知：

1. 這些函數的 x^2 項係數都是負數。
2. 原點為頂點，且 y 軸 ($x=0$) 為對稱軸。
3. 開口向下的對稱圖形（頂點為最高點）。
4. 當 x^2 的係數的絕對值愈大，圖形的開口愈小。

※注意： x^2 項係數的正負號決定了開口的方向，正的開口向上，而負的則是開口向下。另一方面， x^2 項係數的絕對值大小會影響開口的大小，若 x^2 項係數的絕對值越大，則開口越小。

例如：(A) $y = -\frac{1}{2}x^2$ (B) $y = -2x^2$ (C) $y = -x^2$ (D) $y = \frac{1}{2}x^2$

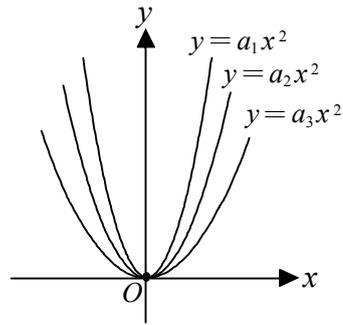
(E) $y = 2x^2$ (F) $y = x^2$ 。

比較開口大小：(A) = (B) > (C) = (F) > (D) = (E)。

結論： $y = ax^2$ 的圖形如下：

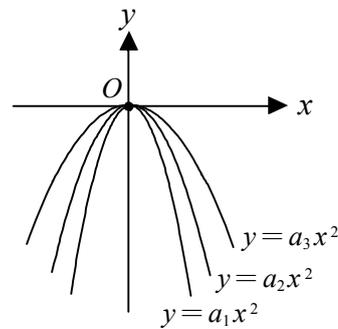
當 $a_i > 0$ ， $i = 1、2、3$ 時，圖形為：

其中 $|a_1| > |a_2| > |a_3|$ 。



當 $a_i < 0$ ， $i = 1、2、3$ ，且 $a_1 < a_2 < a_3$ 時，圖形為：

其中 $|a_1| > |a_2| > |a_3|$ 。



【範例】：請試著比較 $y = -3x^2$ 、 $y = 2x^2$ 和 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 開口的大小。

解：∵ x^2 項係數的絕對值大小會影響開口的大小。

$$\text{又 } |-3| > |2| > \left| -\frac{3}{2} \right|。$$

$$\therefore \text{開口的大小為：} y = -3x^2 > y = 2x^2 + 1 > y = -\frac{3}{2}x^2$$

【範例】：請問下列二次函數哪些開口向下？哪些開口向上？

$$(1) y = 2x^2 \quad (2) y = -3x^2 \quad (3) y = \frac{3}{2}x^2 \quad (4) y = -5x^2。$$

解：∵ x^2 項係數的正負號決定開口的方向，正的開口向上，負的開口向下。

$$\therefore \text{開口向上的有：(1) } y = 2x^2、(3) y = \frac{3}{2}x^2。$$

$$\text{開口向下的有：(2) } y = -3x^2、(4) y = -5x^2。$$



小 試 身 手

【例題 1】

試畫出 $y = x^2 + 2$ 的圖形。

解：

【練習 1】

試畫出 $y = -2x^2 + 3$ 的圖形。

解：

【例題 2】

試畫出 $y = 2(x-1)^2$ 的圖形。

解：

【練習 2】

試畫出 $y = (x+1)^2 + 1$ 的圖形。

解：

【例題 3】

下圖是 $y = 3x^2$ ， $y = x^2$ ， $y = \frac{1}{3}x^2$ 的圖形，其中以_____開口最大，_____開口最小。 $y = 3x^2$ 的圖形是_____， $y = x^2$ 的圖形是_____， $y = \frac{1}{3}x^2$ 的圖形是_____。

【例題 4】

下列為二次函數：

- (A) $y = 3x^2$ (B) $y = -1.5x^2$ (C) $y = 1.5x^2$
 (D) $y = -3x^2$ (E) $y = \frac{1}{3}x^2$ (F) $y = -\frac{2}{3}x^2$

請回答下列問題：

- (1) 開口向上有哪些
- (2) 開口向下有哪些
- (3) 何者開口最大？何者開口最小

解：

【練習 3】

下圖是 $y = -x^2$ ， $y = -2x^2$ ， $y = -3x^2$ 的圖形，其中以_____開口最大，_____開口最小。 $y = -x^2$ 的圖形是_____， $y = -2x^2$ 的圖形是_____， $y = -3x^2$ 的圖形是_____。

【練習 4】

下列為二次函數：

- (A) $y = x^2$ (B) $y = -3x^2$ (C) $y = 2.5x^2$
 (D) $y = -2x^2$ (E) $y = \frac{4}{5}x^2$ (F) $y = -\frac{2}{7}x^2$

