因數與倍數

一、因數、倍數與質數

因數與倍數：

若 c＝a × b，且 a、b、c 是非零整數，則 a、b 是 c 的因數，c 是 a、b 的倍數。

【**範例**】：已知 18＝3×6，則 3 和 6 是 18 的因數，18 是 3 和 6 的倍數。

重點整理：

1. 整數 1 是任何整數的因數，任何整數都是 1 的倍數。
2. 任何一個大於 1 的整數至少有 1 和本身兩個因數。其中正因數最小是 1，最大是本身。
3. 任何一個非 0 整數只有有限個因數，但有無限多個倍數。

質數：

一個大於 1 的整數，如果只有 1 和本身兩個正因數，就再也沒有其他正因數，則稱這個數為質數。

【**範例**】：2、3、5、7、11、13、17、19…等等都是質數，而最小的質數是 2。

質數	2	3		5		7				11	
合數			4		6		8	9	10		12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

合數：

一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的正因數，則稱這個數為合數。

【**範例**】：4、6、9、10、15、21、24…等等都是合數。

※注意：所有大於 1 的正整數，不是質數就是合數，唯有 1 既不是質數也不是合數

因數與倍數的應用：

【**範例**】：請問面積為 64cm^2 的長方形中，則長和寬應該各為多少 cm，其中長比寬大，請將排列方法填入下表中。

解：因為面積＝長×寬，因此將 64 做分解成長×寬，且長比寬大，

所以可以得到：

64＝ 64 × 1 ＝ 32 × 2 ＝ 16 × 4 ＝ 8 × 8 （在此 8 × 8 不合）

面積（cm^2）	長（cm）	寬（cm）
64	64	1
64	32	2
64	16	4
64	8	8

【**範例**】：小娟想用 60 塊邊長為 1 的正方形紙板，緊密地拼成面積為 60 的長方形，則此長方形的周長最小可為多少？

解：因為長方形面積＝長×寬，因此將 60 做分解成長×寬的形式，且長要比寬大，

所以可以得到：

60＝ 60 × 1 ＝ 30 × 2 ＝ 20 × 3 ＝ 15 × 4 ＝ 12 × 5 ＝ 10 × 6

面積（cm^2）	長（cm）	寬（cm）	周長（cm）
60	60	1	2×(60+1)=122
60	30	2	2×(30+2)=64
60	20	3	2×(20+3)=46
60	15	4	2×(15+4)=38
60	12	5	2×(12+5)=34
60	10	6	2×(10+6)=32

由表中可得當此長方形的長、寬為 10 跟 6 時，所得的周長為 32 會最小。

而從表中也讓我們得知一件事，那便是如果要得到最小周長，則必須找出最小的長與寬的差，當長與寬的差越小，所得的周長就越小。

【範例】：已知蘋果一顆 30 元，小明身上有 500 元，至少要買 2 顆，問小明可以有幾種買法？

解：因為小明有 500 元，而 $500 \div 30 = 16 \cdots\cdots 20$

所以小明最多可以買 16 顆

而因為最少要買 2 顆

所以小明總共有 $(16-2+1)=15$ 種買法。

【範例】：中山路兩旁規定每固定隔 10 公尺就要有一棵行道樹且道路兩端都要有行道樹，已知在中山路上行道樹總共有 1600 棵，請問中山路總共有多長？

解：因為兩邊總共有 1600 顆，所以道路一邊有 800 顆行道樹

又因為兩端都有行道樹，所以中山路的總長為

$800-1=799$ 公尺

【範例】：已知要做一個邊長為 20 公分的正方體實心鐵塊，材料費要 400 元，那麼請問一個邊長為 60 公分的正方體實心鐵塊要價多少？

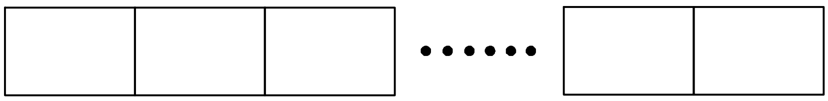
解：因為邊長 60 公分的正方體的體積是邊長 20 公分正方體體積的 27 倍

所以邊長為 60 公分的正方體鐵塊的價錢是 20 公分的 27 倍

故總價應該為

$400 \times 27 = 10800$ 元

【範例】：已知長方形的長、寬分別為 20 公分與 16 公分，現將 20 個此種大小的長方形排列如下圖所示，請問排列出來的此長方形，他的外圍周長為多少？



解：此長方形的一邊長為 $20 \times 20 = 400$，所以兩邊長為 $400 \times 2 = 800$

此長方形的一邊寬為 16，所以兩邊寬為 $16 \times 2 = 32$

則此長方形的周長 $800 + 32 = 832$ 公分

【範例】：a 除以 18 餘 1，a 除 39 餘 1，請問 a 是多少？

解：因為

$a \div 18 =$ 商 $\cdots\cdots 1$

$39 \div a =$ 商 $\cdots\cdots 1$

可以將上面式子改寫成

$a-1 = 18 \times$ 商

$39-1 = a \times$ 商

a 是 38 的因數，$a-1$ 是 18 的倍數

即 a 可能為 1、2、19、38

所以只有 19 符合題目所求

答：$a=19$

小 試 身 手

【例題 1】

(1) 9 是 1539 的因數嗎？

(2) 5 是 813 的因數嗎？

解：(1) 9 是 1539 的因數。

(2) 5 不是 813 的因數。

【例題 2】

(1) 11 是 9262 的因數嗎？

(2) 7 是 58 的因數嗎？

解：(1) 11 是 9262 的因數。

(2) 7 不是 58 的因數。

【例題 3】

(1) 459 是 3 的倍數嗎？

(2) 1234 是 4 的倍數嗎？

解：(1) 459 是 3 的倍數。

(2) 1234 不是 4 的倍數。

【例題 4】

(1) 123321 是 11 的倍數嗎？

(2) 6592 是 9 的倍數嗎？

解：(1) 123321 是 11 的倍數。

(2) 6592 不是 9 的倍數。

【例題 5】

下列哪些是 48 的因數？

0、1、2、3、4、6、18、24、48

解：1、2、3、4、6、24、48

【例題 6】

下列哪些是 13 的倍數？

0、1、143、169、602、1326

解：143、169、1326。

【例題 7】

下列各數，哪些是質數？哪些是合數？

6，7，8，19，20，21，22，23，24

解：質數有 7，19，23。

合數有 6，8，20，21，22，24。

【例題 8】

下列各數，哪些是質數？哪些是合數？

31，32，33，34，35，36，37，38，39

解：質數有 31，37。

合數有 32，33，34，35，36，38，39。

【例題 9】

將 36 顆糖果分裝在罐子裡，每罐要一樣多，不能全裝在一罐，每一罐最少六顆，最多不超過20 顆，請將分裝的方法填入下表中。

罐數	每罐裝數目	總數
2	18	36
3	12	36
4	9	36
6	6	36

【例題 10】

用 105 張大小相同的正方形紙片拼成長方形，假設長方形的長比寬大，請將排列方法填入下表中。

長	寬	總數
105	1	105
35	3	105
21	5	105
15	7	105

【例題 11】

請問大於 30 到小於 40 的質數有哪些？其所有質數和是多少？

解：大於 30 到小於 40 的質數有 31、37。

其所有質數和是 68。

【例題 12】

請問大於 60 到小於 80 的合數有哪些？共有多少個合數？

解：大於 60 到小於 80 的其所有合數是

62、63、64、65、66、68、69、70、72、74、75、76、77、78。

共有 14 個。

【例題 13】

60 顆包子要分袋裝好去賣，若每袋最少 4 顆最多不超過 13 顆，則有幾種分法呢？

解：

60＝1、2、3、4、5、6、10、12、15、20

30、60．

每袋 4 顆可分 15 袋

每袋 5 顆可分 12 袋

每袋 6 顆可分 10 袋

每袋 10 顆可分 6 袋

每袋 12 顆可分 5 袋　　共五種分法

【例題 14】

送貨員要將 36 箱汽水搬到車上，且每次至少搬 3 箱，最多 12 箱，每一次搬的箱數都一樣，則有幾種不同的搬法？

解：

36＝1、2、3、4、6、9、12、18、36

每次搬 3 箱要搬 12 次

每次搬 4 箱要搬 9 次

每次搬 6 箱要搬 6 次

每次搬 9 箱要搬 4 次

每次搬 12 箱要搬 3 次　共五種搬法

【例題 15】

小明想用 30 塊邊長為 1 公分的正方形紙板，緊密地拼成面積為 30 的長方形，則此長方形的周長最小可為多少？

解：

因為長方形面積＝長×寬，因此將 30 做分解成長×寬的形式，且長要比寬大，所以可以得到：

30＝30 × 1＝15 × 2＝10 × 3＝6 × 5

而因為其長方形的長與寬的差要最小才能使得周長最小，因此長、寬為 6、5 的長方形即為所求。所以周長為：

(6 + 5) × 2 = 22 公分

【例題 16】

小明想用 100 塊邊長為 1 的正方形紙板，緊密地拼成面積為 100 的長方形，且長、寬不等長，則此長方形的周長最小可為多少？

解：

因為長方形面積＝長×寬，因此將 100 做分解成長×寬的形式，且長要比寬大，所以可以得到：

100＝100×1＝50×2＝25×4＝10×10

而因為其長方形的長與寬的差要最小才能使得周長最小，但因為若邊長為 10 與 10 時是個正方形不合題目所求，因此當長、寬為 25、4 的長方形方為所求。所以周長為：

(25 + 4) × 2 = 58 公分

【例題 17】

阿華期中考的分數是 7 與 13 的倍數，已知阿華此次的考試滿分分數是 100 分，請問阿華這次考幾分？

解：

阿華的分數是 7 與 13 的公倍數

100 以內 7 的倍數有：

7、14、21、28、35、42、49、56、63、70、77、84、91。

100 以內 13 的倍數有：

13、26、39、52、65、78、91。

因為阿華的分數是 7 與 13 的公倍數

所以阿華此次考試分數應該是 91 分

【例題 18】

已知阿妹演唱會的現場人數是 23、29 與 7 的倍數，會場場地最多容納 5000 人，請問阿妹演唱會現場總共有多少人？

解：

人數是 7 與 23 與 29 的公倍數

因此人數最少為

7 × 23 × 29 ＝ 4669 人

所以演場會的可能人數為 4669 的倍數

但因為會場最多容納 5000 人

4669 × 2 ＝ 9338 已經超過人數限制

因此阿妹此次演唱會

會場總共有 4669 人

二、因數判別與標準分解式

質因數：

如果一個整數的因數是質數，則稱此因數為這個整數的質因數。

【範例】：5 是 35 的因數，同時 5 也是質數，所以 5 是 35 的質因數。

基本因數判別方法：

(1) 含有 2 的因數：

個位數字是 0、2、4、6、8 的數都是偶數，也就是可以被 2 整除的數。

【範例】：判斷 256 是否含有 2 的因數？

解　：256 的個位數 6 為偶數，所以 256 含有 2 的因數。

(2) 含有 3 的因數：

只要判斷這個數的數字的總和是否可以被 3 整除，可以的話，即含有 3 的因數。

【範例】：判斷 567 是否含有 3 的因數？

解　：將 567 的個別數字相加，$5+6+7=18$，$18\div3=6$，18 可以被整除，所以 567 含有 3 的因數。

說明：
$$\begin{aligned}567&=500+60+7\\&=100\times5+10\times6+7\\&=(99+1)\times5+(9+1)\times6+7\\&=(99\times5)+5+(9\times6)+6+7\\&=(99\times5)+(9\times6)+5+6+7\\&=(33\times3\times5)+(3\times3\times6)+18\\&=3\times(33\times5+3\times6+6)\end{aligned}$$

