最大值與最小值

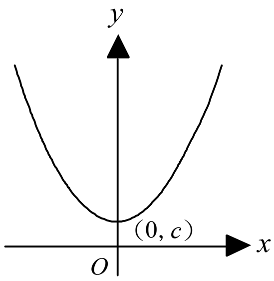
1. $y = ax^2 + c$ 的最大(小)值：

$y = ax^2 + c$，對稱軸為 $x = 0$。

(1) $a > 0$ 時： a. 開口向上；(如圖一)

b. 當 $x = 0$，y 有最小值 c；

c. 頂點為(0，c)，為最低點。

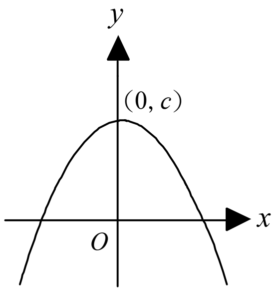


(圖一)

(2) $a < 0$ 時： a. 開口向下；(如圖二)

b. 當 $x = 0$，y 有最大值 c；

c. 頂點為(0，c)，為最高點。



(圖二)

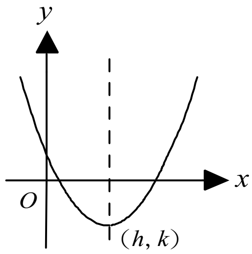
2. $y = a(x-h)^2 + k$ 的最大(小)值：

$y = a(x-h)^2 + k$，對稱軸為 $x - h = 0$。

(1) $a > 0$ 時： a. 開口向上；(如圖三)

b. 當 $x = h$，y 有最小值 k；

c. 頂點為(h，k)，為最低點。

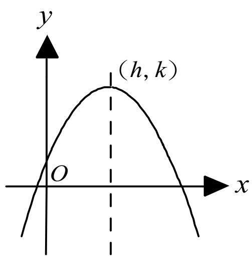


(圖三)

(2) $a < 0$ 時： a. 開口向下；(如圖四)

b. 當 $x = h$，y 有最大值 k；

c. 頂點為(h，k)，為最高點。



(圖四)

3. $y=ax^2+bx+c$ 的最大(小)值：

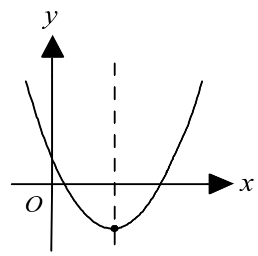
(1) 利用配方法將 $y=ax^2+bx+c$ 推演成 $y=a(x-h)^2+k$ 來找出頂點座標(h,k)，然後即可描繪其圖形，並且得其最大(小)值。

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2\right]+c-a\times(\frac{b}{2a})^2\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\end{aligned}$$

因此可得知 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點座標為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$。

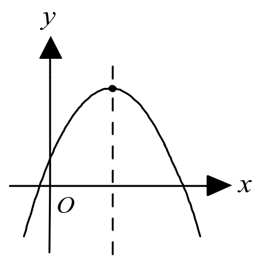
(2) $y=ax^2+bx+c$，對稱軸為 $x+\frac{b}{2a}=0$。

1. $a>0$ 時：
   a. 開口向上；(如圖五)
   b. 當 $x=-\frac{b}{2a}$，y 有最小值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$；
   c. 頂點 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，為最低點。



(圖五)

2. $a<0$ 時：
   a. 開口向下；(如圖六)
   b. 當 $x=-\frac{b}{2a}$，y 有最大值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$；
   c. 頂點 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，為最高點。



(圖六)

【範例】：方程式 $y=2x^2-4x+3$ 是否有最大值或最小值？

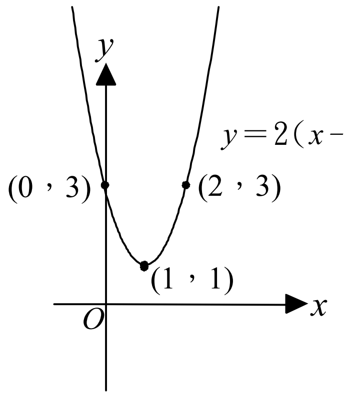
解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$y=2x^2-4x+3 \Leftrightarrow y=2(x^2-2x)+3$$
$$\Leftrightarrow y=2(x^2-2x+1)+3-2$$
$$\Leftrightarrow y=2(x-1)^2+1$$