請回答下列問題：

- (1) 開口向上有哪些
- (2) 開口向下有哪些
- (3) 何者開口最大？何者開口最小

解：

二次函數圖形之平移

1. 形的上、下平移：

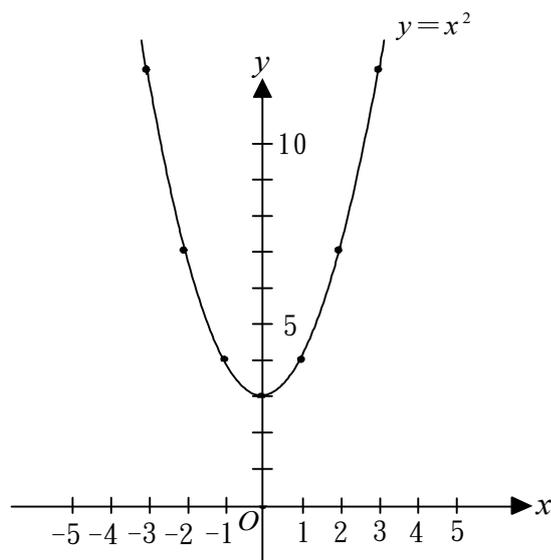
接下來我們來畫形如 $y = ax^2 + k$ 的圖形。

我們知道它的頂點在 $(0, k)$ 且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。

【範例】：描繪 $y = x^2 + 3$ 的圖形。

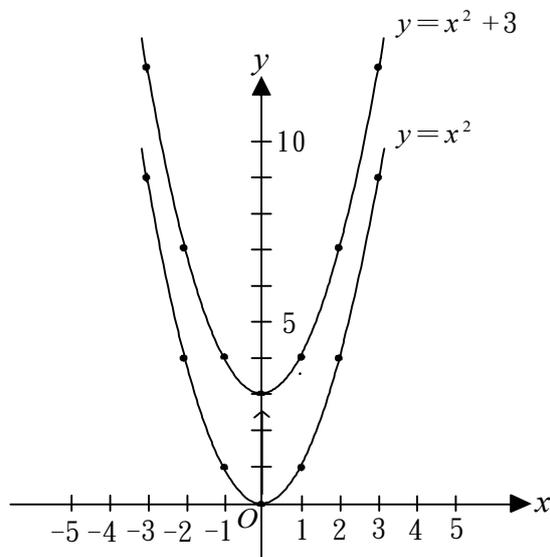
解：

$y = x^2 + 3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0, 3)$ ，且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	7	4	3	4	7

如果我們將 $y = x^2$ 及 $y = x^2 + 3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？

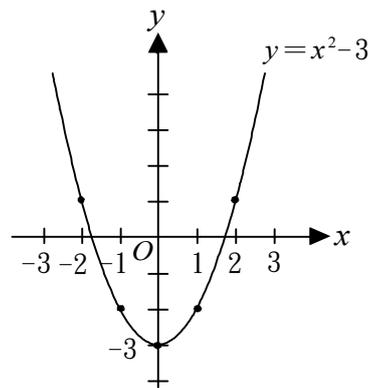


由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y = x^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向上移動三個單位長，即可以得到 $y = x^2 + 3$ 的圖形。

【範例】：描繪 $y = x^2 - 3$ 的圖形。

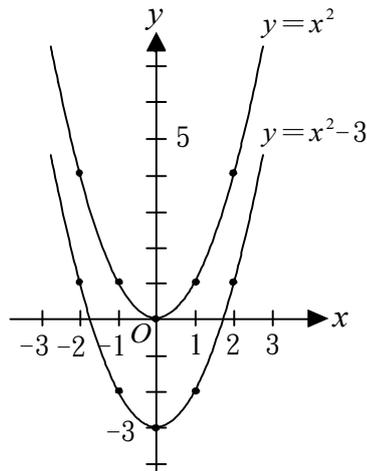
解：

$y = x^2 - 3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0, -3)$ ，且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

如果我們將 $y = x^2$ 及 $y = x^2 - 3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



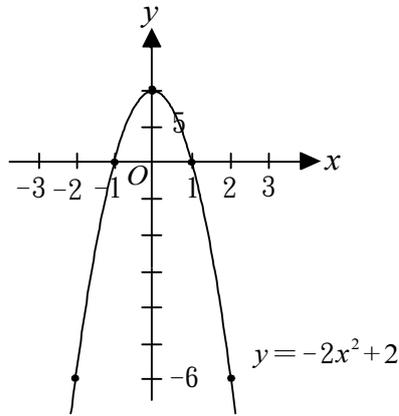
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y = x^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向下移動三個單位長，即可以得到 $y = x^2 - 3$ 的圖形。

【範例】：描繪 $y = -2x^2 + 2$ 的圖形。

解：

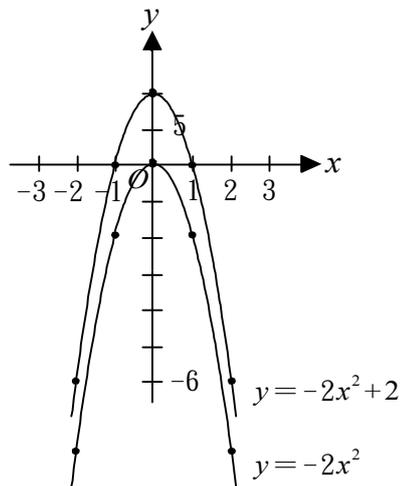
$y = -2x^2 + 2$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在 $(0, 2)$ ，且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。

將對應的函數值列表如下，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	-6	0	2	0	-6

如果我們將 $y = -2x^2$ 及 $y = -2x^2 + 2$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



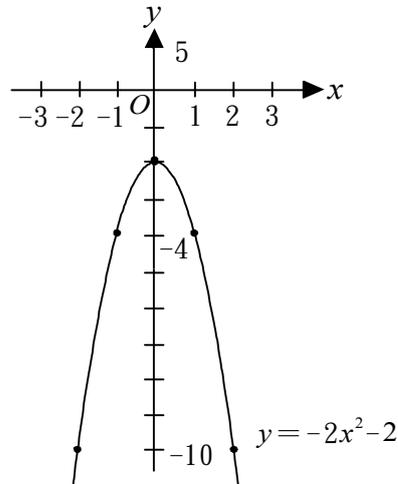
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y = -2x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向上移動兩個單位長，即可以得到 $y = -2x^2 + 2$ 的圖形。

【範例】：描繪 $y = -2x^2 - 2$ 的圖形。

解：

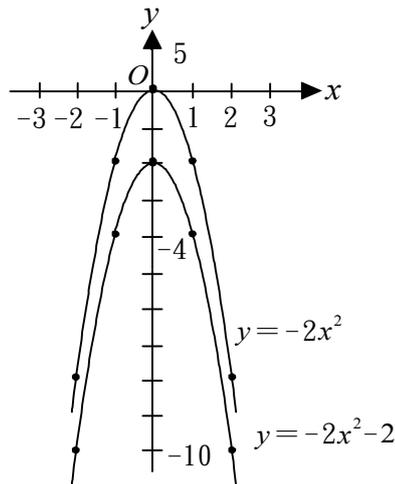
$y = -2x^2 - 2$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在 $(0, -2)$ ，且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。

將對應的函數值列表如下，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	-10	-4	-2	-4	-10

如果我們將 $y = -2x^2$ 及 $y = -2x^2 - 2$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



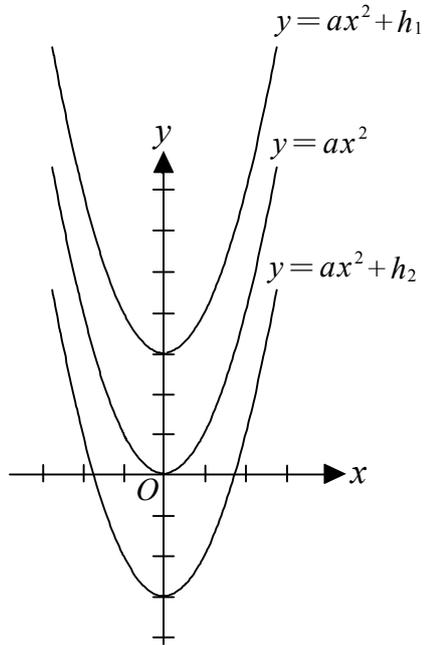
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y = -2x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向下移動兩個單位長，即可以得到 $y = -2x^2 - 2$ 的圖形。

【結論】：若有型如 $y = ax^2 + k$ ：

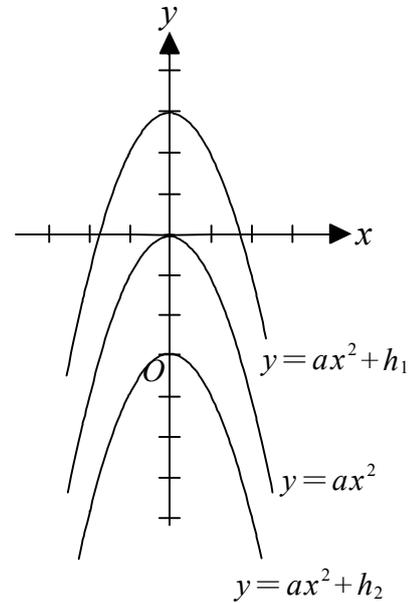
- (1) 當 $k > 0$ ，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向上移動 k 單位長。
- (2) 當 $k < 0$ ，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向下移動 $|k|$ 單位長。

如下圖所示：

當 $a > 0$ 時，



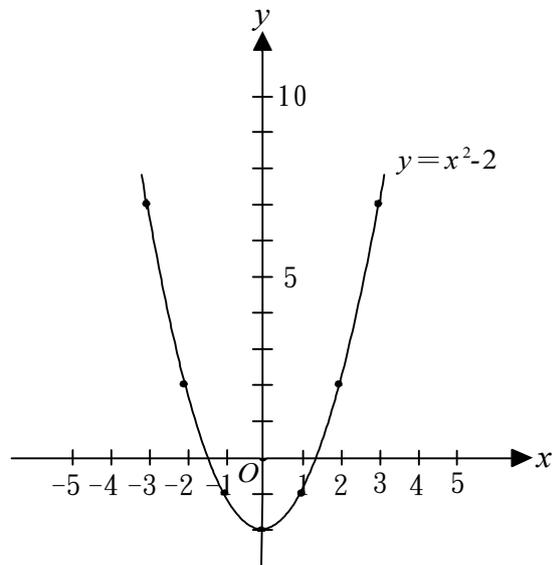
當 $a < 0$ 時，



【練習】：(1) 將 $y = x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向 下 移動 2 個單位長，即可以得到 $y = x^2 - 2$ 的圖形。

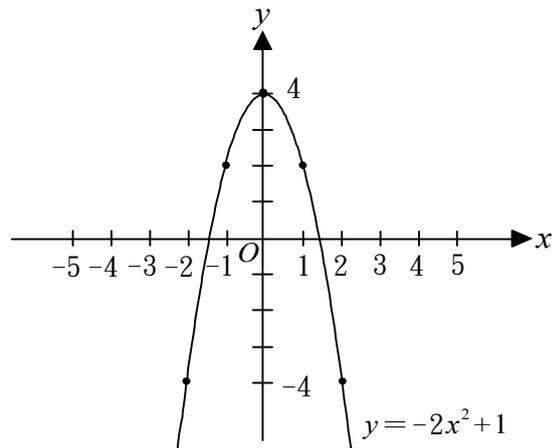
(2) 描繪 $y = x^2 - 2$ 的圖形，並寫出頂點坐標。

解：(2) 頂點： $(0, -2)$ 。



【練習】：描繪 $y = -2x^2 + 4$ 的圖形，並寫出頂點坐標。

解：頂點： $(0, 4)$ 。



2. 圖形的左、右平移：

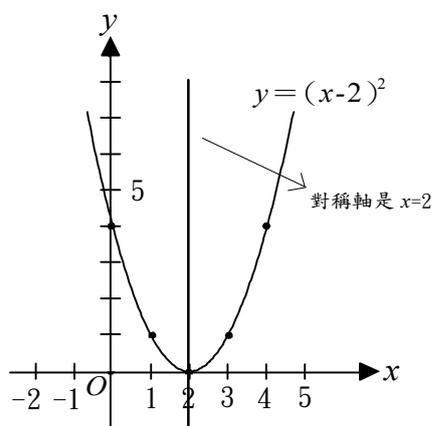
現在我們來畫形如 $y = a(x - h)^2$ 的圖形。

我們知道它的頂點在 $(h, 0)$ 及其對稱軸為直線 $x = h$ 。

【範例】：描繪 $y = (x - 2)^2$ 的圖形。

解： $y = (x - 2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(2, 0)$ ，且以直線 $x = 2$ 為對稱軸。

將函數的對應值列表如上，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



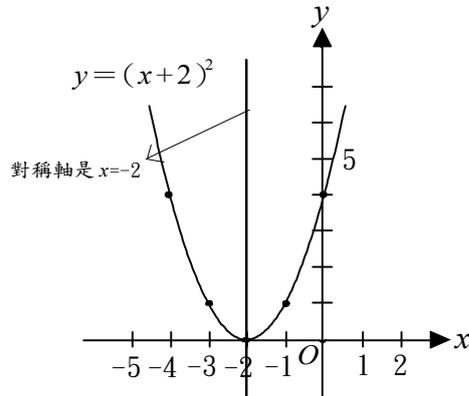
x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

【範例】：描繪 $y = (x + 2)^2$ 的圖形。

解：

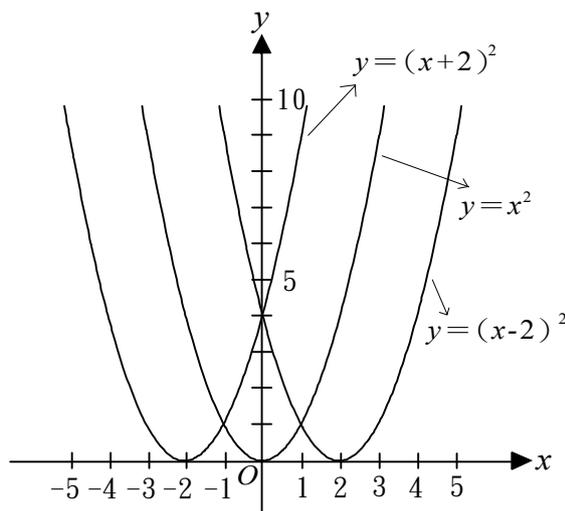
$y = (x + 2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(-2, 0)$ ，且以直線 $x = -2$ 為對稱軸。

