三、最大公因數

公因數：

如果一個整數 a 同時為某幾個整數的因數時，則稱 a 為這幾個整數的公因數。

【範例】：$4=2\times2$ ， $6=2\times3$，所以 2 是 4 和 6 的公因數。

注意：整數 1 是所有整數的公因數。

最大公因數：

找出公因數中最大的數，稱為這幾個數的最大公因數(Greatest Common Divisor)，簡稱 g.c.d. 。

1. 若 d 為 a、b 兩正數的最大公因數可用 g.c.d.(a，b)＝d 來表示，
   或可簡記為(a，b)＝d。
2. 若 d 為 a、b、c 三個正數的最大公因數可用 g.c.d.(a，b，c)＝d 來表示，
   或可簡記為(a，b，c)＝d。

【範例】：求(6，12)＝? 及 (6，12，10)＝?

解　：　6 的因數：1、2、3、6 ；
10 的因數： 1、2、5、10；
12 的因數：1、2、3、4、6、12；
故(6，12)＝ 6； (6，12，10)＝ 2 。

互質：

設 a、b 為兩個正整數，如果 a、b 兩數的最大公因數為 1 的時候，我們稱 a、b 這兩數互質，記做(a，b)＝1。

【範例】：8 與 9 兩數互質嗎?

解　：8 的因數: 1、2、4、8；
9 的因數: 1、3、9；
因此，(8，9)＝1，所以 8 與 9 互質。

注意：

1. 整數 1 和任何整數都互質。
   範例：(1，10)＝1；
2. 任意兩相異質數必互質。
   範例：(11，23)＝1;
3. 互質的兩整數不需是質數。
   範例：(7，9)＝1，所以 7 跟 9 是互質，但是 9 不是質數。

最大公因數求法：

(1) 羅列法：將幾個整數的全部因數都寫出來，有相同者即為公因數，再找公因數中的最大者，就是最大公因數。

【範例】：求 24 和 18 的最大公因數＝？

解　：24 的因數有: 1、2、3、4、6、8、12、24。

18 的因數有 1、2、3、6、9、18。

所以 24 與 18 的公因數有：1、2、3、6

其中最大的數是 6；所以(24，18)＝6。

(2) 質因數分解法：

將每一個自然數做質因數分解，如果它們有共同的質因數時，則在共同的質因數中，取次方較低者相乘就可得出它們的最大公因數。

【範例】：求 56、90 和 294 的最大公因數＝？

解　：先將 56、90 和 294 質因數分解

$56=2\times2\times2\times7=2^3\times7$

$90=2\times3\times3\times5=2\times3^2\times7$

$294=2\times3\times7\times7=2\times3\times7^2$

以上三個數中，2 的最低次方為 1 次、 3 的最低次方為 0 次、

7 的最低次方為 1 次，所以（56，90，294）$=2^1\times3^0\times7^1=14$

(3) 短除法：是質因數分解的簡要紀錄。

【範例】：求 30 和 105 的最大公因數＝？

解　：由質因數分解可得：$30=3\times5\times2$，$105=3\times5\times7$。

將其寫成如下的形式，

$$\begin{array}{r|l} 3 & 30\ ,\ 105 \\ \hline 5 & 10\ ,\ 35 \\ \hline & 2\ ,\ 7 \end{array}$$

所以（30，105）$=3\times5=15$ 。

【範例】：求 48、72 和 108 的最大公因數＝？

解　：由質因數分解可得：$48=2\times2\times3\times4$，$72=2\times2\times3\times6$，$108=2\times2\times3\times9$。

將其寫成如下的形式，

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48\ ,72\ ,108 \\ \hline 2 & 24\ ,36\ ,54 \\ \hline 3 & 12\ ,18\ ,27 \\ \hline & 4\ ,\ 6\ ,\ 9 \end{array}$$

所以(48，72，104)$=2\times2\times3=12$。

注意：利用短除法求三個或三個數以上的最大公因數時，一定要每個數都有共同的因數去除才可以，直到三個或三個數以上都沒有共同的因數為止。

（4）輾轉相除法：利用輾轉相除法得到最大公因數。

注意：【此法適用於當兩數的值都很大時】。

【範例】：（247，589）＝？

解　：

2	247	589	2
	190	494	
1	57	95	1
	38	57	
最大公因數（g.c.d）←	19	38	2
		38	
		0	停止

所以得到（247，589）= 19

【範例】：（8633，5141）＝？

解　：

1	8633	5141	1
	5141	3492	
1	3492	1649	1
	3298	1552	
2	194	97	→ 最大公因數（g.c.d）
	194		
停止	0		

所以得到（8633，5141）= 97

最大公因數的應用：

【範例】：求$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5\times7，2^2\times3^2\times5\right)$＝？並將答案寫成標準分解式。

解　：

$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5\times7，2^2\times3^2\times5\right)$，將 3 個標準分解

式中都有出現且次數最低的質因數相乘，即可得

$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5^2\times7，2^2\times3^2\times5\right)=3\times5$

