二次函數之討論與應用

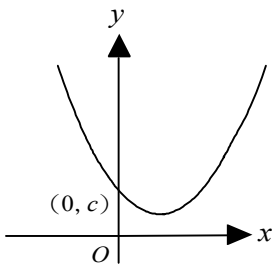
Ⅰ. 二次函數與兩軸交點之討論：

1. 若 $a \neq 0$，$y = ax^2 + bx + c$ 圖形與 y 軸的交點：

$y = ax^2 + bx + c$

令 $x = 0 \Rightarrow y = c$，即與 y 軸交於$(0，c)$，如圖一。

令 $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a}$



（圖一）

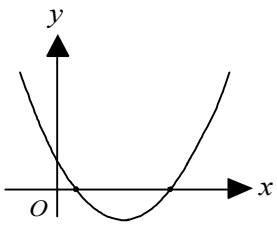
2. 若 $y = 0$ 且 $a \neq 0$，$y = ax^2 + bx + c$ 圖形與 x 軸的交點：

(1) 當判別式 $b^2 - 4ac > 0$：

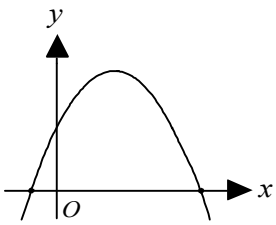
a. 方程式根為兩相異實根，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a}$。

b. 圖與 x 軸的交點為相異兩交點。

c. $a > 0$（開口向上，如圖二）；$a < 0$（開口向下，如圖三）。



（圖二）



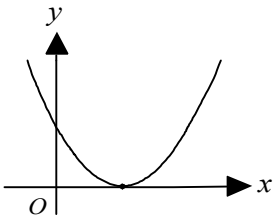
（圖三）

(2) 當判別式 $b^2 - 4ac = 0$：

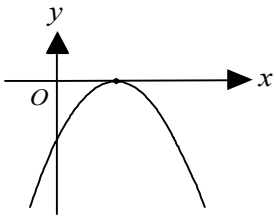
a. 方程式根為兩相等實根，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$。

b. 圖與 x 軸的交點為相切(一交點)。

c. $a > 0$（開口向上，如圖四）；$a < 0$（開口向下，如圖五）。



（圖四）



（圖五）

3. 已知三點坐標，求過三點的二次函數，將三點坐標代入 $y=ax^2+bx+c$ 。

【範例】：已知某二次函數其圖形通過 $A(1，8)$、$B(-2，2)$、$C(0，4)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(1，8)$、$B(-2，2)$、$C(0，4)$三點代入方程式中得

$$\begin{cases} 8=a+b+c \\ 2=4a-2b+c \\ 4=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=x^2+3x+4$ 。

【範例】：已知三點座標為 $A(-1，2)$、$B(0，-4)$、$C(-2，4)$，求過此三點的二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(-1，2)$、$B(0，-4)$、$C(-2，4)$三點代入方程式中得：

$$\begin{cases} 2=a-b+c \\ -4=c \\ 4=4a-2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-8 \\ c=-4 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=-2x^2-8x-4$ 。

【練習】：已知某二次函數之對稱軸 $x=3$，且其圖形通過 $A(3，2)$、$B(5，6)$兩點，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x-3)^2+k$

將 A 、B 兩點代入方程式中得 $\begin{cases} 2=0+k \\ 6=4a+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \end{cases}$

所以，此二次函數為 $y=(x-3)^2+2$ 。

【練習】：已知某二次函數之頂點為$(-2，-6)$，且其圖形通過 $A(-5，0)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x+2)^2-6$

將 $A(-5，0)$代入方程式中得 $0=a(-5+2)^2-6 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

所以，此二次函數為 $y=\frac{2}{3}(x+2)^2-6$ 。

【練習】：已知某二次函數其圖形通過 $A(1，0)$、$B(-1，-4)$、$C(4，-39)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(1，0)$、$B(-1，-4)$、$C(4，-39)$三點代入方程式中得

$$\begin{cases} 0=a+b+c \\ -4=a-b+c \\ -39=16a+4b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=-3x^2+2x+1$。

Ⅲ. <u>圖形的應用</u>：有時，在實際狀況中我們也可能用到二次函數的最大值與最小值，由以下的範例更可了解二次函數在日常生活的重要性。

【範例】：某人想用一條 100 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何才能圍出最大面積的停車場？並求出此面積。