將函數的對應值列表如上，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



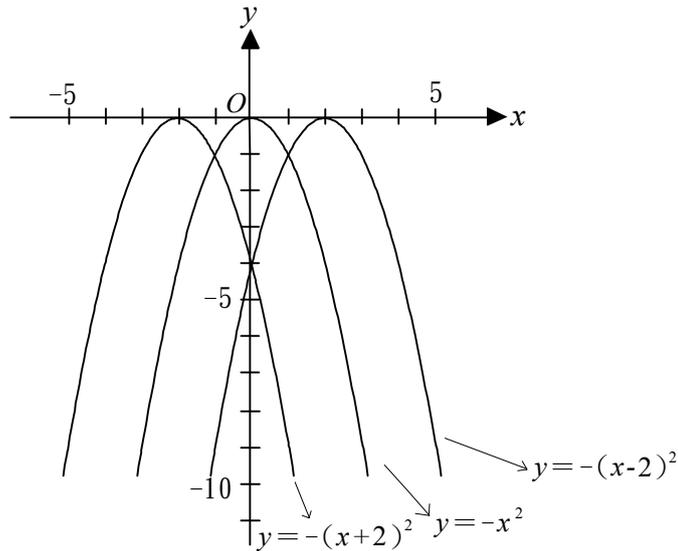
x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	1	0	1	4

【結論】：我們比較 $y = x^2$ 、 $y = (x - 2)^2$ 、 $y = (x + 2)^2$ 圖形之間的異同。



- 由上圖可知：
1. $y = x^2$ 、 $y = (x - 2)^2$ 、 $y = (x + 2)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。
 2. 將 $y = x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向右移動二個單位長，即可得到 $y = (x - 2)^2$ 的圖形。
 3. 將 $y = x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向左移動二個單位長，即可得到 $y = (x + 2)^2$ 的圖形。

【結論】：我們比較 $y = -x^2$ 、 $y = -(x-2)^2$ 、 $y = -(x+2)^2$ 圖形之間的異同。



- 由上圖可知：
1. $y = -x^2$ 、 $y = -(x-2)^2$ 、 $y = -(x+2)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。
 2. 將 $y = -x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向右移動二個單位長，即可得到 $y = -(x-2)^2$ 的圖形。
 3. 將 $y = -x^2$ 的圖形(沿 x 軸)向左移動二個單位長，即可得到 $y = -(x+2)^2$ 的圖形。

我們稱這樣將圖形左右或上下移動的過程為**平移**。

【範例】：利用 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形來描繪 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形。

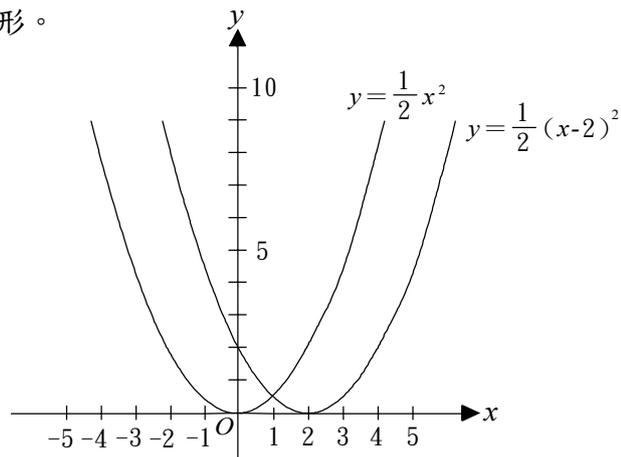
解：

$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(2, 0)$ ，

且以 $x=2$ 為對稱軸。

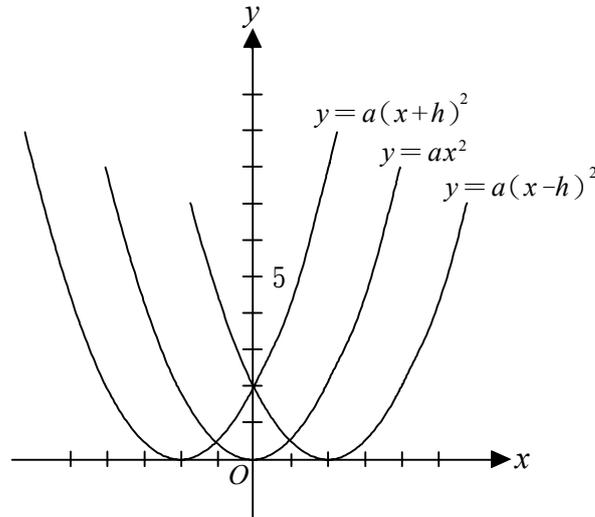
所以，只要將對稱軸為 $x=0$ 的 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形沿 x 軸向右移動二個單位長，