所以3×5即為所求。

【範例】：要將一塊長、寬分別為 24 與 20 的紙張完全裁成一小張一小張的正方形，若此正方形的邊長要最大，則總共可以裁成幾個正方形？

**解　**：要將長方形完全裁成小張的正方形，則需要找長與寬的公因數。

在此題中則需找 24 與 20 的公因數，

然而 24 與 20 的公因數有 1、2、4，又依題意此正方形要最大，

則當此正方形邊長為 4 時便即為所求，所以此時正方形的個數為

(24 ÷ 4) × (20 ÷ 4)= 6 × 5 = 30 個

所以總共可以裁成 30 個正方形。

【**範例**】：將 36 個橘子、48 個芒果、60 個蘋果分裝在幾個禮盒裏，使同一種水果在每一盒裏有一樣多個，問最多可裝幾盒？其中橘子幾個？芒果幾個？蘋果幾個？

解　：

36 ＝ 盒子數 × 橘子個數

48 ＝ 盒子數 × 芒果個數

60 ＝ 盒子數 × 蘋果個數

若要裝最多，盒子數要取最大的數，因此必須求

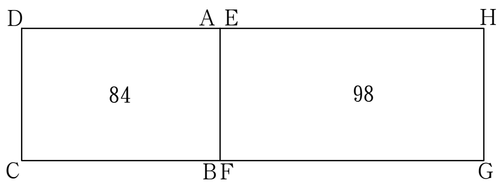
36、48、60 的最大公因數：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36, 48, 60 \\ \hline 2 & 18, 24, 30 \\ \hline 3 & 9, 12, 15 \\ \hline & 3, 4, 5 \end{array}$$

所以 $(36,48,60)=2^2\times3=12$，表示可 分成 12 盒其中橘子 3 個，芒果 4 個，蘋果 5 個。

答：最多 12 盒，每個盒裏有橘子 3 個，芒果 4 個，蘋果 5 個。

【**範例**】：將 182 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 84 與 98 的兩長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$ 如下圖所示。若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 且 $\overline{EH}>10$，則 $\overline{AB}=$？



解　：

$\because \overline{AB}=\overline{EF}$

$\therefore$要找出 $\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$，就比須找出面積為 84 跟 98 兩長方形的公因數，

而 84 與 98 的公因數有 1、2、7、14。

但若 $\overline{AB}=\overline{EF}=14$ 時，則在 $EFGH$ 中，$\overline{EH}=98\div14=7$，並不大於 10，

故 $\overline{AB}=\overline{EF}=14$ 不合。

而當 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 分別為 7、2、1 時，則 $\overline{EH}$ 分別為 14、49、98，都大於 10，

故 $\overline{AB}$ 可以為 1、2、7。

【範例】：已知三年仁班人數在 25 人以上，75 人以下。有一天同時有三位同學生日，分別帶來 228 顆水果軟糖，304 顆巧克力糖和 152 顆牛奶糖，結果每種糖果都恰好能平均分給每位同學，則每位同學可分得幾顆糖果？

解　：

∵228、304、152 的公因數有

1、2、4、19、38、76

但是三年仁班有 25 人以上，75 人以下

所以只有 38 人這種可能

$\therefore \frac{228}{38}+\frac{304}{38}+\frac{152}{38}=6+8+4=18$

答：每位同學可分得 18 糖果。

【範例】：甲數是正整數，甲數除 28 餘 8，甲數除 29 不足 1，請問甲數為多少？

解　：

∵28 ÷ 甲數 ＝ 商 …… 8

29 ÷ 甲數 ＝ 商 …… -1

因此可以將上面的式子改寫如下

28 ＝甲數 × 商＋8

29 ＝甲數 × 商－1

∴ 甲數為 28－8 的因數

甲數為 29＋1 的因數

∴甲數＝(28－8，29＋1)

