

# 數 與 數 線

## ■ 正數、負數與數線

### 相對的量：

由於人為的標準使兩個數量本身具有相反的涵義，則這兩個數量就稱為相對的量。

**【範例】**：若我們以目前所在的位置當基準點，就產生左與右、東與西、南與北、前與後、上與下這些相反的觀念，若有數值即成相對的量。

### 正負數的意義：

負數的產生，其實是因有相對的量產生而由人為賦予的意義，我們都將比基準點 0 高、大或增加的當正數，所以正數大於 0，用「+」表示，讀作「正」，而「+」常可省略；比基準點 0 低、小、或減少的當負數，所以負數小於 0，用「-」表示，讀作「負」。

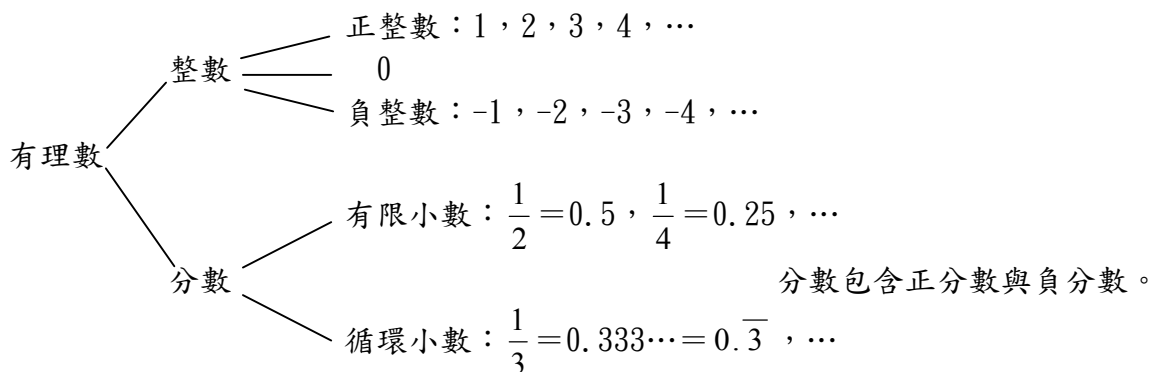
**【範例】**：如我們把溫度比 0°C 高的當正，如零上 5 度用 +5°C 表示，只用 5°C 表示即可，把比 0°C 低的當負，如零下 3 度用 -3°C 表示。

### 數的概念：

1. 正、負整數：因相對的量產生「正」與「負」，我們將 1、2、3、4、5... 這些稱正整數，又稱自然數；將 -1、-2、-3、-4、...，稱為負整數；而整數為正整數、負整數與 0 的合稱。

注意：0 是整數但不屬於正整數也不屬於負整數，亦即 0 沒有正負的性質。

2. 有理數：包含整數及可以用分數形式表示的小數，亦即一個數如果能以分數形式表示，就稱為有理數。反之，不可用分數形式表示的數，稱為無理數。



**【範例】**：無理數： $\pi$ 、 $e$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、……等等。

有理數： $-1$ 、 $0$ 、 $0.\bar{1}$ 、 $1$ 、 $\frac{1}{3}$ 、……等等。

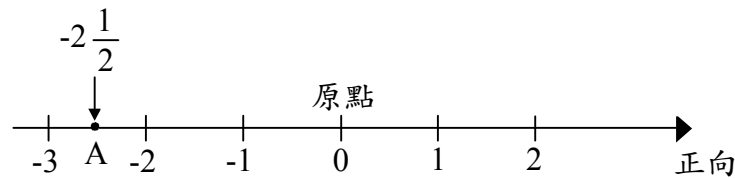
**數線：**

我們希望將所有的數，設法以圖像的形式表示。我們所採用的方式為數線。  
數線的構成三要素：原點、方向、單位長。

**數線的作法：**

1. 首先畫一直線，在線上任取一點作為「原點」，標示為 0。
2. 習慣上右邊的方向為此數線的「正向」，並標上箭頭表示。
3. 在數線上由原點依「相同的間隔」，依序向右標示 1, 2, 3, 4, …等，向左標示 -1, -2, -3, -4, …等，此「相同的間隔」即為單位長。

圖示如下：



4. 數線上每一個點所代表之數，稱為該點的坐標。

【範例】：上圖中，A 點所代表的數為  $-2\frac{1}{2}$ ，則 A 點坐標，記為  $A(-2\frac{1}{2})$ 。

在數線上，原點右邊的每一個點都對應到一個數，稱為正數；而原點左邊的每一點都對應到一個數，稱為負數。

【範例】：3 可以用「+3」來表示，表示它在原點右邊 3 個單位長的距離之處。

【範例】：「-4」，表示它在原點左邊 4 個單位長的距離之處。

【範例】：在數線上，越往右的數越大、越往左的數越小。

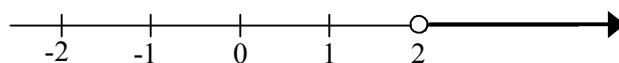
例如：  $-4 < 0 < 3$  ；  $-9 < -8 < -7$  ；  $5 < 7 < 9$ 。

注意：無論原點右邊的數是整數、小數、分數，都叫正數，其中正整數又叫做自然數，而原點左邊的整數、小數、分數都叫負數。

**在數線上可以用圖來表示數的範圍：**

如果我們要表示某些數的範圍的時候，也可以用數線來表示，例如當我們想表示大於 -2，小於 3 的時候，應該如何表示呢？

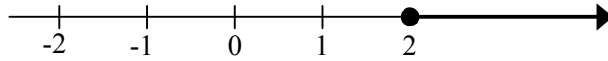
【範例】：所有大於 2 不等於 2 的數，記為  $x > 2$  或  $(2, \infty)$ 。



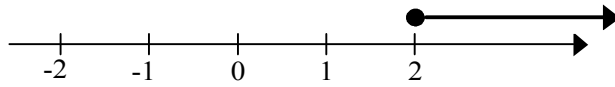
也可以表示如下圖：



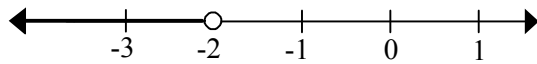
**【範例】**：所有大於 2 或等於 2 的數，記為  $x \geq 2$  或  $[2, \infty)$ 。



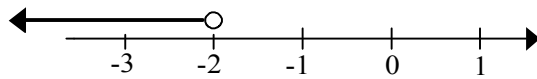
也可以用下圖表示：



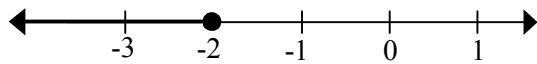
**【範例】**：所有小於 -2 不等於 -2 的數，記為  $x < -2$  或  $(-\infty, -2)$ 。



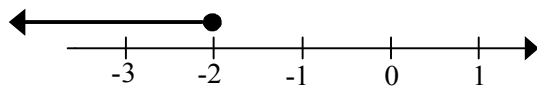
也可以用下圖表示：



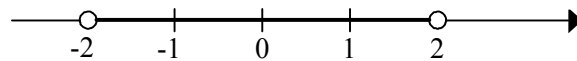
**【範例】**：所有小於 -2 或等於 -2 的數，記為  $x \leq -2$  或  $(-\infty, -2]$ 。



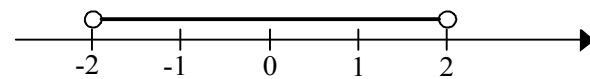
也可以用下圖表示：



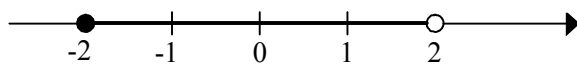
**【範例】**：所有大於 -2 且小於 2 的數，記為  $-2 < x < 2$  或  $(-2, 2)$ 。



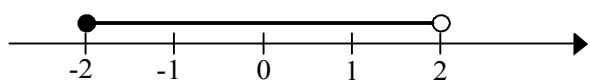
也可以表示如下圖：



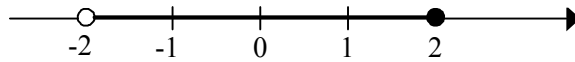
**【範例】**：所有大於等於 -2 且小於 2 的數，記為  $-2 \leq x < 2$  或  $[-2, 2)$ 。



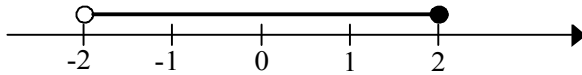
也可以用下圖表示：



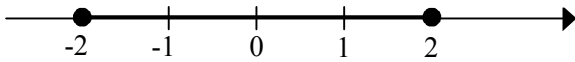
**【範例】**：所有大於-2且小於等於2的數，記為 $-2 < x \leq 2$ 或 $(-2, 2]$ 。



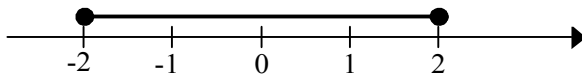
也可以用下圖表示：



**【範例】**：所有大於等於-2且小於等於2的數，記為 $-2 \leq x \leq 2$ 或 $[-2, 2]$ 。



也可以用下圖表示：



**注意**：在上面的幾個範例中，等於2的點以實心的黑圈表示，不等於2的點以空心的白圈表示。

其中， $-2 \leq x < 2$ 也可以簡記為 $[-2, 2)$ ，中括號“[”代表等於的點；小括號“)”代表不等於的點。

**相反數：**

在數線上除原點外，與原點距離相等，但方向相反的兩個點所代表的數，互為相反數。

**【範例】**：2的相反數為-2， $-\frac{1}{3}$ 的相反數為 $\frac{1}{3}$ 。

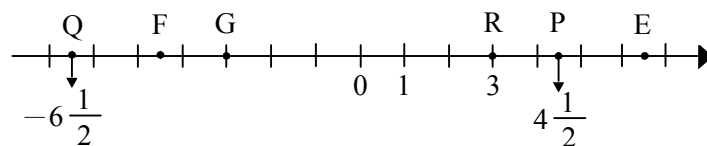
**注意**：0的相反數為0，兩相反數的和必為0。

**對稱點的意義：**

在數線上給某一點，我們問此對稱點，則表示對稱於原點的點。此兩點的座標值互為相反數。

**【範例】**：下圖中，E、F、G三點中任一點是P、Q、R三點中某一點的對稱點。

試由圖中，試判斷P、Q、R各點的對稱點是哪一點，並求出座標。



**解**：R(3)的對稱點是G(-3)； $Q(-6\frac{1}{2})$ 的對稱點是 $G(6\frac{1}{2})$ ；

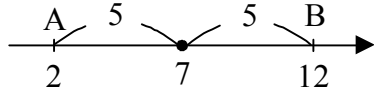
$P(4\frac{1}{2})$ 的對稱點是 $G(-4\frac{1}{2})$ 。

**對稱中點座標公式：**

在數線上任意兩點  $A(a)$  和  $B(b)$ ，則線段  $AB$  的對稱中點座標為  $C$ ，則  $C$  的座標為： $(\frac{a+b}{2})$ 。在此  $|\overline{AC}| = |\overline{CB}|$

**【範例】：**數線上有  $A(2)$  和  $B(12)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為： $\frac{2+12}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 。

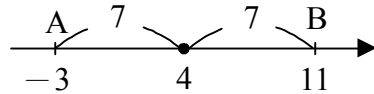


在此  $|7-2| = |2-7| = 5$ 、 $|12-7| = |7-12| = 5$

$7+5=12$ 、 $7-5=2$

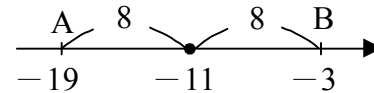
**【範例】：**數線上有  $A(-3)$  和  $B(11)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為： $\frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4$ 。



**【範例】：**數線上有  $A(-3)$  和  $B(-19)$  兩點，請求出  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為何？

解：  $A$ 、 $B$  兩點的對稱中點座標為： $\frac{-3+(-19)}{2} = \frac{-22}{2} = -11$ 。



**【範例】：**已知  $|a-6| = 3$ ，求  $a = ?$

解：若在數線上  $A(a)$  和  $B(6)$ ，則  $\overline{AB}$  的距離為  $|a-6|$

$\therefore |a-6| = 3$

$\therefore A$ 、 $B$  兩點的距離為 3

若  $A(a)$  在數線上  $B(6)$  的左邊，則  $a=6-3=3$

若  $A(a)$  在數線上  $B(6)$  的右邊，則  $a=6+3=9$

**【範例】：**已知  $|a-1| = 3$ ，求  $a = ?$

解：若在數線上  $A(a)$  和  $B(1)$  則  $\overline{AB}$  的距離為  $|a-1|$

$\therefore |a-1| = 3$

$\therefore A$ 、 $B$  兩點的距離為 3

若  $A(a)$  在數線上  $B(1)$  的左邊，則  $a=1-3=-2$

若  $A(a)$  在數線上  $B(1)$  的右邊，則  $a=1+3=4$



## 小 試 身 手

### 【例題 1】

方向南與北是相對的，若往北走 20 公尺記作  $-20$ ，則往南走 80 公尺可記作 80 或 +80 公尺。

### 【例題 3】

- (1) 比 0 小 18 的數記為  $-18$ 。
- (2) 比 0 小 9.5 的數記為  $-9.5$ 。
- (3) 比 0 小  $1\frac{2}{3}$  的數記為  $-1\frac{2}{3}$ 。
- (4)  $-\frac{3}{4}$  是比 0 小  $\frac{3}{4}$  的數。

### 【例題 5】

若身高以 155 公分為準，甲身高為 159 公分，比 155 多 4 公分，記為  $+4$ ，則：

- (1) 乙身高 144 公分，記為  $-11$ 。
- (2) 丙身高 157 公分，記為  $+2$ 。
- (3) 甲乙丙 3 人的平均身高  $153\frac{1}{3}$  公分，可記為  $-1\frac{2}{3}$ 。
- (4) 若加入丁後四人平均身高記為  $-1$ ，則丁的身高 156 公分，記為  $+1$ 。

### 【例題 7】

在數線上有 A、B 兩點，分別表示  $-33$ 、 $12$ ，將 A 到 B 之間分割成九段相等長度，中間產生八個等分點，求：

- (1) A 到 B 的長度為多少？
- (2) 八個等分點中最左邊的點代表的數為何？

解：(1)  $12 - (-33) = 45$

$$(2) \because 45 \div 9 = 5$$

$$\therefore -33 + 5 = -28$$

### 【例題 2】

中午 12 點為準，上午 10 點以  $-4$  表示，則下午 3 點用 6 或 +6 表示。

### 【例題 4】

判斷各小題中的兩數是同號數或異號數：

- (1)  $+5$  和  $+1.3$  為 同號數。
- (2)  $-5$  和  $+4$  為 異號數。
- (3)  $+\frac{1}{3}$  和  $-2.5$  為 異號數。
- (4)  $-3.5$  和  $-7\frac{1}{4}$  為 同號數。

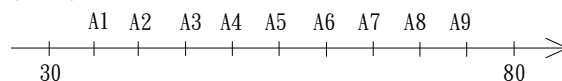
### 【例題 6】

若以體重 60 公斤為準，甲體重 55 公斤，記為  $-5$ ，則：

- (1) 乙體重 52 公斤，記為  $-8$ 。
- (2) 丙體重 63 公斤，記為  $+3$ 。
- (3) 甲乙丙丁 4 人平均體重 59 公斤，記為  $-1$ 。
- (4) 求出丁的體重 66 公斤，記為  $+6$ 。

### 【例題 8】

在數線上將 30、80 之間分成 10 等分，如下圖，求：



- (1)  $A_3$  表示的數為 45。
- (2)  $A_8$  表示的數為 70。
- (3)  $A_3$  到  $A_8$  的距離為 25。

**【例題 9】**

回答下列有關相反數的問題：

- (1)  $-8$  的相反數為 8。
- (2)  $0$  的相反數為 0。
- (3)  $a$  的相反數為  $5$ ，則  $a = \underline{-5}$ 。
- (4)  $a$  的相反數為  $b$ ，則  $a - b = \underline{2a}$ 。

**【例題 11】**

數線上有兩點  $-22$  與  $8$ ，同時往右移動7單位長後，恰巧變成相反數。

**【例題 13】**

求下列各小題：

- (1) 數線上距離原點  $17$  單位的數有 17 和 -17。
- (2) 數線上絕對值小於  $7$  的整數有哪些？
- (3) 若  $|a| = 6$ ，求  $a = \underline{6}$  或 -6。

**【例題 15】**

設兩點座標為  $A(2, -4)$ 、 $B(8, 2)$ ，  
請問  $A$ 、 $B$  的中點座標為  $(5, -1)$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{利用中點公式，} M &= \left( \frac{2+8}{2}, \frac{-4+2}{2} \right) \\ &= (5, -1)。 \end{aligned}$$

所以  $A$ 、 $B$  的中點座標為  $(5, -1)$ 。

**【例題 10】**

回答下列有關相反數的問題：

- (1)  $11\frac{3}{5}$  的相反數為  $-11\frac{3}{5}$ 。
- (2)  $a = \frac{17}{21}$ ，若  $b$  為  $a$  的相反數，則  $a - b = \underline{-\frac{34}{21}}$ 。

**【例題 12】**

數線上有兩點  $-14.4$  與  $12.6$ ，同時往右移動0.9單位長後，恰巧變成相反數。

**【例題 14】**

求下列各小題：

- (1) 絕對值為  $6.2$  的整數有 6.2 和 -6.2。
- (2) 數線上絕對值小於  $15$  的整數有 29 個。
- (3) 若  $|a| = 10$ ，求  $a = \underline{10}$  或 -10。

**【例題 16】**

設兩點座標為  $A(0, -10)$ 、 $B(-8, 2)$ ，  
請問  $A$ 、 $B$  的中點座標為  $(-4, -4)$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{利用中點公式，} M &= \left( \frac{0+(-8)}{2}, \frac{-10+2}{2} \right) \\ &= (-4, -4)。 \end{aligned}$$

所以  $A$ 、 $B$  的中點座標為  $(-4, -4)$ 。

**【例題 17】**

在一數線上有 A(-2)、B(-7)、C(5)、D(-6)、E(3) 五點，請問原點落在哪兩點之間？

解：A、E 兩點之間。

**【例題 19】**

在下列  $8$ 、 $-\frac{1}{3}$ 、 $4.5$ 、 $-7$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $-1$  等六個數中，問：

- (1) 請將上面六個數作成一條數線。
- (2) 最大數是 8；最小數是 -7。
- (3) 負數中最大的數是  $-\frac{1}{3}$ 。
- (4) 負數中最小的數是 -7。
- (5) 何數最接近 0？ 答： $-\frac{1}{3}$ 。

**【例題 18】**

在一數線上有 A(-1)、B( $-\frac{3}{5}$ )、C( $2\frac{1}{3}$ )、

D(-5)、E(1) 五點，請問原點落在哪兩點之間？

解：A、E 兩點之間。

**【例題 20】**

在下列  $-5$ 、 $-3\frac{1}{3}$ 、 $4.5$ 、 $-2.5$ 、 $4\frac{1}{2}$ 、 $-0.5$  等五個數中，問：

- (1) 請將上面五個數作成一條數線。
- (2) 最大數是  $4.5$ 、 $4\frac{1}{2}$ ；最小數是 -5。
- (3) 負數中最大的數是 -0.5。
- (4) 負數中最小的數是 -5。
- (5) 何數最接近 0？ 答：-0.5。