因為 99、9 都可以被 3 整除，所以只需要計算 5+6+7 是否能被 3 整除，可以的話，表示 567 即含有 3 的因數。

【範例】：判斷 1123 是否含有 3 的因數？

解　：將 1123 的個別數字相加，$1+1+2+3=7$，$7\div3=6$ 餘 1，7 不能被整除，所以 1123 不含有 3 的因數。

(3) 含有 5 的因數：

個位數是 0 或 5 的都可以被 5 整除。

【範例】：判斷 10987650 是否含有 5 的因數？

解　：10987650 個位數是 0，所以 10987650 含有 5 的因數。

進階因數判別：

（1）含有 4 的因數：

此數末兩位數字可以被 4 整除。

【範例】：判斷 1516 是否含有 4 的因數？

解　：1516 的末二位數是 16，16÷4＝4，可以被整除，所以 1516 含有 4 的因數。

說明：1516＝1500＋16

＝15×100＋16

＝15×4×25＋16

＝15×4×25＋4×4

＝4×(15×25＋4)

因為 100 可以被 4 整除，所以只需要計算 16 是否能被 4 整除，可以的話，表示 1516 含有 4 的因數。

【範例】：判斷 23458 是否含有 4 的因數？

解　：23458 的末二位數是 58，58÷4＝14 餘 2，58 不可以被整除，所以 23458 不含有 4 的因數。

（2）含有 8 的因數：

此數末三位數字可以被 8 整除。

【範例】：判斷 1234536 是否含有 8 的因數？

解　：1234536 的末三位數是 536，536÷8＝67，536 可以被 8 整除，所以 1234536 含有 8 的因數。

說明：1234536＝1234000＋536

＝1234×1000＋536

＝1234×8×125＋536

＝1234×8×125＋8×67

＝8×(1234×125＋67)