＝(20，30)＝10

答：甲數為 10。

小 試 身 手

【例題 1】

找出下列哪幾組內兩數互質？

(1) 55，15　(2) 36，87

(3) 21，55

解：

(1) ∵（55，15）＝5　∴ 沒有互質。

(2) ∵（36，87）＝3　∴ 沒有互質。

(3) ∵（21，55）＝1　∴ 互質。

【例題 3】

將下列各數寫成標準分解式，再求兩數的最大公因數：

(1)96 的標準分解式＝？

(2)108 的標準分解式＝？

解：

(1) $96=2^5\times 3$

(2) $108=2^2\times 3^3$

最大公因數為：$2^2\times 3=12$

【例題 5】

用短除法求下列各組最大公因數：

(1) 390，1035　(2) 126，144，264

解：

(1)（390，1035）＝ 15

(2)（126，144，264）＝ 6

【例題 7】

求出下列各組的最大公因數，答案寫成標準分解式：

(1) $\left(2^3\times 3^3\times 5，3^2\times 5^2\right)$

(2) $\left(2\times 5^2\times 7\times 13，2^2\times 3\times 5^2\times 13\right)$

解：

(1) $\left(2^3\times 3^3\times 5，3^2\times 5^2\right)=3^2\times 5$

(2) $\left(2\times 5^2\times 7\times 13，2^2\times 3\times 5^2\times 13\right)$

$=2\times 5^2\times 13$

【例題 2】

找出下列哪幾組內兩數互質？

(1) 28，35　(2) 22，65

(3) 66，242

解：

(1) ∵（28，35）＝7　∴ 沒有互質。

(2) ∵（22，65）＝1　∴ 互質。

(3) ∵（66，242）＝22　∴ 沒有互質。

【例題 4】

將下列各數寫成標準分解式，再求兩數的最大公因數：

(1)144 的標準分解式＝？

(2)216 的標準分解式＝？

解：

(1) $144=2^4\times 3^2$

(2) $216=2^3\times 3^3$

最大公因數為：$2^3\times 3^2=72$

【例題 6】

用短除法求下列各組最大公因數：

(1)312，156　(2)84，126，420

解：

(1)（312，156）＝ 156

(2)（84，126，420）＝42

【例題 8】

求出下列各組的最大公因數，答案寫成標準分解式：

(1) $\left(2^3\times 3^2\times 65，3^4\times 11\times 13\right)$

(2) $\left(2\times 3^3\times 5^2\times 7\times 13，1950\right)$

解：

(1) $\left(2^3\times 3^2\times 65，3^4\times 11\times 13\right)=3^2\times 13$

(2) $\left(2\times 3^3\times 5^2\times 7\times 13，1950\right)$

$=2\times 3\times 5^2\times 13$

【例題 9】

請利用輾轉相除法求出下列各題的值：

(1)（180642，30498）＝

(2)（13871，8827）＝

解：

(1)（180642，30498）＝ 2346

5	180642	30498	1
	152490	28152	
12	28152	2346	
	28152		
	0		

(2)（13871，8827）＝1261

1	13871	8827	1
	8827	5044	
1	5044	3783	3
	3783	3783	
	1261	0	

【例題 11】

將一張邊長 180 公分的正方形海報紙，剪裁成長 15 公分，寬 9 公分的小長方形，共可剪成多少張？

解：

$$\frac{180}{15} \times \frac{180}{9} = 12 \times 20$$

$$= 240$$

答：240 張

【例題 10】

請利用輾轉相除法求出下列各題的值：

(1)（5320，4389）＝

(2)（4255，11914）＝

解：

(1)（5320，4389）＝ 133

1	5320	4389	4
	4389	3724	
1	931	665	2
	665	532	
2	266	133	
	266		
	0		

(2)（4255，11914）＝851

1	4255	11914	2
	3404	8510	
	851	3404	4
		3404	
		0	

【例題 12】

在佈置教室時，遭遇下列問題：

要將一張長102公分、寬48公分的長方形紙，裁成若干個同樣大小的正方形，紙張不能剩餘，且正方形的邊長要最大，求此最大正方形的邊長為多少公分？

解：

長＝最大正方形的邊長 × 個數

寬＝最大正方形的邊長 × 個數

∵（102，48）＝ 6

∴最大正方形的邊長為6公分

答：最大正方形的邊長為 6 公分

【例題 13】

某校有男生 535 人、女生 465 人，現把男女生混合編隊，每隊均有男、女生，且每隊的男生人數要相等，女生人數也相等，則全部男、女生最多可編幾隊？

解：男生總數＝隊數×男生每隊人數

女生總數＝隊數×女生每隊人數

∵（535，465）＝ 5

∴最多可編 5 隊

答： 5 隊

【例題 14】

紅白兩隊學生，紅隊有 231 人，白隊有 154 人，各分成若干組，每組人數要相等，則每組最多有幾人？一共可分成多少組？

解：

∵（231，154）＝ 77

$\therefore \frac{231}{77} + \frac{154}{77} = 3+2=5$

∴每組最多有 77 人，一共可分成 5 組。

答：每組最多有 77 人，共可分成 5 組。

【例題 15】

已知三年仁班人數在 25 人以上，100 人以下。有一天同時有三位同學生日，分別帶來 228 顆水果軟糖，304 顆巧克力糖和 152 顆牛奶糖，結果每種糖果都恰好能平均分給每位同學，則每位同學可分得幾顆糖果？