即可到所要的圖形。



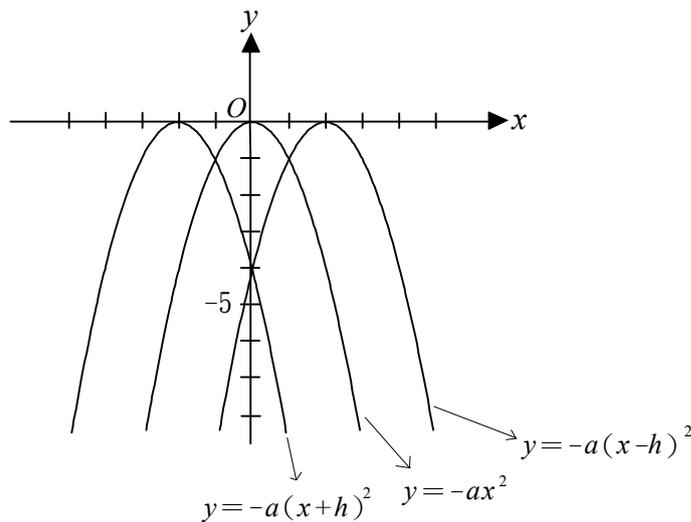
【結論】：若有型如 $y = a(x - h)^2$ ，其圖形開口向上：

- (1) 當 $h > 0$ ，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向右移動 h 單位長。
- (2) 當 $h < 0$ ，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向左移動 $|h|$ 單位長。



若有型如 $y = -a(x - h)^2$ ，其圖形開口向下：

- (1) 當 $h > 0$ ，其圖形即是將 $y = -ax^2$ 的圖形向右移動 h 單位長。
- (2) 當 $h < 0$ ，其圖形即是將 $y = -ax^2$ 的圖形向左移動 $|h|$ 單位長。



【練習】：(1) $y = (x - 1)^2$ 的圖形是將 $y = x^2$ 的圖形(沿 x 軸)

向 右 移動 1 個單位長，即可以得到。

(2) $y = -(x + 4)^2$ 的圖形是將 $y = -x^2$ 的圖形(沿 x 軸)

向 左 移動 4 個單位長，即可以得到。

3. 圖形的平移：

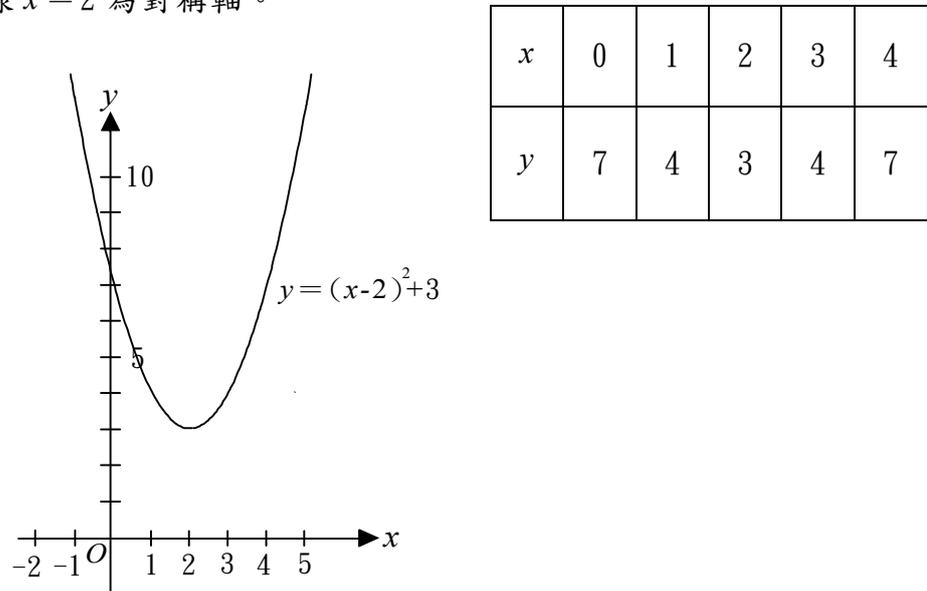
現在我們來畫形如 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形。

我們知道它的頂點在 (h, k) 及其對稱軸為直線 $x = h$ 。

【範例】：描繪 $y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形。

解：

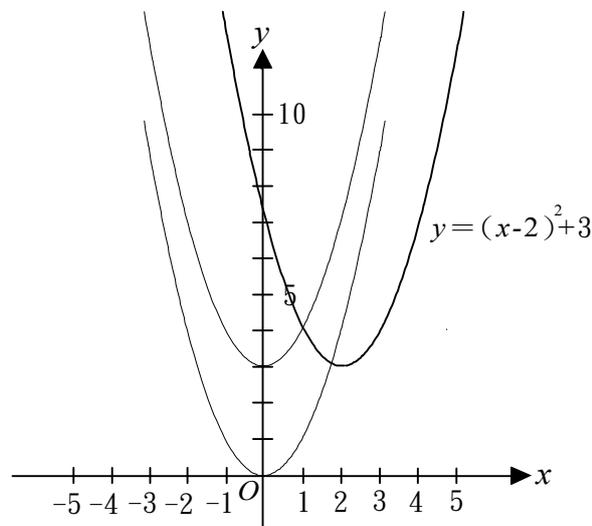
$y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(2, 3)$ ，且以直線 $x = 2$ 為對稱軸。