解：

設停車場的某一邊長為 x 公尺，因此另一邊長為$(50-x)$公尺。

我們並以 y 平方公尺來表示此停車場的面積。

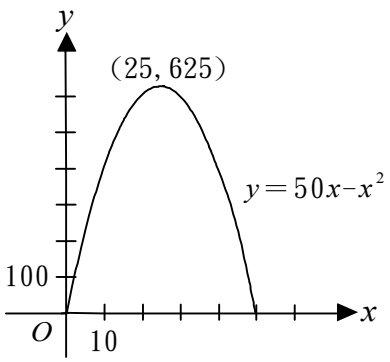
依題意可列式：
$$\begin{aligned} y &= x(50-x) \\ &= 50x-x^2 \\ &= -(x-25)^2+625 \end{aligned}$$

因為停車場的邊長必為正數，所以 $x>0$ 且 $50-x>0$，

即 x 值範圍為 $0<x<50$。

由上可知 當 $x=25$ 時，停車場面積可為成最大的 625 平方公尺

即當此停車場為正方形時，所圍成的面積最大，且其值為 625 平方公尺，並從圖形我們得知 y 值的範圍為 $0<y\leq 625$。



【範例】：如何把 30 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

解：設某一數為 x，因此另一數為 $(30-x)$。

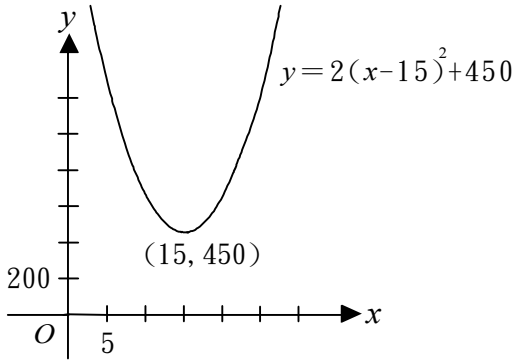
我們並以 y 來表示這兩數的平方和。

依題意可列式：

$$\begin{aligned} y &= x^2+(30-x)^2 \\ &= x^2+900-60x+x^2 \\ &= 2(x-15)^2+450 \end{aligned}$$

由上可知，當一數為 15 而另一數亦為 15 時，

使得這兩數的平方和有最小值為 450。



小 試 身 手

【例題 1】

二次函數 $y=x^2+2x-3$ 的圖形交 x 軸於 A 、B 兩點，交 y 軸於 C 點，求 ΔABC 的面積為多少？

解：

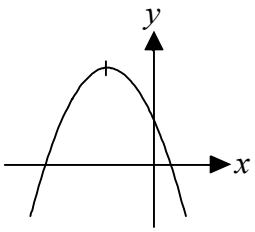
【練習 1】

二次函數 $y=-x^2-2x+15$ 的頂點為 A，此函數的圖形與 x 軸交於 B 、C ，求 ΔABC 的面積為多少？

解：

【例題 2】

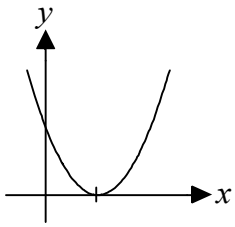
若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下圖所示，請分別判別 a 、b 、c 及 b^2-4ac 的正、負。



解：Θ

【練習 2】

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下圖所示，請分別判別 a 、b 、c 及 b^2-4ac 的正、負。



解：Θ

【例題 3】

若二次函數 $y=-2x^2+6x+k$ 的圖形與 x 軸交於兩點，求 k 的範圍為何？

解：

【練習 3】

若二次函數 $y=(m+1)x^2-4x-1$ 的圖形與 x 軸不相交，求 m 的範圍為何？

解：

【例題 4】

$y=ax^2+bx+1$ 的圖形之最高點坐標為 (−1，2)，則 $a+b=$？

解：

【練習 4】

$y=ax^2+bx+2$ 的圖形之最高點坐標為 (−1，1)，則 $a-b=$？

解：

【例題 5】

設二次函數通過(0，3)、(1，4)、(2，3)三點，求此二次函數。

解：

【練習 5】

設二次函數通過(0，8)、(1，12)、(−1，6)三點，求此二次函數。

解：

【例題 6】

已知某二次函數之對稱軸為 $x+3=0$，且其圖形通過 $A(-2，5)$、$B(1，35)$，求此二次函數為何？

解：

【練習 6】

已知某二次函數之對稱軸為 $x-2=0$，且其圖形通過 $A(3，4)$、$B(-1，-4)$，求此二次函數為何？

解：

【例題 7】

已知某二次函數之頂點為(1，1)，且其圖形通過 $A(3，5)$，則此二次函數為何？

解：

【練習 7】

已知某二次函數之頂點為(3，-4)，且其圖形通過 $A(2，-2)$，則此二次函數為何？

解：

家庭作業 第一回

一. 選擇題：

(　　)1. 下列那一個二次函數圖形的圖形開口最小：
(A) $y=-x^2$　(B) $y=-3x^2$　(C) $y=2x^2$　(D) $y=x^2$ 。

(　　)2. 函數 $y=2x^2-3$ 的頂點座標為：
(A) (0, 0)　(B) (0, 3)　(C) (0, -3)　(D) (-3, 0) 。

(　　)3. 把 $y=x^2$ 的圖形向下移動 5 單位長，就可得到新圖形的函數為
(A) $y=5x^2$　(B) $y=-5x^2$　(C) $y=x^2+5$　(D) $y=x^2-5$ 。