因此，$y=2(x-1)^2+1$ 的圖形是開口向上的拋物線，有最小值為 $y=1$。

頂點位置在(1，1)，且以直線 $x=1$ 為對稱軸。

圖形如下：



【範例】：方程式 $y=-3x^2+12x-16$ 是否有最大值或最小值？

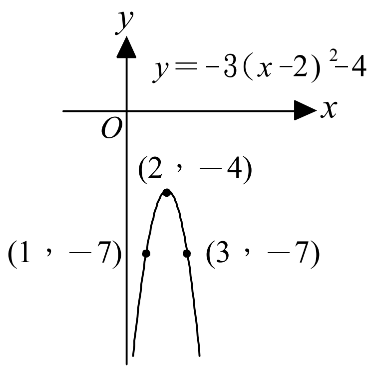
解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$y=-3x^2+12x-16 \Leftrightarrow y=-3(x^2-4x)-16$$
$$\Leftrightarrow y=-3(x^2-4x+4)-16+12$$
$$\Leftrightarrow y=-3(x-2)^2-4$$

因此，$y=-3(x-2)^2-4$ 的圖形是開口向下的拋物線，有最大值為 $y=-4$。

頂點位置在(2，－4)，且以直線 $x=2$ 為對稱軸。

圖形如下：



小 試 身 手

【例題 1】

$y=(x+1)^2-4$：

（1） $x=$____時，y 有最____值為____；

（2） 頂點坐標為________；

（3） 對稱軸為________；

（4） 與 x 軸交點為____________；

（5） 與 y 軸交點為________。

【練習 1】

$y=x^2+2x$：

（1） $x=$____時，y 有最____值為____；

（2） 頂點坐標為________；

（3） 對稱軸為________；

（4） 與 x 軸交點為____________；

（5） 與 y 軸交點為________。

【例題 2】

試由下列各二次函數的圖形，寫出其頂點坐標、對稱軸及 y 的最大或最小值。

（1） $y=2(x-1)^2-4$ （2） $y=-2(x-5)^2+6$

解：

【練習 2】

試由下列各二次函數的圖形，寫出其頂點坐標、對稱軸及 y 的最大或最小值。

(1) $y=2x^2+4x+1$ (2) $y=4-4x-2x^2$

解：

【例題 3】

試求下列之最大值：

(1) $(7-x)(x+1)$ (2) $\dfrac{1}{x^2+(10-x)^2}$

解：

【練習 3】

試求下列之最小值：

（1）$(x+6)(3x+2)$　　（2）$\dfrac{1}{-x^2-(10-x)^2}$

解：

【例題 4】

若 $(a-1):(b+1):(c+2)=1:2:3$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值及 a 值

解：

【練習 4】

若 $(a+1):(b+2):(c+3)=3:4:5$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值及 a 值

解：

【例題 5】

二次函數 $y=-3x^2+ax+b$，當 $x=3$ 時，y 有最大值 4，則 $a+b=$？

解：

【練習 5】

二次函數 $y=-2x^2+ax-b$，當 $x=2$ 時，y 有最大值 12，則 $a-b=$？

解：

【例題 6】

已知 $x+2y=20$，當 $x=$_____，$y=$_____，x^2+y^2 有最小值為_____。

解：

【練習 6】

已知 $x+y=30$，當 $x=$____，$y=$_____，x^2+y^2 有最小值為_____。

解：

【例題 7】

A 、B 為數線上的兩點，它們的坐標分別為 7 、2 ，在此數線上求一點 P 的坐標，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的值為最小且最小為多少？

解：

【練習 7】

A 、B 為數線上的兩點，它們的坐標分別為 6 、-4 ，在此數線上求一點 P 的坐標，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的值為最小且最小為多少？

解：

【例題 8】

一果園中種 20 棵芭樂，每棵平均可生產芭樂 400 個，若在此園中，每加種一棵，則每棵平均生產量減少 8 個，問應加種幾棵，才能使此園的產量達到最大？ 最大產量是多少個芭樂？

解：

【練習 8】

阿呆在柑園裡種 30 棵柑樹，每棵年產 600 個柑橘，若在此園中，每加種 1 棵，則每棵每年少產 10 個，則共種多少棵時，此園年產量達最大？ 最大產量是多少個？

解：

【例題 9】

某商人銷售商品，每件商品的成本 300 元，售價 400 元，每月可售出 500 件。商人估計售價每增加 1 元，銷售量將隨之減少 10 件；而售價每降低 1 元，銷售量將增加 10 件，則

(1)商人應將售價調整為多少元，獲利可最大？

(2)如果商人估計正確，則每月最多可增加獲利多少元？

解：

【練習 9】

瘋子旅行社招攬環島旅行團，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但若增加一人，則每人減收 100 元，問應增加多少人，這個旅行社才能收到最多錢？ 最多共多少錢？

解：