解： ∵228、304、152 的公因數有

1、2、4、19、38、76

但是三年仁班有 25 人以上

所以只有 38 人與 76 人兩種可能

$\therefore \frac{228}{76}+\frac{304}{76}+\frac{152}{73}=3+4+2=9$

$\therefore \frac{228}{38}+\frac{304}{38}+\frac{152}{38}=6+8+4=18$

答：每位同學可分得 9 顆或 18 糖果。

【例題 16】

燕姿老師有果汁糖 72 顆，蘇打餅 144 塊，平均分配給若干個學生，請問：(1) 最多可分給多少人？(2) 每人可得到幾顆果汁糖？(3) 每人可得到幾塊餅乾？

解：

(1) ∵（72，144）＝72

∴ 最多可分給 72 人

(2) $\frac{72}{72} = 1$ ∴每人可得到 1 顆果汁糖

(3) $\frac{144}{72} = 2$ ∴每人可得到 2 塊餅乾

答：(1) 72 人 (2) 1 顆 (3) 2 塊

【例題 17】

柯北家中的客廳是長 924 公分、寬 630 公分的矩形，今天想在地面上鋪滿大小相同的正方形磁磚，且磁磚必須整塊使用不能分割，請問磁磚邊長最大是多少公分？

解：長＝最大磁磚的邊長 × 長分割的個數

寬＝最大磁磚的邊長 × 寬分割的個數

最大磁磚的邊長＝長和寬的最大公因數

（924，630）＝42

答：磁磚邊長最大是 42 公分

【例題 18】

有一個三角形的公園，各邊長分別是 150 公尺、180 公尺、300 公尺，如在周圍種樹，相鄰兩棵樹之間的距離相等，且在三角形的頂點各種一棵，請問：(1)兩棵樹之間的距離最長為多少公尺？(2)最少要種幾棵樹？

解：∵（150，180，300）＝ 30

$\therefore \frac{150}{30} + \frac{180}{30} + \frac{300}{30}$

$= 5 + 6 + 10 = 21$

答：(1) 30 公尺 。(2) 21 棵 。

【例題 19】

某一正整數除 73 餘 5，除 131 不足 5，請問此數為多少？

解： 設此一正整數為甲數

∴ 73 ＝甲數 × 商＋5

131＝甲數 × 商－5

∴ 甲數為 73－5 與 131＋5 的因數

∴甲數可能為 1、2、4、17、34、68

但是甲數除 73 會餘 5 表示甲數＞5

所以甲數可能為 17、34、38

答：此數為 17、34、68。

【例題 20】

志明將桌上的糖果分成 6 個一堆，8 個一堆及 15 個一堆，都剛好可以分完，請問糖果最少有幾個？

解：糖果數＝6 × 分 6 個的堆數

糖果數＝8 × 分 8 個的堆數

糖果數＝15 × 分 15 個的堆數

糖果數＝[6，8，15]＝120

答：有 120 個。

【例題 21】

設甲數＝$2^3\times3^2\times7^3$，乙數＝$2^2\times3\times7^4$，丙數＝$2^4\times3^3\times7^2$，(1)求甲、乙、丙三數的最大公因數？(2)比較甲、乙、丙三數的大小？

解：

(1)（甲數，乙數，丙數）＝

（$2^3\times3^2\times7^3$，$2^2\times3\times7^4$，$2^4\times3^3\times7^2$）

＝$2^2\times3\times7^2$

(2) 甲數＝$2^2\times3\times7^2\times(2\times3\times7)$

乙數＝$2^2\times3\times7^2\times(7^2)$

丙數＝$2^2\times3\times7^2\times(2^2\times3^2)$

∴乙數＞甲數＞丙數

答：(1) $2^2\times3\times7^2$。(2) 乙數＞甲數＞丙數

【例題 22】

將 60 個蘋果、36 個梨子、96 個桃子分裝在幾個盒子裡，使同一種水果的個數在每一個盒子裡一樣多，問最多可裝幾盒？每個盒子裡共裝有多少個水果？

解：

60＝盒數×每盒蘋果的個數

36＝盒數×每盒梨子的個數

96＝盒數×每盒桃子的個數

∵盒數＝（60，36，96）＝12

∴ $\frac{60}{12}+\frac{36}{12}+\frac{96}{12}=5+3+8=16$

答：最多可裝 12 盒，每盒共裝 16 個水果。

【例題 23】

將 160 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 60 與 100 的兩長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$。若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 且 $\overline{EF}>10$，則 $\overline{AB}=$？

解：

∵ $\overline{AB}=\overline{EF}$

∴ $\overline{AB}=\overline{EF}$ =60 與 100 的公因數

而 60 與 100 的公因數有

1、2、4、5、10、20

但因為 $\overline{EF}>10$

所以 $\overline{AB}=20$

【例題 24】

將 209 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 95 與 114 的兩長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$。若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 且 $\overline{EF}>10$，則 $\overline{AB}=$？

解：

∵ $\overline{AB}=\overline{EF}$

∴ $\overline{AB}=\overline{EF}$ =95 與 114 的公因數

而 95 與 114 的公因數有

1、19

但因為 $\overline{EF}>10$

所以 $\overline{AB}=19$

四、最小公倍數

公倍數：

如果一個整數 a 同時為某些整數的倍數時，則稱 a 為這些整數的公倍數。

【**範例**】：

$24=6\times4$； $24=8\times3$；

因為 24 是 6 的倍數也是 8 的倍數；所以 24 是 6 和 8 的公倍數。

依序列出 6 和 8 的倍數，如下表：

6 的倍數	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	…
8 的倍數	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	…

由上表可以清楚地看出 24、48、72…，都是 6 和 8 公倍數，所以公倍數並不只有一個，而是有無限多個。

注意：公倍數有無限多個。

最小公倍數：

公倍數中最小的數，稱為這幾個數的最小公倍數(Least Common Multiple)，簡稱 l.c.m.。

(1) 若 d 為 a、b 兩正數的最小公倍數，可用 l.c.m.(a，b)=d 來表示，
  或可記做 [a，b]=d。

(2) 若 d 為 a、b、c 三個正數的最小公倍數，可用 l.c.m.(a，b，c)=d 來表示，
  或可記做 [a，b，c]=d。

注意：最小公倍數只有一個。

【**範例**】：求 6 和 8 的最小公倍數？

解：

6 和 8 大於 0 的公倍數為：24、48、72、96、…等等，最小是 24，稱為 6 和 8 的最小公倍數；用[6，8]表示 6 和 8 的最小公倍數，記為[6，8]=24。

【**範例**】：求[8，12，15] ＝ ？

解：

8、12 和 15 大於 0 的公倍數有：120、240、360、…等等，其中最小是 120，稱為 8、12 和 15 的最小公倍數;用[8，12，15]表示 8、12 和 15 的最小公倍數，記為 8，12，15]=120。

最小公倍數的求法：

(1) 羅列法：將幾個整數大於 0 的倍數分別寫出，直到有相同的數字出現，這些相同的數就是公倍數，而其中最小者就是最小公倍數。

【**範例**】：求 [12，16]＝？（羅列法）

解　：分別列出 12 及 16 的倍數，如下表：

12 的倍數	12	24	36	48	60	72	84	96	108
16 的倍數	16	32	48	64	80	96	112	128	144

由上表，可以清楚地看到，12 和 16 大於 0 的公倍數為：48、96、144……等，其中最小是 48，所以[12，16]＝48。

(2) 質因數分解法：

將每一個自然數做質因數分解，然後在共同的質因數中，取次方數較高者，不同的質因數就以原來的次方相乘相乘，就可得出它們的最小公倍數。

【**範例**】：求[24，36]＝？

解　：$\because$ $24=2^3\times3$，$36=2^2\times3^2$

$\therefore$ $72=[24，36]=2^3\times3^2$

$=2^3\times3\times3$

$=24\times3$

$=2^2\times3^2\times2$

$=36\times2$

故 72 為 24 的倍數，72 為 36 的倍數，且 72 為 24 與 36 的最小公倍數。

答：[24，36]＝72

【**範例**】：求 315、600 和 1260 的最小公倍數。

解　：先將 315、600 和 1260 質因數分解

$315=3\times3\times5\times7=3^2\times5\times7$

$600=2\times2\times2\times3\times5\times5=2^3\times3\times5^2$

$1260=2\times2\times3\times3\times5\times7=2^2\times5\times3^2\times7$

以上三個數中，2 的最高次方為 3 次、 3 的最高次方為 2 次、5 的最高次方為 2 次、7 的最高次方為 1 次。

所以（315，600，1260）$=2^3\times3^2\times5^2\times7=12600$。

(3) 短除法：

求兩數的最小公倍數的步驟如下：

1. 先求出兩自然數的最大公因數。
2. 將最大公因數提出後所剩互質的兩自然數與最大公因數相乘，即為兩自然數的最小公倍數。

【範例】：求 [36，24]＝？（短除法）

解：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24\ ,\ 36 \\ \hline 2 & 12\ ,\ 18 \\ \hline 3 & 6\ ,\ 9 \\ \hline & 2\ ,\ 3 \end{array}$$

所以[36，24]＝2×2×2×3×3＝72

求三個或三個以上的自然數之最小公倍數的步驟如下：

1. 逐次以這幾個數共同的質因數或部分自然數共同的質因數去除，直到每兩個都互質為止。
2. 最小公倍數就是共同的質因數與最後兩兩互質的這些數之乘積。

【範例】：求 [60，90，105]＝？（短除法）

解：

$$\begin{array}{r|l} 5 & 60\ ,90\ ,105 \\ \hline 3 & 12\ ,18\ ,21 \\ \hline 2 & 4\ ,\ 6\ ,\ 7 \\ \hline & 2\ ,\ 3\ ,\ 7 \end{array}$$

所以[60，90，105]＝5×3×2×2×3×7＝1260。

注意：

1. 若兩正整數 a 和 b 互質，則(a，b)＝1，[a，b]＝a×b。
2. 設 a、b 是正整數，若 a 是 b 的因數，則(a，b)＝a；[a，b]＝b。
3. 所有公因數都是最大公因數的因數。
4. 所有公倍數都是最小公倍數的倍數。
5. 若 a、b 為兩正整數，則(a，b)×[a，b]＝a×b。

【範例】： 6＝2×3，15＝3×5

(6，15)＝3

[6，15]＝2×3×5

6 ×15＝2 × 3 × 3 × 5

＝3 × 2 × 3 × 5

＝（6，15）× [6，15]

【範例】：(6，4)＝2；

[6，4]＝12；

則(6，4)×[6，4]＝24＝6×4。

【範例】：(72，108)=36；[72，108]＝216；

則(72，108)×[72，108]＝7776＝72×108。

【範例】：若 $a=2^3\times5^2\times7$；$b=2^2\times5^3\times11$

可以得到 $(a,b)=2^2\times5^2$, $[a,b]=2^3\times5^3\times7\times11$

且 $a\times b=2^3\times5^2\times7\times2^2\times5^3\times11$

$(a,b)\times[a,b]=2^3\times5^2\times7\times2^2\times5^3\times11$

則 $(a,b)\times[a,b]=a\times b$。

<u>最小公倍數的應用</u>：

【範例】：求 $[3\times5^3\times7，585，2^2\times3^2\times5]=$？並將答案寫成標準分解式：

解　：585 寫成標準分解式為 $3^2\times5\times13$；所以整個式子可寫成：

$[3\times5^3\times7，3^2\times5\times13，2^2\times3^2\times5]$，

將 3 個標準分解式中所有已列出且最高次數的質因數相乘，即可得：

$[3\times5^3\times7，3^2\times5\times13，2^2\times3^2\times5]=2^2\times3^2\times5^3\times7\times13$

所以 $[3\times5^3\times7，585，2^2\times3^2\times5]=2^2\times3^2\times5^3\times7\times13$。

【範例】：甲數用 8 去除餘 2，用 11 去除餘 2，用 15 去除餘 2，問甲數至少是多少？

解　：甲數＝8 × 商＋2；

甲數＝11 × 商＋2；

甲數＝15 × 商＋2；

因此甲數－2 為 8、11、15 的公倍數，問甲數至少是多少？

則甲數－2 為 8、11、15 的最小公倍數，

[8，11，15]＝8×11×15＝1320

因為甲數－2＝1320，所以甲數＝1320＋2＝1322

答：甲數為 1322。

【範例】：甲數用 8 去除餘 6，用 11 去除餘 9，用 15 去除餘 13，問甲數至少是多少？

解　：甲數＝8 × 商＋6；

甲數＝11 × 商＋9；

甲數＝15 × 商＋13；

所以甲數用 8 去除餘 6，用 11 去除餘 9 及用 15 去除餘 13，表示都不足 2；

甲數＝8 × 商－2；

甲數＝11 × 商－2；

甲數＝15 × 商－2；

因此甲數＋2 為 8、11、15 的公倍數，問甲數至少是多少，

則甲數＋2 為 8、11、15 的最小公倍數：

[8，11，15]＝8×11×15＝1320

因為甲數＋2＝1320，所以甲數＝1320－2＝1318

答：甲數為 1318。

【範例】：甲數用 8 去除不足 2，用 11 去除不足 5，用 15 去除餘 6，問甲數至少是多少？

解：甲數＝8 × 商－2；

甲數＝11 × 商－5；

甲數＝15 × 商＋6；

所以甲數用 8 去除不足 2，用 11 去除不足 5 及用 15 去除餘 6，表示都餘 6；

甲數＝8 × 商＋6；

甲數＝11 × 商＋6；

甲數＝15 × 商＋6；

因此(甲數－6)為 8、11、15 公倍數，問甲數至少是多少，

因此(甲數－6)為 8、11、15 的最小公倍數：

[8，11，15]＝8×11×15＝1320

因為甲數－6＝1320，所以甲數＝1320＋6＝1326

答：甲數為 1326。

【範例】：在國家音樂廳舉行的某場音樂會，盛況空前，前往聆聽之聽眾，經售票員估計在 1800 人至 2000 人之間，若每 5 人一數，每 7 人一數，每 11 人一數，皆剩下 3 人，問當天實際到場的聽眾共多少人？

解：假設聽眾有 X 人，則依題意

$X = 5a + 3$

$X = 7b + 3$

$X = 11c + 3$

所以

$X - 3 = 5a$

$X - 3 = 7b$

$X - 3 = 11c$

所以 $X - 3$ 為 5、7、11 的公倍數，即為 385 的倍數

385、770、1155、1540、1925

所以 $X = 1928$ ， 當天實際到場的聽眾共 1928 人。

【範例】：設 a, b, c 為正整數，(a, b) = 5, (b, c) = 2, (a, c) = 3 且 [a, b] = 30, [b, c] = 120, [c, a] = 120, 求 a ＋ b ＋ c 為何？

解 ：

$a \times b = (a, b) \times [a, b]$

$b \times c = (b, c) \times [b, c]$

$a \times c = (a, c) \times [a, c]$

故 $a \times b = 150$， $b \times c = 240$

b 為 150 與 240 的因數，(150 , 240) = 30 = $2 \times 3 \times 5$

b 可能為 1, 2, 3 , 5 , 6, 10 , 15, 30。

由 (a, b) = 5 可知 b 可能為 5 , 10 , 15, 30。

又由 $a \times b = 150$ 可知 b 可能為 5 , 10。

此時 a 為 30 與 15。

a	5	10	**15**	30
b	30	15	**10**	5
[a, b]	30	30	30	30
(a, b)	5	5	5	5

又由 $a \times c = (a, c) \times [a, c] = 360$

a	5	10	**15**	30
c	72	36	**24**	12
(a, c)	1(不合)	2(不合)	3	6(不合)
[a, c]	360(不合)	180(不合)	120	60(不合)

故 a ＋ b ＋ c = 15 + 10 + 24 = 49。

【範例】：兩個二位自然數最大公因數為 12 ，其乘積為 5040 ，求此二數

解 ：

設此兩個自然數為 a 與 b

因為(a，b)×[a，b]＝a×b

所以根據題意可以得

12 × [a，b] ＝ 5040

所以[a，b] ＝ 420

即(a，b) ＝ $2^2 \times 3$

[a，b] ＝ $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

又因為此兩數都為二位數

所以此兩數分別為

$2^2 \times 3 \times 5 = 60$

$2^2 \times 3 \times 7 = 84$

【範例】： 甲數用 8 去除餘 2，用 11 去除餘 4，用 15 去除餘 6，問甲數至少是多少？

解　：

甲數＝8 × 商＋2；

甲數＝11 × 商＋4；

甲數＝15 × 商＋6；

或者可以換算成

甲數＝8 × 商－6；

甲數＝11 × 商－7；

甲數＝15 × 商－9；

我們會發現在上面兩個聯立方程式中，他的餘數並都不完全相同，
此時我們便無法用公倍數的方法求出甲數，
而此類型的題目我們將會在高中的時候遇到，
這便是極富盛名的中國剩餘定理(韓信點兵)。

小 試 身 手

【例題 1】

將下列各數寫成標準分解式，再求出最小公倍數：

(1) 60 標準分解式＝？

(2) 126 標準分解式＝？

(3) [60，42]＝？

解：

(1) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

(2) $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

(3) $[\ 60，42\ ] = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

【例題 2】

將下列各數寫成標準分解式，再求出最小公倍數：

(1) 54 標準分解式＝？

(2) 180 標準分解式＝？

(3) [54，180]＝？

解：

(1) $54 = 2 \times 3^3$

(2) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

(3) $[\ 54，180\ ] = 2^2 \times 3^3 \times 5$

【例題 3】

利用短除法求下列各式最小公倍數：

(1) 49，21　　(2) 24、36、72

解：

(1) [49，21] ＝ 147

(2) [24、36、72] ＝ 72

【例題 4】

利用短除法求下列各式最小公倍數：

(1) 48、81　　(2) 91、65、39

解：

(1) [48、81] ＝ 1296

(2) [91、65、39] ＝ 1365

【例題 5】

求出下列各組的最小公倍數，答案寫成標準分解式：

(1) $[2^2 \times 3 \times 7，3^2 \times 5 \times 7]$

(2) $[2 \times 3，2^3 \times 3^2 \times 10 \times 11]$

(3) $[660，2^2 \times 3^3 \times 5，462]$

解：

(1) $[2^2 \times 3 \times 7，3^2 \times 5 \times 7]$

$= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(2) $[2 \times 3，2^3 \times 3^2 \times 10 \times 11]$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$

(3) $[660，2^2 \times 3^3 \times 5，462]$

$=〔2^2 \times 3 \times 5 \times 11，2^2 \times 3^3 \times 5，2 \times 3 \times 7 \times 11〕$

$= 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$

【例題 6】

求出下列各組的最小公倍數，答案寫成標準分解式：

(1) $[2 \times 3 \times 65，3 \times 7 \times 13]$

(2) $[2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13，2100]$

(3) $[3 \times 5^2 \times 11，390，2^2 \times 3^3 \times 55]$

解：

(1) $[2 \times 3 \times 65，3 \times 7 \times 13] = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$

(2) $[2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13，2100]$

$=〔2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13，2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7〕$

$= 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$

(3) $[3 \times 5^2 \times 11，390，2^2 \times 3^3 \times 55]$

$=〔3 \times 5^2 \times 11，2 \times 3 \times 5 \times 13，2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11〕$

$= 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11 \times 13$

【例題 7】

求下列各式的值，答案寫成標準分解式：

(1)$[(3^2\times 7，336)，2^2\times 3^2]$

(2)$(4422，[2^2\times 3\times 5，231])$

解：

(1) $[(3^2\times 7，336)，2^2\times 3^2]$

$=[(3^2\times 7，2^4\times 3\times 7)，2^2\times 3^2]$

$=[3\times 7，2^2\times 3^2]=2^2\times 3^2\times 7$

(2) $(4422，[2^2\times 3\times 5，231])$

$=(2\times3\times11\times67，[2^2\times3\times5，3\times7\times11])$

$=(2\times3\times11\times67，2^2\times3\times5\times7\times11)$

$=2\times3\times11$

【例題 8】

求下列各式的值，答案寫成標準分解式：

(1) $[18，(225，90)]$

(2) $([3^3\times 5^2\times 7，390]，2\times 3^2\times 5^2\times 13)$

解：

(1) $[18，(225，90)]$

$=[18，45]=90=2\times 3^2\times 5$

(2) $([3^3\times 5^2\times 7，390]，2\times 3^2\times 5^2\times 13)$

$=([3^3\times5^2\times7，2\times3\times5\times13]，2\times3^2\times5^2\times13)$

$=(2\times3^3\times5^2\times7\times13，2\times3^2\times5^2\times13)$

$=2\times3^2\times5^2\times13$

【例題 9】

永仁國中的鐘每 45 分打一次，隔壁復興國小的鐘，每 40 分打一次，今早上八點兩校的鐘同時打，問下一次同時打鐘是什麼時候？

解：

∵$[45，40]=360$ 分$=6$ 小時

∴ 8 小時＋ 6 小時 ＝ 14 小時

∴ $14-12=2$

答：下午 2 時

【例題 10】

某工廠因機器運轉之因素，必須天天有人投入生產，於是採輪休制。志明每上班 6 天休息 1 天，春嬌每上班 4 天休息 1 天，若兩人在 10 月 1 日同一天休息，則下次什麼時候也會同一天休息？