將 $y = x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移三個單位長，可得 $y = x^2 + 3$ 的圖形，然後再沿 x 軸向右平移二個單位長，即可得到 $y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形。

當然也可將 $y = x^2$ 圖形沿 x 軸向右平移二個單位長，可得 $y = (x - 2)^2$ 的圖形，然後再沿 y 軸向上平移三個單位長，亦得到 $y = (x - 2)^2 + 3$ 的圖形。

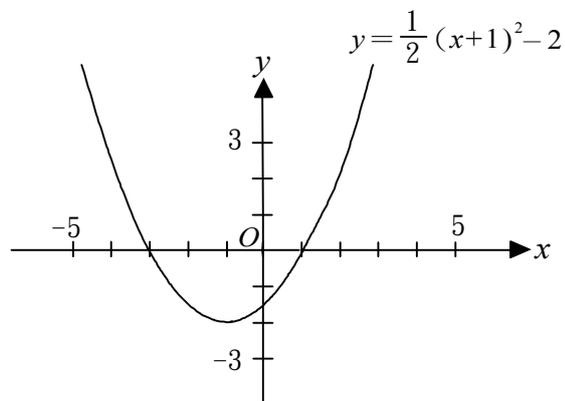
如下頁圖所示。



【範例】：描繪 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ 的圖形。

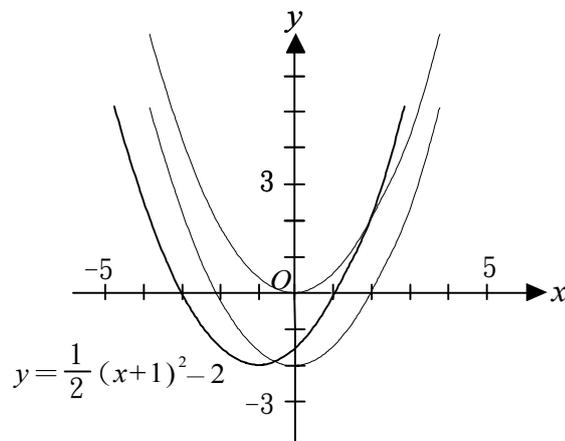
解：

$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(-1, -2)$ ，且以直線 $x = -1$ 為對稱軸。



將 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形沿 y 軸向下平移二個單位長，可得 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ 的圖形。當然也可將 $y = \frac{1}{2}x^2$ 圖形沿 x 軸向左平移一個單位長，可得 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的圖形，然後再沿 y 軸向下平移二個單位長，亦得到 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ 的圖形。

如下頁圖所示。



【結論】：1. 對方程式 $y = a(x-h)^2 + k$ 而言，若 $h > 0$ ， $k > 0$ ，則有下列四種情形：

- (1) 把 $y = ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，得到 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形。
- (2) 把 $y = ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向下平移 k 單位，得到 $y = a(x-h)^2 - k$ 的圖形。
- (3) 把 $y = ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向上平移 k 單位，得到 $y = a(x+h)^2 + k$ 的圖形。
- (4) 把 $y = ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向下平移 k 單位，得到 $y = a(x+h)^2 - k$ 的圖形。

2. 型如 $y = a(x-h)^2 + k$ 之二次函數的探討

- (1) ① $a > 0$ ，代表二次函數圖形的開口向上；
- ② $a < 0$ ，代表二次函數圖形的開口向下；
- ③ a 的絕對值越大，則開口越小；
- ④ a 的絕對值越小，則開口越大；
- (2) (h, k) 代表二次圖形的頂點。
- (3) $x-h=0$ 為二次函數圖形的對稱軸。

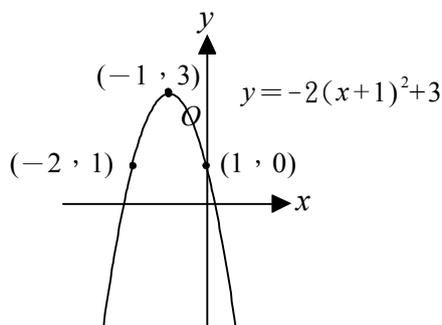
【範例】：描繪 $y = -2x^2 - 4x + 1$ 的圖形。

解：我們先利用配方法將方程式化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式。

$$\begin{aligned} y = -2x^2 - 4x + 1 &\Leftrightarrow y = -2(x^2 + 2x) + 1 \\ &\Leftrightarrow y = -2(x^2 + 2x + 1) + 1 + 2 \\ &\Leftrightarrow y = -2(x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

因此，現在只需描繪出 $y = -2(x+1)^2 + 3$ 的圖形就可以了。

$y = -2(x+1)^2 + 3$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在 $(-1, 3)$ ，且以直線 $x = -1$ 為對稱軸。



將 $y = -2x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移 3 個單位長，可得 $y = -2x^2 + 3$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y = -2(x+1)^2 + 3$ 的圖形。

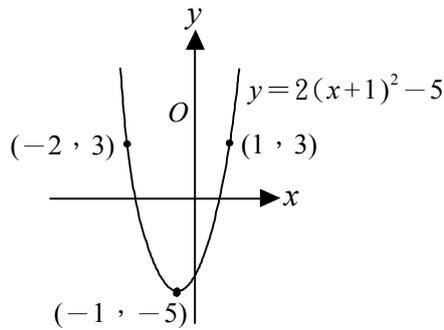
【範例】：描繪 $y = 2x^2 + 4x - 3$ 的圖形。

解：我們先利用配方法將方程式化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\begin{aligned} y = 2x^2 + 4x - 3 &\Leftrightarrow y = 2(x^2 + 2x) - 3 \\ &\Leftrightarrow y = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 - 2 \\ &\Leftrightarrow y = 2(x + 1)^2 - 5 \end{aligned}$$

因此，現在只需描繪出 $y = 2(x + 1)^2 - 5$ 的圖形就可以了。

$y = 2(x + 1)^2 - 5$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在 $(-1, -5)$ ，且以直線 $x = -1$ 為對稱軸。



將 $y = 2x^2$ 的圖形沿 y 軸向下平移 5 個單位長，可得 $y = 2x^2 - 5$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y = 2(x + 1)^2 - 5$ 的圖形。

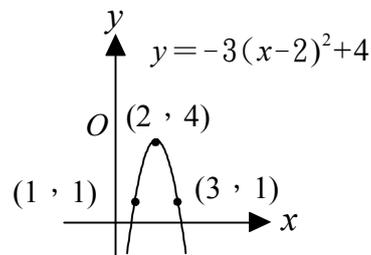
【範例】：描繪 $y = -3x^2 + 12x - 8$ 的圖形。

解：我們先利用配方法將方程式化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\begin{aligned} y = -3x^2 + 12x - 8 &\Leftrightarrow y = -3(x^2 - 4x) - 8 \\ &\Leftrightarrow y = -3(x^2 - 4x + 4) - 8 + 12 \\ &\Leftrightarrow y = -3(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

因此，現在只需描繪出 $y = -3(x - 2)^2 + 4$ 的圖形就可以了。

$y = -3(x - 2)^2 + 4$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在 $(2, 4)$ ，且以直線 $x = 2$ 為對稱軸。



將 $y = -3x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移 4 個單位長，可得 $y = -3x^2 + 4$ 的圖形，然後再沿 x 軸向右平移 2 個單位長，即可得到 $y = -3(x - 2)^2 + 4$ 的圖形。



小 試 身 手

【例題 1】

畫出下列二次函數圖形，並指出頂點及對稱軸：

$$(1) y = (x+1)^2 \quad (2) y = -2(x-2)^2$$

解：

【練習 1】

畫出下列二次函數圖形，並指出頂點及對稱軸：

$$(1) y = (x+1)^2 - 4 \quad (2) y = -2(x-2)^2 + 4$$

解：

【例題 2】

$y = 2x^2 - 12x + 20$ 的圖形，可由函數 $y = 2x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求 $(h, k) = ?$

解：

【例題 3】

$y = 2x^2 - 5x$ 的圖形是由 $y = 2x^2$ 的圖形向 _____ 平移 _____ 個單位長，再向 _____ 平移 _____ 個單位長而得

解：

【例題 4】

一拋物線通過 $(2, 1)$ $(-1, 14)$ 兩點，且圖形經平移後與 $y = x^2$ 重合，求此拋物線的二次函數。

解：

【練習 2】

$y = -2x^2 + 8x - 4$ 的圖形，可由函數 $y = -2x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求 $(h, k) = ?$

解：

【練習 3】

$y = 3x^2 - 8x$ 的圖形是由 $y = 3x^2$ 的圖形向 _____ 平移 _____ 個單位長，再向 _____ 平移 _____ 個單位長而得

解：

【練習 4】

一拋物線通過 $(1, -1)$ $(-5, -13)$ 兩點，且圖形經平移後與 $y = x^2$ 重合，求此拋物線的二次函數。

解：

【例題 5】

$y = 3x^2 - 7x$ 的圖形，可由函數 $y = 3x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向下平移 k 單位而成，試求 $(h, k) = ?$

解：

【例題 6】

有一二次函數圖形的頂點座標為 $(-1, 2)$ 且其圖形通過 $(0, 1)$ ，試求此二次函數。
解：

【例題 7】

設二次函數對稱軸為 $x = 5$ ，且通過 $(1, 2)$ 、 $(0, -7)$ 兩點，求此二次函數為何？
解：

【練習 5】

$y = -4x^2 + 16x$ 的圖形，可由函數 $y = -4x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求 $(h, k) = ?$

解：

【練習 6】

有一二次函數圖形的頂點座標為 $(3, -4)$ 且其圖形通過 $(1, 3)$ ，試求此二次函數。
解：

【練習 7】

設二次函數對稱軸為 $x = -3$ ，且通過 $(1, 33)$ 、 $(-3, 1)$ 兩點，求此二次函數為何？
解：