

二元一次聯立方程式

二元一次式

二元一次式列式：

【回顧一元一次式列式】

【範例】：如果以阿寶的出發點為原點，往東為正向，往西為負向。(1) 阿寶先以每小時 x 公里的速度向東走了 3 小時，那麼他走了多少公里？(2) 他接著以每小時 x 公里的速度向西走了 4.5 小時，那麼他這 4.5 小時走了多少公里？(3) 他經過 7.5 小時後的位置如何表示？

解：(1) $3x$ 。
 (2) $4.5x$ 。
 (3) $3x - 4.5x = -1.5x$ 。

【二元一次式列式】

【範例】：如果以阿寶的出發點為原點，往東為正向，往西為負向。(1) 阿寶先以每小時 x 公里的速度向東走了 3 小時，那麼他走了多少公里？(2) 他接著以每小時 y 公里的速度向西走了 4.5 小時，那麼他這 4.5 小時走了多少公里？(3) 他經過 7.5 小時後的位置如何表示？

解：(1) $3x$ 。
 (2) $4.5y$ 。
 (3) $3x - 4.5y$ 。

【範例】：滿天星每枝 5 元，百合花每朵 15 元，花瓶一個 80 元。請問： x 枝滿天星需多少元？ y 朵百合花需多少元？弟弟買一個花瓶， x 枝滿天星及 y 朵百合花共需多少元？若弟弟帶 140 元除了買一花瓶外還可以買幾枝滿天星及幾朵百合花？

解： x 枝滿天星需要 $5x$ 元。
 y 朵百合花需要 $15y$ 元。
 一個花瓶， x 枝滿天星及 y 朵百合花共需 $5x + 15y + 80$ 。
 $5x + 15y + 80 = 140$ 。

【範例】：『一百饅頭一百僧，大僧三個更無爭。小僧三人分一個，大小和尚各幾丁？』，能否依此「僧分饅頭歌」列出算式？

解：設大和尚 x 人，小和尚 y 人。

$$x + y = 100$$

$$3x + \frac{1}{3}y = 100$$

【範例】：『肆中聽得語吟吟，薄酒名醜厚酒醇。好酒一瓶醉三客，薄酒三瓶醉一人，共同飲了一十九，三十三客醉醺醺。』，能否依此列出算式，能知薄酒幾瓶？厚酒幾瓶？

解：設薄酒 x 瓶，厚酒 y 瓶。

$$x + y = 19$$

$$\frac{1}{3}x + 3y = 33$$

【範例】：『三足團魚六眼龜，共同山下一深池。九十三足亂浮水，一百二眼將人窺。或出或沒往東西，依欄觀看不能知。有人算得無差錯，將酒重斟贈數杯。』，能否依此「鷓鴣天」古曲列出算式？

解：設三足團魚有 x 條，六眼龜有 y 隻。

$$3x + 4y = 93$$

$$2x + 6y = 102$$

【範例】：雞兔同籠，頭共 35，腳共 110，問雞兔各幾隻？列出算式？

解：設雞有 x 隻，兔有 y 隻。

$$x + y = 35$$

$$2x + 4y = 110$$

【範例】：三腳凳和四腳凳共 35 張，腳共 110，問各幾張？列出算式？

解：設三腳凳有 x 張，四腳凳有 y 張。

$$x + y = 35$$

$$3x + 4y = 110$$

【範例】：已知某二位數，其十位數字的 3 倍與其個位數字的和是 21，它的個位數字與十位數字對調後的新數比原數大 9，問原數是多少？

解：設原數的十位數字為 x ，個位數字為 y 。

$$3x + y = 21$$

$$(10y + x) - (10x + y) = 9$$

【範例】：誠誠與愛愛到商店買餅乾跟飲料，誠誠買餅乾 8 包，飲料 5 瓶，共 186 元；愛愛買餅乾 4 包，飲料 7 瓶，共 174 元，請餅乾一包幾元飲料一瓶幾元？

解：設餅乾 1 包 x 元，飲料 1 瓶 y 元。

$$8x + 5y = 186$$

$$4x + 7y = 174$$

【範例】：小青、小慧一起到芙蘿蕾花店買花，小青買了 4 朵百合和 6 朵劍蘭，付了 132 元；小慧買了 6 朵百合和 4 朵劍蘭，付了 138 元，那麼百合、劍蘭 1 朵各幾元？

解：設百合 1 朵 x 元，劍蘭 1 朵 y 元。

$$4x + 6y = 132$$

$$6x + 4y = 138$$

【範例】：洪媽媽拿 190 元給佳佳買 4 瓶汽水和 2 斤肉，但佳佳卻買回 2 瓶汽水和 4 斤肉，而剩下 20 元，請問汽水一瓶多少元，肉 1 斤多少元？

解：設汽水 1 瓶 x 元，肉 1 斤 y 元。

$$4x + 2y = 190$$

$$2x + 4y = 190 - 20$$

【範例】：甲乙二人各有若干元，若乙給甲 10 元，則甲所有錢是乙所有錢之 2 倍；若甲給乙 15 元，則甲所有錢等於乙所有錢。問甲原有多少元？

解：設甲有 x 元，乙有 y 元。

$$2(y - 10) = x + 10$$

$$x - 15 = y + 15$$

【範例】：若甲數的 5 倍等於乙數的 4 倍，且甲數 3 倍比乙數的 2 倍多 1，請問甲、乙二數各是多少？

解：設甲數是 x ，乙數是 y 。

$$5x = 4y$$

$$3x = 2y + 1$$

【範例】：便利商店賣果汁和牛奶，果汁每盒可賺 4 元，牛奶每盒可賺 3 元，今天便利商店賣出的牛奶盒數是果汁的 2 倍，一共賺了 1000 元，請問今天各賣出多少盒的果汁和牛奶？

解：設賣出果汁 x 盒，賣出牛奶 y 盒。

$$2x = y$$

$$4x + 3y = 1000$$

二元一次方程式的定義：

1. 二元一次式：若一個式子只含有兩個未知數(二元)，且未知數的次方是一次，我們稱為二元一次式。

【範例】： $5x+8y$ 和 $5x-4y+2$ 這類的式子具有 $ax+by+c$ 的樣式，它們都含有兩個未知數(二元)，且每個未知數的次數都是1(一次)，我們稱它們為二元一次式。

2. 同類項：有相同的文字符號，且文字符號的次方也相同的項。

【範例】：在式子 $6x+3-2x-5$ 中的 $6x$ 和 $-2x$ 是同類項；而 3 和 -5 是不含文字符號的同類項。

3. 一個等式中包含兩個一次未知數，如 $8x+15y+80=140$ ，我們稱此二元一次方程式。如 $8x+15y+80$ ，我們稱它為二元一次式。

4. 二元一次式的一般形式及係數、常數項：

x 、 y 的二元一次式一般都表示為 $ax+by+c$ ，其中 a 為 x 項的係數， b 為 y 項的係數， c 為常數項。

【範例】： $5x+8y+3$ ，其中 5 為 x 項的係數， 8 為 y 項的係數， 3 為常數項。

5. 兩個等式中包含兩個一次未知數，如：

$$\begin{aligned}x+y &= 100 \\ 3x + \frac{1}{3}y &= 100,\end{aligned}$$

我們稱此二元一次聯立方程式。

二元一次式的運算：

將二元一次式中的同類項合併化簡。

【範例】：花店滿天星每枝 x 元，百合花每朵 y 元，小強 第一天買 5 枝滿天星及 8 朵百合花送給 曉雲，小強 第二天買 9 枝滿天星及 4 朵百合花送給 小雅。請問 小強 兩天共花了多少錢？

解：第一天 $5x + 8y$ 元。

第二天 $9x + 4y$ 元。

兩天共 $(5x + 8y) + (9x + 4y)$

$$(5x + 8y) + (9x + 4y)$$

$$= (5x + 9x) + (8y + 4y)$$

$$= 14x + 12y$$

【範例】：化簡下列各式：

$$(1) 2(-3x + 4y - 5) = ?$$

解：原式 $= -(2 \times 3)x + (2 \times 4)y - 2 \times 5$
 $= -6x + 8y - 10$

$$(2) -7(-4x + 6y - 8) = ?$$

解：原式 $= -[(-7) \times 4]x + [(-7) \times 6]y - [(-7) \times 8]$
 $= -(-28)x + (-42)y - (-56)$
 $= 28x - 42y + 56$

$$(3) (-3x + 4y - 5) + (-8 + 6y - 4x) = ?$$

解：原式 $= [(-3) + (-4)]x + (4 + 6)y - 5 + (-8)$
 $= -7x + 10y - 13$

$$(4) (-3x + 6y - 5) - (-8 + 2y - 9x) = ?$$

解：原式 $= [(-3) - (-9)]x + (6 - 2)y - 5 - (-8)$
 $= (-3 + 9)x + 4y - 5 + 8$
 $= 6x + 4y + 3$

$$(5) 2(4x + 5y + 7) + 3(x + 4y - 7) = ?$$

解：原式 $= (2 \times 4 + 3 \times 1)x + (2 \times 5 + 3 \times 4)y + 2 \times 7 + 3 \times (-7)$
 $= (8 + 3)x + (10 + 12)y + 14 - 21$
 $= 11x + 22y - 7$

$$(6) 3(5x - 4y + 2) - 5(6x + 7y - 8) = ?$$

解：原式 $= (3 \times 5 - 5 \times 6)x + [3 \times (-4) - 5 \times 7]y + 3 \times 2 - 5 \times (-8)$
 $= (15 - 30)x + (-12 - 35)y + 6 + 40$
 $= -15x - 47y + 46$



小 試 身 手

【例題 1】

回答下列問題

- (1) 我們常在生日蛋糕上插粗細不同的蠟燭，以表示壽星的年齡，通常一根粗蠟燭代表 10 歲，一根細蠟燭代表 1 歲。如果琦琦的生日上面插了 x 根粗蠟燭、 y 根細蠟燭，那麼琦琦的年齡是 $10x+y$ 歲。(用 x 與 y 的關係式表示)。
- (2) 假設琦琦現年 43 歲，依題意可列出二元一次方程式為 $10x+y=43$ 。

【例題 2】

- (1) 誠誠的錢包內有 x 張百元鈔票、 y 個十元硬幣，請問錢包內共有 $100x+10y$ 元。(用 x 與 y 的關係式表示)。
- (2) 假設誠誠的錢包內有 980 元，依題意可列出二元一次方程式為 $100x+10y=980$ 。

【例題 3】

愛愛的存錢筒裡有 5 元硬幣 x 枚、10 元硬幣 y 枚：

- (1) 請問愛愛的存錢筒裡有多少元。(用 x 與 y 的關係式表示)
- (2) 假設愛愛的存錢筒裡有 235 元，依題意可列出二元一次方程式為_____。
- 答：(1) $5x+10y$ 元。 (2) $5x+10y=235$ 。

【例題 4】

小明買了 2 元的郵票 x 張與 3 元的郵票 y 張，請問：

- (1) 小明總共花了多少元。(用 x 與 y 的關係式表示)
- (2) 假設小明總共花了 72 元，依題意可列出二元一次方程式為_____。
- 答：(1) $2x+3y$ 元。 (2) $2x+3y=72$ 。

【例題 5】

化簡下列各式：

- (1) $3(7x-2y-5)-10x$
- (2) $-(4x+7y+1)+2(6x-3y-5)$

解：(1) 原式 = $21x-6y-15-10x$
 $= 11x-6y-15$ 。

(2) 原式 = $-4x-7y-1+12x-6y-10$
 $= 8x-13y-11$ 。

【例題 6】

化簡下列各式：

- (1) $9(x-8y+5)-3(2x-4y-7)$
- (2) $-2(3-4x+5y)-6(7-8x-9y)$

解：(1) 原式 = $9x-72y+45-6x+12y+21$
 $= 3x-60y+66$ 。

(2) 原式 = $-6+8x-10y-42+48x+54y$
 $= 56x+44y-48$ 。

【例題 7】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $3(7x - 2y) - 10x + 2y$

(2) $-(4x + 7y + 1) + 3y$

解：(1) $3(7x - 2y) - 10x + 2y$

$$= 21x - 6y - 10x + 2y$$

$$= 11x - 4y$$

(2) $-(4x + 7y + 1) + 3y$

$$= -4x - 7y - 1 + 3y$$

$$= -4x - 4y - 1$$

答：(1) $11x - 4y$ 。 (2) $-4x - 4y - 1$ 。**【例題 9】**

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $-13x + 8y - (-4x + y)$

$$= -13x + 8y + 4x - y$$

$$= -9x + 7y$$

(2) $-(-5x - 4y) - 6(-x + 2y)$

$$= 5x + 4y + 6x - 12y$$

$$= 11x - 8y$$

【例題 11】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $-(2x + 7y + 2) + 2(6x - 3y - 5)$

$$= -2x - 7y - 2 + 12x - 6y - 10$$

$$= 10x - 13y - 12$$

(2) $-2(3 + 5x - 4y) - 6(7 - 8x + 9y)$

$$= -6 - 10x + 8y - 42 + 48x - 54y$$

$$= 38x - 46y - 48$$

【例題 8】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $5x - y - x + 2y$

(2) $-(3x - 7y + 2) - 2y$

解：(1) $5x - y - x + 2y$

$$= 4x - y$$

(2) $-(3x - 7y + 2) - 2y$

$$= -3x + 7y - 2 - 2y$$

$$= -3x + 5y - 2$$

答：(1) $4x - y$ 。 (2) $-3x + 5y - 2$ 。**【例題 10】**

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $4(3y - x) - 5(-x + 6y)$

$$= 12y - 4x + 5x - 30y$$

$$= x - 18y$$

(2) $-2(7x - 9y) - 3(4x - 5y)$

$$= -14x + 18y - 12x + 15y$$

$$= -26x + 33y$$

【例題 12】

化簡下列各二元一次方程式：

(1) $7(x - 8y + 3) - 3(2x - 3y - 7)$

$$= 7x - 56y + 21 - 6x + 9y + 21$$

$$= x - 47y + 42$$

(2) $(4x + 6y + 3) - 4(x - 5y - 4)$

$$= 4x + 6y + 3 - 4x + 20y + 16$$

$$= 26y + 19$$