解：

∵$[7，5]=35$

∴ $1+35=36$

$36-31=5$

答：11 月 5 日

【例題 11】

甲、乙、丙三人同時同地出發，依同方向繞周長 780 公尺的圓池競走，每分鐘甲走 156 公尺、乙走 78 公尺、丙走 130 公尺，問幾分鐘後，三人第一次會合於原出發點？

解：

∵ 甲繞一周需 $780\div156=5$ 分

乙繞一周需 $780\div78=10$ 分

丙繞一周需 $780\div130=6$ 分

∴ $[5，10，6]=30$

答：30 分鐘後，三人第一次會合。

【例題 12】

甲、乙、丙三人繞著周長為 400 公尺的運動場慢跑，甲每秒跑 4 公尺，乙每秒跑 2 公尺，丙每秒跑 5 公尺，若三人同時同地同方向出發，則：(1)幾秒鐘後三人再次會合於原來的出發點？(2)承(1)，此時甲跑了幾圈？

解：

(1) ∵ 甲繞一圈需 $400\div4=100$ 秒

乙繞一圈需 $400\div2=200$ 秒

丙繞一圈需 $400\div5=80$ 秒

∴ $[100，200，80]=400$ 秒

(2) $400\div100=4$

答：(1) 400 秒 (2) 4 圈

【例題 13】

甲、乙、丙三人於陳老師生日時一起返回畢業母校祝壽，從此之後，甲每 10 天、乙每 14 天、丙每 22 天回母校一次，則：(1)三人再次同一天回母校是幾天後？(2)如果陳老師生日那天是星期五，下次三人都在星期五返回母校，至少要幾天後？

解：

(1)［10，14，22］＝770　　(2)［10，14，22，7］＝770

答：(1) 770 天。 (2) 770 天。

【例題 14】

甲、乙兩人在同公司上班，甲每上班 5 天後休假 1 天，乙每上班 6 天後休假一天（該公司天天營業），若恰巧甲、乙兩人同在一個星期日休假，則下次兩人同在星期日休假的日子和這一次至少相差幾天？

解：

［6，7，7］＝42　　答：42 天。

【例題 15】

有 A、B、C 三個鐘，已知 A 鐘每 30 分打一次，B 鐘每 60 分打一次，C 鐘每 45 分打一次，問第一次同時打後至第三次同時打鐘需要經過幾小時？

解：

∵［30，60，45］＝180 分＝3 小時

∴ 3 小時×2＝6 小時　　答：6 小時。

【例題 16】

袁太趕鴨子 10000 隻到野外覓食，已知當天走失的鴨子不超過 100 隻，回家後，每 5 隻一數，每 7 隻一數，都剩下 1 隻，請問走失的鴨子有幾隻？

解：

∵［5，7］＝35

∴ 10000 ÷ 35＝285…25

∴ 10000－25＝9975

∴ 9975＋1＝9976

∴ 10000－9976＝24　　答：24 隻。

【例題 17】

某數除以 5 餘 2，除以 7 餘 4，除以 6 不足 3，若此數介於 200 與 300 之間，則此數為何？

解　：

某數＝5 × 商＋2；

某數＝7 × 商＋4；

某數＝6 × 商－3；

所以某數除以 5 餘 2，除以 7 餘 4，除以 6 不足 3，表示都不足 3；

某數＝5 × 商－3；

某數＝7 × 商－3；

某數＝6 × 商－3；

因此(某數＋3)為 5、7、6 公倍數，問此數介於 200 與 300 之間，

因此(某數＋3)為 5、7、6 的最小公倍數：

[5，7，6]＝5×7×6＝210

因為此數＋3＝210，所以此數＝210－3＝207

答：此數為 207。

【例題 18】

如果甲數除以 15 餘 10，除以 20 餘 15，除以 25 餘 20，則甲數至少為多少？

解　： 甲數＝15 × 商＋10；

甲數＝20 × 商＋15；

甲數＝25 × 商＋20；

所以甲數除以 15 餘 10，除以 20 餘 15，除以 25 餘 20，表示都不足 5；

甲數＝15 × 商－5；

甲數＝20 × 商－5；

甲數＝25 × 商－5；

因此(甲數＋5)為 15、20、25 公倍數，問甲數至少是多少，

因此(甲數＋5)為 15、20、25 的最小公倍數：

[15，20，25]＝5×3×4×5＝300

因為甲數＋5＝300，所以甲數＝300－5＝295

答：甲數為 295。