因為 1000 可以被 8 整除，所以只需要計算 536 是否能被 8 整除，可以的話，表示 1234536 含有 8 的因數。

【範例】：判斷 53686 是否含有 8 的因數？

解　：53682 的末三位數是 682，682÷8=85 餘 2，682 不可以被 8 整除，所以 53682 不含有 8 的因數。

(3) 含有 9 的因數：

只要判斷這個數的數字總和是否可以被 9 整除。

【範例】：判斷 3654 是否含有 9 的因數？

解　：將 3654 的個別數字相加，$3+6+5+4=18$，$18\div 9=2$，18 可以被 9 整除，所以 3654 含有 9 的因數。

說明：$3654=3000+600+50+4$

$=1000\times 3+100\times 6+10\times 5+4$

$=(999+1)\times 3+(99+1)\times 6+(9+1)\times 5+4$

$=(999\times 3)+3+(99\times 6)+6+(9\times 5)+5+4$

$=(999\times 3)+(99\times 6)+(9\times 5)+3+6+5+4$

$=(999\times 3)+(99\times 6)+(9\times 5)+18$

$=9\times(111\times 3+11\times 6+1\times 5+2)$

因為 999、99、9 都可以被 9 整除，所以只要計算 $3+6+5+4$ 是否能被 9 整除，可以的話，代表 3654 含有 9 的因數。

【範例】：判斷 123456 是否含有 9 的因數？

解　：將 123456 的個別數字相加，$1+2+3+4+5+6=21$，但 21 不可以被 9 整除，所以 123456 不含有 9 的因數。

(4) 含有 11 的因數：

一個整數的奇數位的數字和與偶數位的數字和之間的差如果是 11 的倍數(含 0)，則這個整數就是 11 的倍數，否則就不是 11 的倍數。

【範例】：判斷 382349 是否含有 11 的因數？

解　：382349 的偶位數的數字和：$3+2+4=9$；

382349 的奇位數的數字和：$8+3+9=20$；

$20-9=11$，$11\div 11=1$，

所以 382349 含有 11 的因數。

說明：$382349=300000+80000+2000+300+40+9$

$=(80000+300+9)+(300000+2000+40)$

$=(8\times 10000+3\times 100+9)+(3\times 100000+2\times 1000+4\times 10)$

$=[8\times(9999+1)+3\times(99+1)+9]+$

$[3\times(100001-1)+2\times(1001-1)+4\times(11-1)]$

因為 100001、1001、11、9999、99 都可以被 11 整除，所以只要計算 $(8+3+9)-(3+2+4)$ 是否能被 11 整除，可以的話，代表 3654 含有 11 的因數。

標準分解式：

（1）<u>質因數分解</u>：我們通常希望將一個大的數分解為一些較小數的連乘，若這些小的數都是質數，則稱為質因數分解。一個大於 1 且不是質數的整數，都可以分解成其質因數的乘積。而短除法則是我們常用來做質因數分解的工具。

【範例】：12 可表示成 $2\times2\times3$，其中 2、3 都是質數，

所以 $12=2\times2\times3$ 是 12 的質因數分解。

如果 $12=4\times3$，因為 4 不是質數，所以不是 12 的質因數分解。

解：120 可表示成 $5\times2\times3\times2\times2$，其中 2、3、5 都是質數，

所以 $120=5\times2\times3\times2\times2$ 是 120 的質因數分解。

如果 $120=5\times24$，因為 24 不是質數，所以不是 120 的質因數分解。

（2）<u>標準分解式</u>：質因數分解時，規定把較小的質因數寫在前面，較大的質因數寫在後面。又為了簡化記錄，遇到兩個以上相同的質因數連乘時就以指數的記法來表示，此表示法稱為標準分解式。

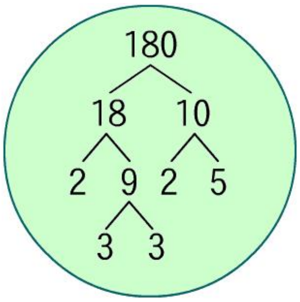
【範例】：寫出 120 的標準分解式。

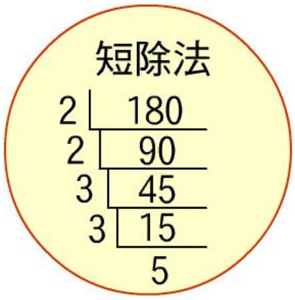
解：$120=5\times2\times3\times2\times2=2^3\times3\times5$

此為 120 的標準分解式。

【範例】：將 180 做質因數分解，並寫出它的標準分解式及質因數。

解：





180 標準分解式 $=2\times2\times3\times3\times5=2^2\times3^2\times5$。

180 的質因數：2、3、5。

標準分解式的應用：

（1）由標準分解式可以得到所有的正因數。(即所有正因數的個數)

【範例】：請求出 24 的正因數個數？

解　：

先求出 24 的標準分解式為：$24=2^3\times3$

24 的正因數有：1，2，3，4，6，8，12，24 共 8 個

將其正因數表示成次方的形式如下：

$1，2，2^2，2^3，3，2\times3，2^2\times3，2^3\times3$。

觀察：

$1=2^0$	2^1	2^2	2^3
$1=3^0$	3^1		

含有 2 的次方的因數有 4 個，含有 3 的次方的因數有 2 個，

所以全部可以組合成：

$1，2，2^2，2^3，3，2\times3，2^2\times3，2^3\times3$

故有 $4\times2=8$ 種情形。

由範例可得正因數個數的公式：

正因數個數＝各質因數之指數＋1 的連乘積

(為何要將指數＋1 呢？因為每一個質因數都多了「可以不選」這個情形。)

$\therefore$ 24 的正因數個數$=(1+1)\times(3+1)=8$

【範例】：請求出 108 的正因數個數？

解　：

$108=2^2\times3^3$

觀察：

$1=2^0$	2^1	2^2	
$1=3^0$	3^1	3^2	3^3

含有 2 的次方的因數有 3 個，含有 3 的次方的因數有 4 個，

所以全部可以組合成：

$1，2，2^2，3，2\times3，2^2\times3，3^2，2\times3^2，2^2\times3^2，3^3，2\times3^3，2^2\times3^3$

共 12 個正因數。

108 的正因數個數$=(2+1)\times(3+1)=12$

(2)由標準分解式可以得到所有正因數總和的求法：

【範例】：請求出 24 的正因數總和？

解：$\because$ $24=2^3\times3$

$\therefore$ 24 的所有正因數為：1，2，2^2，2^3，3，2×3，$2^2\times3$，$2^3\times3$

24 的正因數總和$=1+2+2^2+2^3+3+2\times3+2^2\times3+2^3\times3$

$=(1+2+2^2+2^3)+(3+2\times3+2^2\times3+2^3\times3)$

$=(1+2+2^2+2^3)+(1+2+2^2+2^3)\times3$…(乘法分配律)

$=(1+2+2^2+2^3)\times(1+3)$…(乘法分配律)

$=(1+2+4+8)\times4=60$

【範例】：請求出 108 的正因數總和？

解：$\because$ $108=2^2\times3^3$

$\therefore$ 108 的因數有：1，2，2^2，3，3^2，3^3，2×3，$2^2\times3$，2×3^2，$2^2\times3^2$，2×3^3，$2^2\times3^3$ 共 12 個正因數。

108 的正因數總和

$=1+2+2^2+3+3^2+3^3+2\times3+2^2\times3+2\times3^2+2^2\times3^2+2\times3^3+2^2\times3^3$

$=(1+2+2^2)+(3+2\times3+2^2\times3)+(3^2+2\times3^2+2^2\times3^2)+(3^3+2\times3^3+2^2\times3^3)$

$=(1+2+2^2)+(1+2+2^2)\times3+(1+2+2^2)\times3^2+(1+2+2^2)\times3^3$

$=(1+2+2^2)\times(1+3+3^2+3^3)$……(利用乘法分配律)

$=(1+2+4)\times(1+3+9+27)$

$=7\times40=280$

結論：由上面兩個範例可推知某數的正因數總和之求法，先求出某數的質因數分解式。

例如：某數$=A^a\times B^b\times C^c$

其正因數個數為 $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個。

其所有正因數的總和為

$(1+A^1+A^2+\cdots+A^a)\times(1+B^1+B^2+\cdots+B^b)\times(1+C^1+C^2+\cdots+C^c)$。

【範例】：720 的正因數個數有多少個？其正因數的總和為多少？

解：

$\because$ $720=2^4\times3^2\times5^1$

$\therefore$ 720 的正因數個數$=(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$(個)

720 的正因數總和$=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)\times(3^0+3^1+3^2)\times(5^0+5^1)$

$=31\times13\times6$

$=2418$

【範例】：31752 的正因數個數有多少個？其正因數的總和為多少？

解 ：∵ $31752=2^3\times 3^4\times 7^2$

∴ 31752 的正因數個數＝(3＋1)×(4＋1)×(2＋1)＝60(個)

31752 的正因數總和＝$(2^0+2^1+2^2+2^3)\times(3^0+3^1+3^2+3^3+3^4)\times(7^0+7^1++7^2)$

＝15×121×57

＝103455

【範例】：7560 的正因數中，有幾個是 2 的倍數？

解 ：因為 $7560=2^3\times3^3\times5\times7=2\times(2^2\times3^3\times5\times7)$

所以在 7560 的正因數中，是 2 的倍數的只能由 $2^2\times3^3\times5\times7$ 所組合而成

所以個位為(2+1)×(3+1)×(1+1)×(1+1)

= 3×4×2×2 = 48 個

【範例】：有一個 7 位數 432□905。

(1)如果它是 3 的倍數，則□的數字可以是？

(2)如果它是 11 的倍數，則□的數字可以是？

解 ：(1) ∵此數要為 3 的倍數

∴4+3+2+□+9+0+5 要為 3 的倍數

即 23+□要為 3 的倍數，所以□可能為 1、4、7。

(2) ∵此數要為 11 的倍數

∴(4+2+9+5)-(3+□+0)要為 11 的倍數或 0

即 17-□要為 11 的倍數或 0，所以□可能為 5 或 17(17 不合)。

【範例】：36 為八位數 1985p63q 的因數，則 2p + q=？

解 ： 36 = 4 × 9

故後兩位數 3q 可以被 4 整除，則 q＝2 或 6，

當 q= 2 時，此數為 1985p632，且必須為 9 的倍數，也就是

1＋9＋8＋5＋p＋6＋3＋2 ＝34＋p 為 9 的倍數，故 p ＝2，

此時 2p + q = 6。

當 q= 6 時，此數為 1985p636，且為 9 的倍數，也就是

1＋9＋8＋5＋p＋6＋3＋6 ＝38＋p 為 9 的倍數，故 p ＝7

此時 2p + q = 20。

所以 2p + q = 6 或 20。

【範例】：若六位數 683m45 被 11 除餘 5，則 m＝？

解 ：因為 683m45 被 11 除餘 5

所以只要將 683m45 減 5 所得的數即可被 11 整除

即 683m45-5＝683m40 是 11 的倍數

利用 11 倍數的判別法

(6+3+4)-(8+m+0)＝0 或 11 的倍數

得 5-m＝0 或 11 的倍數，

故 m＝5

小 試 身 手

【例題 1】

(1)寫出 36 的所有因數，並將質因數圈起來。

(2)寫出 42 的所有因數，並將質因數圈起來。

解：

(1) 1、2、3、4、6、9、12、18、36。

(2) 1、2、3、6、7、14、21、42。

【例題 2】

(1)寫出 105 的所有因數，並將質因數圈起來。

(2)寫出 169 的所有因數，並將質因數圈起來。

解：

(1) 1、3、5、7、15、21、35、105。

(2) 1、13、169。

【例題 3】

將下列各數寫成標準分解式：

(1) 68＝($2^2\times17$)

(2) 121＝(11^2)

(3) 225＝($3^2\times5^2$)

(4) 2288＝($2^4\times11\times13$)

(5) 4680＝($2^3\times3^2\times5\times13$)

【例題 4】

將下列各數寫成標準分解式：

(1) 98＝(2×7^2)

(2) 215＝(5×43)

(3) 3660＝($2^2\times3\times5\times61$)

(4) 4545＝($3^2\times5\times101$)

(5) 7400＝($2^3\times5^2\times37$)

【例題 5】

1. 填入□中可能的數字，使得下列各數都有因數 3：(列出所有答案)

(1) 2□3＝3x□□

(2) 5□9＝3x□□□

解：(1) ∵ 2＋□＋3＝3 的倍數

∴ 5＋□＝3 的倍數

∴ □＝1、4、7。

213＝3x71 、 243＝3x81

273＝3x91

(2) ∵ 5＋□＋9＝3 的倍數

∴ 14＋□＝3 的倍數

∴ □＝1、4、7。

519＝3x173 、 549＝3x183

579＝3x193

【例題 6】

1. 填入□中可能的數字，使得下列各數都有因數 3：(列出所有答案)

(1) 5□7

(2) 3□76

(3) 1□5586

解：(1) □＝0、3、6、9。

(2) □＝2、5、8。

(3) □＝2、5、8。

2. 填入□中可能的數字，使得下列各數都有因數 11：

(1) 7□6

(2) 2□29

(3) 23□5

解：(1)∵（7＋6）－□＝11 的倍數。

∴ □＝2。

(2) ∵（9＋□）－（2＋2）

＝11 的倍數。

∴ □＝6。

(3) ∵（5＋3）－（2＋□）

＝11 的倍數。

∴ □＝6。

2. 填入□中可能的數字，使得下列各數都有因數 11：

(1) 2□15

(2) 710□65

(3) 12□321

解：(1)∵（5＋□）－（2＋1）

＝11 的倍數。

∴（5＋□）－3＝11 的倍數。

∴ 5＋□＝14。 ∴ □＝9。

(2)∵（7＋6）－（1＋□＋5）

＝11 的倍數。

∴ 13－（6＋□）＝11 的倍數。

∴ □＝7。

(3)∵（1＋3＋2）－（1＋□＋2）

＝11 的倍數。

∴ 6－（1＋□＋2）＝11 的倍數。

∴ □＝3。

【例題 7】

四位數 468□，其標準分解式為：

$2^a \times 3^b \times 5 \times 13$，請你算出 a、b 各多少？

(其中 a，b≠0)

解：∵有 2 和 5 的因數

∴ □＝10

∴四位數為 4680

∵$4680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13$

∴ a＝3 、 b＝2。

【例題 8】

五位數 1531□，其標準分解式為：

$2^a \times 3^b \times 11 \times 29$，求 a、b 各是多少？

(其中 a，b≠0)

解：∵有 2 的因數

∴ □可能為 0、2、4、6、8

∵有 3 的因數

∴ 1＋5＋3＋1＋□＝3 的倍數

∴ 10＋□＝3 的倍數

∴ □可能為 2、5、8

∴綜合以上□可能為 2、8

又有 11 的因數，

∴（5＋1）－（1＋3＋□）

＝11 的倍數

∴ □＝2

最後綜合以上□為 2。

∴五位數為 15312

∵$15312 = 2^4 \times 3 \times 11 \times 29$

∴ a＝4 、 b＝1。

【例題 9】

請求出 360 的正因數個數？

解：

∵ $360=2^3\times 3^2\times 5^1$

∴ 360 的正因數個數

$=(4+1)\times(2+1)\times(1+1)$

$=30$(個)

【例題 10】

請求出 1323 的正因數個數？

解：

∵ $1323=3^3\times 7^2$

∴ 1323 的正因數個數

$=(3+1)\times(2+1)$

$=12$(個)

【例題 11】

請求出 600 的正因數總和？

解：

∵ $600=2^2\times 3^2\times 5^2$

∴ 600 的正因數總和

$=(2^0+2^1+2^2)\times$

$(3^0+3^1+3^2)\times$

$(5^0+5^1+5^2)$

$=7\times 13\times 31$

$=2821$

【例題 12】

請求出 630 的正因數總和？

解：

∵ $630=2\times 3^2\times 5\times 7$

∴ 630 的正因數總和

$=(2^0+2^1)\times$

$(3^0+3^1+3^2)\times$

$(5^0+5^1)\times$

(7^0+7^1)

$=3\times 13\times 6\times 8$

$=1872$

【例題 13】

用 A 除 26 會得餘數 2，A 除 30 則不足 2，請問 A 值為何？

解：

∵ $26=A\times n+2$

$30=A\times m-2$

∴ $24=A\times n$

$32=A\times m$

所以 A 可能的值為 24 與 32 的公因數

而 24 與 32 的公因數為

1、2、4、8

但是因為 A 除 26 會得餘數 2

表示 A 數＞2

所以 A 可能的值只有 4 與 8

【例題 14】

某數除 30 會得餘數 3，除 16 則不足 2，請問某數的值為何？

解：

∵ $30=$ 某數 $\times n+3$

$16=$ 某數 $\times m-2$

∴ $27=$ 某數 $\times n$

$18=$ 某數 $\times m$

所以某數可能的值為 27 與 18 的公因數

而 27 與 18 的公因數為

1、3、9

但是因為某數除 30 會得餘數 3

表示某數＞3

所以某數可能的值 9