(　　)4. 函數 $y=x^2+2x+2$ 可化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，則 $a+h+k=$
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3 。

(　　)5. $y=2x^2-12x+19$ 之圖形的對稱軸方程式為
(A) $x=3$　(B) $x=-3$　(C) x 軸　(D) y 軸 。

(　　)6. 若二次函數 $y=a(x-3)^2+b$ 有最小值 -1，則
(A) $a>b$　(B) $a=b$　(C) $a<b$　(D) a、b 無法比較 。

(　　)7. 設 x 是任意數且 $2x^2-4x+y-4=0$，則下列何數不可能是 y 值？
(A)4　(B) 5　(C) 6　(D) 7 。

(　　)8. 設二次函數的圖形通過(0，2)和(1，4)且 y 軸是對稱軸，則此二次函數為
(A) 最大值 1　(B) 最大值 2　(C) 最小值 1　(D) 最小值 2 。

(　　)9. 在直角座標平面上將二次函數 $y=2(x+1)^2-2$ 的圖形向右移動 3 單位長，再向下移動 1 個單位長，則其最低點為
(A) (2，-3)　(B) (-2，3)　(C) (2，3)　(D) (3，2) 。

(　　)10. 若二次函數 $y=-2(x-3)^2+4$，則下列何者正確？
(A) y 的最大值是 3　(B) y 的最小值是 3
(C) y 的最大值是 4　(D) y 的最小值是 4 。

二. 填充題：

1. 若二次函數 $y=ax^2+4ax-2a^2$ 有最大值 -6，則 $a=$_____。

2. 若 $1\le x\le 6$，$y=2x^2-8x+6$ 的最大值為 M，最小值為 m，
則 $M+m=$_____。

3. 設 $a:b=1:3$，$b:c=3:4$，則 $ab-bc+2ac+4b$ 的最大值為_____。

4. 若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形有最高點，其位置在 y 軸的左方，
則點(a，b)在第_____象限。

5. 若 $y=\dfrac{40}{x^2-4x+k}$ 有最大值 4，則 k 值為_____。

6. 有一出租公寓有 70 間套房，每月租金 3000 元可全部租出，若每
間房間每增加 50 元，則平均有一間未租出去，則：
(1) 設公寓套房有 x 間未租出去時，總收入為 y 元，則 x 與 y 的關
係式為_____。
(2) 欲使總收入達到最高時，房間將有_____間未租出。
(3) 承(2)，每個房間的租金為_____元。

7. 座標平面上 $y=-2x^2$ 的圖形向右平移 3 個單位長，就得到_____的圖形，再向下平移 5 個單位長，就得到_____的圖形。(寫出二次函數）。

三. 計算題

1. 在座標平面上描繪下列二次函數的圖形

（1） $y=2x^2-3$　　（2） $y=x^2+2x-3$ 。

解:

2. 求下列二次函數的頂點座標及最大值或最小值：

（1） $y=-2(x-1)^2-5$　　（2） $y=2x^2+4x-1$ 。

解:

3. 將 $x^2-34x+288=0$ 化成 $(x+a)^2=p$，求 $a+p$ 之值。

解:

4. 若 7 和 -4 為一元二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 的兩根，求 $b+c=$？

解:

5. 一拋物線通過 A(0，3)、B(3，27)兩點，且圖形經平移後與 $y=2x^2$ 重合，求此拋物線的二次函數。

解:

6. 已知某二次函數其圖形通過 A(-1，0)、B(4，0)、C(8，2)三點，求此二次函數為何？

解:

7. 一果園中種了 25 顆橘樹，每棵平均可生產橘子 450 個；若在此園中每加種一棵則每棵平均生產量減少 10 個。問應加種幾棵才能使此園的產量達到最大？最大產量是多少？

解:

8. 已知 A、B、P 為數線上的三點，它們的坐標分別為 2，-3，x，設 $4\overline{PA}^2-\overline{PB}^2$ 的值為 y。

解:

9. 在高出海平面 40 公尺的岩石上，向海面上空拋出一石子，且看錶計時，已知高度 y 公尺為時間 x 秒之二次函數其關係如下：$y=f(x)=-2x^2+16x+40$，請問：

(1) 此石子擲出經幾秒後，可達最高高度？又最高高度為多少公尺？

(2) 石子從擲出到落海前，在空中停留幾秒？

解: