

■ 解二元一次聯立方程式

二元一次方程式的解：

如 $5x + 8y = 0$ 和 $5x - 4y + 2 = 0$ 這類的式子具有 $ax + by + c = 0$ 的樣式，它們都含有兩個未知數(二元)，且每個未知數的次數都是 1(一次)，我們稱它們為二元一次方程式。

【範例】：給二元一次方程式： $5x - 4y + 2 = 0$ 求此方方程式的解？

x	0	1	2	3	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	2	$\frac{14}{5}$...
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{17}{4}$	0	1	2	3	4	...

注意：二元一次方程式若沒有特別的限制通常有無限多個解。

【範例】：5 元郵票 x 張，2 元郵票 y 張，郵票面額總值 32 元。則 x 與 y 分別可能為多少？

解： $5x + 2y = 35$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	$\frac{35}{2}$	15	$\frac{25}{2}$	10	$\frac{15}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-5

在此郵票必須是正整數，因此在此限制下可能的解為：

$$(x, y) = (1, 15)$$

$$(x, y) = (3, 10)$$

$$(x, y) = (5, 5)$$

$$(x, y) = (7, 0)$$

因此我們有 4 個解。

二元一次聯立方程式：

當用兩個未知數，列出兩個二元一次方程式來表示情境中的數量關係時，我們就把這兩個方程式並列時，且稱並列在一起的方程式為二元一次聯立方程式，或二元一次方程組。

【範例】： $x + y = 100$

$$3x + \frac{1}{3}y = 100,$$

我們稱此二元一次聯立方程式。

二元一次聯立方程式的解：

若有一組 x 、 y 值能使得聯立方程式中，兩個方程式的等號都成立，則這一組 x 、 y 值就是此聯立方程式的解。一般而言，一個二元一次聯立方程式的解可能有一組解，也可能出現無解或是無限多組解。

【範例】： (1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

第(1)組聯立方程式只有一組解。

第(2)組聯立方程式為無解解。

第(3)組聯立方程式有無限多組解。

解二元一次聯立方程式：

求出聯立方程式的解的過程，就叫做解聯立方程式。

通常，將兩個未知數設法變成一個未知數，利用解一元一次方程式的解法先解出一個未知數，然後再解第二個未知數。

【代入消去法】：

【範例】：『肆中聽得語吟吟，薄酒名醜厚酒醇。好酒一瓶醉三客，薄酒三瓶醉一人，共同飲了一十九，三十三客醉醺醺。』，能否依此列出算式，能知薄酒幾瓶？厚酒幾瓶？

解： 設薄酒 x 瓶，厚酒 y 瓶。

$$\begin{cases} x + y = 19 \cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{3}x + 3y = 33 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1) 可得 $y = 19 - x$ 將其代入(2)，我們可得：

$$\frac{1}{3}x + 3(19 - x) = 33$$

$$\frac{1}{3}x - 3x = 33 - 57$$

$$-\frac{8}{3}x = -24$$

$$x = 9$$

將 $x = 9$ 代入(1)，我們可得： $9 + y = 19$

$$y = 10$$

故 $x = 9$ ， $y = 10$ 為二元聯立方程組的解，故薄酒 9 瓶，厚酒 10 瓶。

【範例】：雞兔同籠，頭共 35，腳共 110，問雞兔各幾隻？

解：設雞有 x 隻，兔有 y 隻。

$$\begin{cases} x + y = 35 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x + 4y = 110 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1)可得 $x = 35 - y$ 將其代入(2)，我們可得：

$$2(35 - y) + 4y = 110$$

$$70 - 2y + 4y = 110$$

$$2y = 110 - 70$$

$$y = 20$$

將 $y = 20$ 代入(1)，我們可得： $x + 20 = 35$

$$x = 15$$

故 $x = 15$ ， $y = 20$ 為二元聯立方程組的解，

故雞有 15 隻，兔有 20 隻。

【範例】：解下列各二元一次聯立方程式

$$(a) \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

解：(a) $\begin{cases} 3x + 2y = 13 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ x - 3y = -3 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(2)可得 $x = -3 + 3y$ 將其代入(1)，我們可得：

$$3(-3 + 3y) + 2y = 13$$

$$-9 + 9y + 2y = 13$$

$$11y = 13 + 9$$

$$y = 2$$

將 $y = 2$ 代入(2)，我們可得： $x - 6 = -3$

$$x = 3$$

故 $x = 3$ ， $y = 2$ 為二元聯立方程組的解。

$$(b) \begin{cases} 3x + y = 10 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ x - 2y = -5 & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(2)可得 $x = -5 + 2y$ 將其代入(1)，我們得：

$$3(-5 + 2y) + y = 10$$

$$-15 + 6y + y = 10$$

$$7y = 10 + 15$$

$$y = \frac{25}{7}$$

$$\text{將 } y = \frac{25}{7} \text{ 代入(1)，我們有 } 3x + \frac{25}{7} = 10$$

$$x = \frac{15}{7}$$

$$\text{故 } x = \frac{15}{7}, y = \frac{25}{7} \text{ 為二元聯立方程組的解。}$$

【加減消去法】：

【說明】：將二元一次聯立方程組的兩式分別乘除幾倍，兩式相加或相減，使兩個未知數變成一個未知數。利用解一元一次方程式的解法先解出一個未知數，然後再解第二個未知數。

【範例】：『三足團魚六眼龜，共同山下一深池。九十三足亂浮水，一百二眼將人窺。或出或沒往東西，依欄觀看不能知。有人算得無差錯，將酒重斟贈數杯。』，能否依此「鷓鴣天」古曲列出算式？

解：設三足團魚有 x 條，六眼龜有 y 隻。

$$\begin{cases} 3x + 4y = 93 & \cdots\cdots(1) \\ 2x + 6y = 102 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘3，將(2)乘2，可得：

$$\begin{cases} 9x + 12y = 279 & \cdots\cdots(1*) \\ 4x + 12y = 204 & \cdots\cdots(2*) \end{cases}$$

將(1*)減(2*)，可得：

$$\begin{aligned} (9x + 12y) - (4x + 12y) &= 279 - 204 \\ 9x + 12y - 4x - 12y &= 75 \\ 5x &= 75 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

將 $x = 15$ 代入(1)，我們可得： $45 + 4y = 93$

$$4y = 48$$

$$y = 12$$

故三足團魚有 15 條，六眼龜有 12 隻。

【範例】：解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

解 (1)：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 & \cdots\cdots(1) \\ x - 3y = -3 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘3，將(2)乘2，可得：

$$\begin{cases} 9x + 6y = 39 \cdots\cdots(1*) \\ 2x - 6y = -6 \cdots\cdots(2*) \end{cases}$$

將(1*)相加(2*)，可得：

$$\begin{aligned} (9x + 6y) + (2x - 6y) &= 39 - 6 \\ 9x + 2x + 6y - 6y &= 33 \\ 11x &= 33 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

將 $x=3$ 代入(1)，我們可得： $9 + 2y = 13$

$$y = 2$$

故 $x=3$ ， $y=2$ 為二元聯立方程組的解。

解 (2)：

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \cdots\cdots(1) \\ x - 2y = -5 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(1)乘1，將(2)乘3，可得：

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \cdots\cdots(1*) \\ 3x - 6y = -15 \cdots\cdots(2*) \end{cases}$$

將(1*)減(2*)，可得：

$$\begin{aligned} (3x + y) - (3x - 6y) &= 10 - (-15) \\ 7y &= 25 \\ y &= \frac{25}{7} \end{aligned}$$

將 $y = \frac{25}{7}$ 代入(1)，我們可得： $3x + \frac{25}{7} = 10$

$$x = \frac{15}{7}$$

故 $x = \frac{15}{7}$ ， $y = \frac{25}{7}$ 為二元聯立方程組的解。

【範例】：誠誠與愛愛到商店買餅乾跟飲料，誠誠買餅乾8包，飲料5瓶，共186元
愛愛買餅乾4包，飲料7瓶，共174元，請餅乾一包幾元飲料一瓶幾元？

解：設餅乾1包 x 元，飲料1瓶 y 元。

$$\begin{cases} 8x + 5y = 186 \cdots\cdots(1) \\ 4x + 7y = 174 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

將(2)乘2，可得：

$$\begin{cases} 8x + 5y = 186 \cdots \cdots (1) \\ 8x + 14y = 348 \cdots \cdots (2*) \end{cases}$$

將(2*)減(1)，可得：

$$\begin{aligned} (8x + 14y) - (8x + 5y) &= 348 - 186 \\ 8x - 8x + 14y - 5y &= 162 \\ 9y &= 162 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

將 $y = 18$ 代入(1)，我們可得：

$$\begin{aligned} 8x + 5 \times 18 &= 186 \\ 8x &= 96 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

故 $x = 12$ ， $y = 18$ 為二元聯立方程組的解，也就是題目所求的答案。

答：餅乾 1 包 12 元，飲料 1 瓶 18 元

【範例】：小青、小慧一起到芙蘿蕾花店買花，小青買了 4 朵百合和 6 朵劍蘭，付了 132 元；小慧買了 6 朵百合和 4 朵劍蘭，付了 138 元，那麼百合、劍蘭 1 朵各賣多少元？

解：設百合 1 朵 x 元，劍蘭 1 朵 y 元。

$$\begin{cases} 4x + 6y = 132 \cdots \cdots (1) \\ 6x + 4y = 138 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

將(1)、(2)相加可得： $10x + 10y = 270$

$$x + y = 27 \cdots \cdots (3)$$

將(1) - 4×(3)可得： $2y = 24$

$$y = 12$$

將 $y = 12$ 代入(3)可得： $x = 15$

答：百合 1 朵 12 元，劍蘭 1 朵 15 元。

【範例】：若甲數的 5 倍等於乙數的 4 倍，且甲數 3 倍比乙數的 2 倍多 1，請問甲、乙二數各是多少？

解：設甲數是 x ，乙數是 y 。

$$\begin{cases} 5x = 4y \\ 3x = 2y + 1 \end{cases}$$

移項後可得：

$$\begin{cases} 5x - 4y = 0 \cdots \cdots (1) \\ 3x - 2y = 1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

將 (2)×2-(1) 可得：

$$2(3x - 2y) - (5x - 4y) = 2$$

$$6x - 4y - 5x + 4y = 2$$

$$x = 2$$

將 $x = 2$ 代入(1)可得： $y = \frac{5}{2}$

答：甲數是 2，乙數是 $\frac{5}{2}$ 。

【範例】：便利商店賣果汁和牛奶，果汁每盒可賺 4 元，牛奶每盒可賺 3 元，今天便利商店賣出的牛奶盒數是果汁的 2 倍，一共賺了 1000 元，請問今天各賣出多少盒的果汁和牛奶？

解：設賣出果汁 x 盒，賣出牛奶 y 盒。

$$\begin{cases} 2x = y \\ 4x + 3y = 1000 \end{cases}$$

移項後可得：

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \cdots \cdots (1) \\ 4x + 3y = 1000 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

將 (2)-(1)×2 可得：

$$(4x + 3y) - 2(2x - y) = 1000$$

$$4x + 3y - 4x + 2y = 1000$$

$$5y = 1000$$

$$y = 200$$

將 $y = 200$ 代入(1)可得：

$$2x - y = 0$$

$$2x - 200 = 0$$

$$x = 100$$

答：賣出果汁 100 盒，賣出牛奶 200 盒



小 試 身 手

【例題 1】

(1) 若 $x = -1$, $y = 2$ 為方程式 $6x = ay + 4$ 的解, 求 a 之值。

(2) 若 $x = 2$, $y = 3$ 是二元一次方程式 $ax + by = 5$ 的一組解,

求 $2(4a - 3b + 5) + 4(a + 6b - 3)$ 之值。

解: (1) 將 $x = -1$, $y = 2$ 代入方程式 $6x = ay + 4$ 中

$$\therefore -6 = 2a + 4 \Rightarrow a = -5$$

(2) 將 $x = 2$, $y = 3$ 代入方程式 $ax + by = 5$ 中 $\therefore 2a + 3b = 5$

$$\begin{aligned} \therefore 2(4a - 3b + 5) + 4(a + 6b - 3) &= 8a - 6b + 10 + 4a + 24b - 12 \\ &= 12a + 18b - 2 = 6(2a + 3b) - 2 = 6 \times 5 - 2 = 28 \end{aligned}$$

答: (1) $a = -5$ 。 (2) $2(4a - 3b + 5) + 4(a + 6b - 3)$ 之值為 28。

【例題 2】

(1) 方程式 $5x - 3y = 1$ 的一組解為 $x = a$, $y = -7$, 求 a 之值。

(2) 若 $1.23x + 4.56y - 369 = 555$, 求 $12.3x + 45.6y + 369$ 之值。

解: (1) 將 $x = a$, $y = -7$ 代入方程式 $5x - 3y = 1$ 中

$$\therefore 5a + 21 = 1 \Rightarrow a = -4$$

(2) 將 $1.23x + 4.56y - 369 = 555$ 乘上 10 倍

$$\text{得到 } 12.3x + 45.6y = 9240$$

$$\therefore 12.3x + 45.6y + 369 = 9240 + 369 = 9609$$

答: (1) a 之值為 -4 。 (2) $12.3x + 45.6y + 369$ 之值為 9609。

【例題 3】

請在下列空格處填入各算式所代表的數:

	x	-2	3	-1	$\frac{2}{3}$
	y	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
算式					
	$x - 3y$	-5	6	0	$-\frac{5}{6}$
	$-x + 2y$	4	-5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

【例題 4】

請在下列空格處填入各算式所代表的數：

x	-3	1	-2	$-\frac{1}{3}$
y	4	-2	$-\frac{2}{3}$	3
算式				
$-3x - y$	5	-1	$6\frac{2}{3}$	-2
$2x - y$	-10	4	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{3}$

【例題 5】

- (1) 已知五元的硬幣 x 個，十元的硬幣 y 個，共計 430 元，則 x 與 y 的關係可列出一個二元一次方程式： $5x + 10y = 430$ 。
- (2) 承第(1)題，若五元的硬幣有 20 個，則十元的硬幣有 33 個。
- (3) 承第(1)題，若十元的硬幣有 32 個，則五元硬幣有 22 個。

【例題 6】

已知一長方形的周長為 52，且長比寬的 3 倍少 6，請依次回答下列各題：

- (1) 設寬是 x ，則長為 $3x - 6$ ，可列出一元一次方程式為 $2(3x - 6) + 2x = 52$ ，並解得長是 18 ，寬是 8 。
- (2) 設長是 x ，寬是 y ，則 x 與 y 的關係可列式得二元一次聯立方程式為 $\begin{cases} 2(x + y) = 52 \\ x = 3y - 6 \end{cases}$ 。並解得長是 18 ，寬是 8 。

【例題 7】

$x = 2$ 、 $y = -1$ 是下列哪些聯立方程式的解？

(A)

$$\begin{cases} x = -2y \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} 5x = -4y + 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} x = -y + 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(D)

$$\begin{cases} 2x = -4y \\ -2x + 3y = -7 \end{cases}$$

答：(A) (D)

【例題 8】

$x=0$ 、 $y=4$ 是下列哪些聯立方程式的解？

(A)

$$\begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

(C)

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

答：(A) (B)

(B)

$$\begin{cases} x = -4y + 16 \\ 7x - 2y = -8 \end{cases}$$

(D)

$$\begin{cases} 2x = -4y + 2 \\ -3x + y = 7 \end{cases}$$

【例題 9】

用代入消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 4x = y \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 6x + 3y = 36 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解：將①代入②

$$\text{得到 } 6x + 12x = 36 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore 18x = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ 代入①}$$

$$\text{得到 } y = 8$$

$$\text{答：} \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}。$$

$$\begin{cases} x = -y + 6 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x - y = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解：將①代入②

$$\text{得到 } -y + 6 - y = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore 2y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 \text{ 代入①}$$

$$\text{得到 } x = 3$$

$$\text{答：} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}。$$

【例題 10】

用代入消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x - 3y = -3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解：由②得到 $x = 3y - 3 \cdots \cdots \textcircled{3}$ 代入①

$$\text{得到 } 3(3y - 3) + 2y = 13$$

$$\therefore 11y = 22$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdots \cdots \textcircled{4} \text{ 代入③}$$

$$\therefore x = 3$$

$$\text{答：} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}。$$

$$\begin{cases} 2x = y - 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y = 5 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解：由①得到 $y = 2x + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$ 代入②

$$\text{得到 } 3x - 2(2x + 1) = 5$$

$$\therefore -x = 7$$

$$\Rightarrow x = -7 \cdots \cdots \textcircled{4} \text{ 代入③}$$

$$\therefore y = -13$$

$$\text{答：} \begin{cases} x = -7 \\ y = -13 \end{cases}。$$

【例題 11】

用加減消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \cdots \cdots ① \\ 2x - 3y = 23 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

解：將①×3 得到 $9x + 6y = 6 \cdots \cdots ③$
 將②×2 得到 $4x - 6y = 46 \cdots \cdots ④$
 將③+④ 得到 $13x = 52$
 $\therefore x = 4 \cdots \cdots ⑤$ 代入①
 得到 $12 + 2y = 2 \Rightarrow y = -5$

答： $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$ 。

$$\begin{cases} 3x - y = x + 2y - 5 \cdots \cdots ① \\ 3x + 3y = -2x - y + 22 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

解：由①得到 $2x - 3y = -5 \cdots \cdots ③$
 由②得到 $5x + 4y = 22 \cdots \cdots ④$
 將③×4 得到 $8x - 12y = -20 \cdots \cdots ⑤$
 將④×3 得到 $15x + 12y = 66 \cdots \cdots ⑥$
 將⑤+⑥ 得到 $23x = 46$

$\therefore x = 2$ 代入③
 得到 $4 - 3y = -5$
 $\therefore y = 3$

答： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 。

【例題 12】

用加減消去法解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{23}{12} \cdots \cdots ① \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{13}{6} \cdots \cdots ② \end{cases}$$

解：將①×24 得到 $8x + 6y = 46 \cdots \cdots ③$
 將②×18 得到 $9x - 6y = 39 \cdots \cdots ④$
 將③+④ 得到 $17x = 85$
 $\therefore x = 5 \cdots \cdots ⑤$ 代入③
 得到 $40 + 6y = 46 \Rightarrow y = 1$

答： $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ 。

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2} \cdots \cdots ① \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{2}{3} \cdots \cdots ② \end{cases}$$

解：將①×36 得到 $9x + 12y = 18 \cdots \cdots ③$
 將②×24 得到 $8x - 12y = 16 \cdots \cdots ④$
 將③+④ 得到 $17x = 34$
 $\therefore x = 2 \cdots \cdots ⑤$ 代入③
 得到 $18 + 12y = 18 \Rightarrow y = 0$

答： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ 。

【例題 13】

一長方形園地，若長減 40 公尺，寬加 30 公尺，則形成與原長方形同面積的正方形，試問長方形的長與寬各是多少公尺？

解：設長為 x 公尺，寬為 y 公尺

則 $x - 40 = y + 30 \Rightarrow x - y = 70 \cdots \cdots ①$
 $(x - 40)(y + 30) = xy \Rightarrow 30x - 40y = 1200 \Rightarrow 3x - 4y = 120 \cdots \cdots ②$

將①×4 得到 $4x - 4y = 280 \cdots \cdots ③$
 $\therefore ③ - ②$ 得到 $x = 160$ 代入① $y = 90$

答：長為 160 公尺，寬為 90 公尺。

【例題 14】

珮玲比她的妹妹珮玉大 3 歲，她們的年齡和是 27 歲。試問她們的年齡各是幾歲？

解：設珮玉 x 歲，珮玲 y 歲

$$\therefore y = x + 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x + y = 27 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

將①代入② 得到 $x + x + 3 = 27 \Rightarrow x = 12$ 代入①得到 $y = 15$

答：珮玉 12 歲，珮玲 15 歲。

【例題 15】

甲、乙二人各有若干元，若乙給甲 10 元，則甲所有錢是乙所有錢的 6 倍；若甲給乙 10 元，則甲所有錢比乙所有錢的 3 倍多 10 元，問甲、乙原來各有多少元？

解：設甲原來有 x 元，乙原來有 y 元

$$\therefore x + 10 = 6(y - 10) \Rightarrow x - 6y = -70 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 10 = 3(y + 10) + 10 \Rightarrow x - 3y = 50 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

將②-① 得到 $3y = 120 \Rightarrow y = 40$ 代入① $x = 170$

答：甲原來有 170 元，乙原來有 40 元。

【例題 16】

琦琦、誠誠和同學參加春季旅行，在同一家商店買相同的餅乾、汽水琦琦買餅乾 8 包、汽水 5 瓶共 186 元；誠誠買餅乾 4 包、汽水 7 瓶共 174 元。請幫琦琦、誠誠算一算，餅乾一包、汽水一瓶各多少錢？

解：設餅乾一包 x 元、汽水一瓶 y 元

$$\therefore 8x + 5y = 186 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$4x + 7y = 174 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

將② $\times 2$ 得到 $8x + 14y = 348 \cdots \cdots \textcircled{3}$

將③-① 得到 $9y = 162 \Rightarrow y = 18$ 代入① $x = 12$

答：餅乾一包 12 元、汽水一瓶 18 元。

【例題 17】

已知某二位數，其十位數字的 3 倍與其個位數字的和是 21，它的個位數字與十位數字對調後的新數比原數大 9，問原數是多少？

解：設原數的十位數字為 x ，個位數字為 y

$$\begin{cases} 3x + y = 21 \\ (10y + x) - (10x + y) = 9 \end{cases}$$

$$x = 5, y = 6$$

$$\therefore 5 \times 10 + 6 = 56$$

【例題 18】

美茹、曉菁、佳雯三姐妹共有 264 元，若美茹給曉菁 10 元，佳雯買日用品花掉原有錢的 $\frac{2}{5}$ 後，三姐妹的錢數就相等了，問原來三姐妹各有多少錢？

解：設美茹原有 x 元，曉菁原有 y 元，佳雯原有 $(264 - x - y)$ 元

$$\begin{cases} x - 10 = y + 10 \\ \frac{3}{5}(264 - x - y) = y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \cdots \cdots (1) \\ 3x + 8y = 742 \cdots (2) \end{cases}$$

由 (1) $\times 3$ 得 $3x - 3y = 60 \cdots (3)$

(2) $-$ (3) 得 $11y = 682$ ， $y = 62$

$y = 62$ 代入 (1) 得 $x - 62 = 20$ ， $x = 82$ ，

$$264 - 82 - 62 = 120$$

\therefore 美茹原有 82 元，曉菁原有 62 元，佳雯原有 120 元

【例題 19】

某年聖誕舞會，男、女生的票價不同，例如：6 位男生和 5 位女生一同參加，則門票共 1220 元，若是臨時走了 2 位女生，而多來了 3 位男生，則門票要多繳 160 元，則男、女生票價各是多少元？

解：設男生票價 x 元，女生票價 y 元

$$\begin{cases} 6x + 5y = 1220 \\ 9x + 3y = 1220 + 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 1220 \cdots \cdots (1) \\ 9x + 3y = 1380 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

由 (1) $\times 3$ 得 $18x + 15y = 3660 \cdots (3)$

由 (2) $\times 2$ 得 $18x + 6y = 2760 \cdots (4)$

(3) $-$ (4) 得 $9y = 900$ ， $y = 100$

$y = 100$ 代入 (4) 得 $18x + 600 = 2760$ ， $x = 120$

\therefore 男生票價 120 元，女生票價 100 元

【例題 20】

小新和妮妮去買早餐，小新買 1 杯奶茶和 2 個三明治，拿 100 元付帳，老闆找他 49 元，妮妮拿 500 元買 6 杯奶茶和 7 個三明治，老闆找她 284 元，如果風間拿 1000 元買 3 杯奶茶和 5 個三明治，老闆應找他多少元？

解：設 1 杯奶茶 x 元，1 個三明治 y 元

$$\begin{cases} x + 2y = 100 - 49 \\ 6x + 7y = 500 - 284 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 51 \cdots \cdots (1) \\ 6x + 7y = 216 \cdots (2) \end{cases}$$

由 (1) $\times 6$ 得 $6x + 12y = 306 \cdots (3)$

(3) $-$ (2) 得 $5y = 90$ ， $y = 18$

$y = 18$ 代入 (1) 得 $x + 36 = 51$ ， $x = 15$

$$1000 - 3 \times 15 - 5 \times 18 = 865 \text{ (元)}$$

高斯消去法解二元一次聯立方程式

高斯消去法的形式：

將一組聯立方程式： $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ 的形式，其中 a_1 、 a_2 是 x 項的係數

， b_1 、 b_2 是 y 項的係數， c_1 、 c_2 是常數項。

利用高斯消去法解二元一次聯立方程組：

【範例】：利用高斯消去法解： $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$ 。

解：將 $\begin{cases} x + y = 3 \wedge \wedge (1) \\ x - y = 7 \wedge \wedge (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1)加到(2)可得：

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases} && \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x = 10 \end{cases} && \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*) \\ &2x = 10 && 2x = 10 \\ &x = 5 && x = 5 \end{aligned}$$

在(*)式子中： x 項的係數是 2， y 項的係數是 0，常數項的係數是 10。

則可得： $2x = 10$

$$x = 5。$$

將 $x = 5$ 代回原式可得： $x + y = 3$

$$5 + y = 3$$

$$y = 3 - 5$$

$$y = -2。$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y) = (5, -2)$ 。

【範例】：利用高斯消去法解： $\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 110 \end{cases}$ 。

解：將 $\begin{cases} x + y = 35 \wedge \wedge \wedge (1) \\ 2x + 4y = 110 \wedge \wedge (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 110 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1) $\times(-2)$ 之後，加到(2)可得：

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=110 \end{cases} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 2 & 4 & 110 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y=35 \\ 2y=40 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*) \\ & 2y=40 & 2y=40 \\ & y=20 & y=20 \end{aligned}$$

在(*)式子中： x 項的係數是0， y 項的係數是2，常數項的係數是40。

則可得： $2y=40$

$$y=20。$$

將 $y=20$ 代回原式可得： $x+y=35$

$$x+20=35$$

$$x=35-20$$

$$x=15。$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y)=(20, 15)$ 。

【範例】：利用高斯消去法解： $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$ 。

解：將 $\begin{cases} x-3y=-3 \wedge (1) \\ 3x+2y=13 \wedge (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1) $\times(-3)$ 之後，加到(2)可得：

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x+2y=13 \end{cases} & \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 13 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-3y=-3 \\ 11y=22 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*) \\ & 11y=22 & 11y=22 \\ & y=2 & y=2 \end{aligned}$$

在(*)式子中：第二列的 x 項的係數是0， y 項的係數是11，常數項的係數是22。

則可得： $11y=22$

$$y=2。$$

將 $y=2$ 代回原式可得： $x-3y=-3$

$$x-6=-3$$

$$x=-3+6$$

$$x=3。$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y)=(2, 3)$ 。

【範例】：利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

解：將
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \wedge \wedge (1) \\ x + 2y + 2z = 2 \wedge \wedge (2) \\ x + y + 2z = 1 \wedge \wedge (3) \end{cases}$$
 改寫成
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
 的形式。

再將(1) $\times(-1)$ 之後，加到(2)與(3)可得：

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = 0 \\ z = -1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

$$\therefore z = -1$$

$$\therefore y + z = 0$$

$$y + (-1) = 0$$

$$y = 1$$

$$\text{則 } x + y + z = 2$$

$$x + 1 + (-1) = 2$$

$$x = 2$$

$$\therefore z = -1$$

$$\therefore y + z = 0$$

$$y + (-1) = 0$$

$$y = 1$$

$$\text{則 } x + y + z = 2$$

$$x + 1 + (-1) = 2$$

$$x = 2$$

在(*)式子中：第三列的 x 項的係數是0， y 項的係數是0， z 項的係數是1，常數項的係數是-1，則可得： $z = -1$ 。

在(*)式子中：第二列的 x 項的係數是0， y 項的係數是1， z 項的係數是1，常數項的係數是0，則可得：

$$y + z = 0$$

$$y + (-1) = 0$$

$$y = 1$$

在(*)式子中：第一列的 x 項的係數是1， y 項的係數是1， z 項的係數是1，常數項的係數是2，則可得：

$$x + y + z = 2$$

$$x + 1 + (-1) = 2$$

$$x = 2$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y, z) = (2, 1, -1)$ 。

【範例】：利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

解：將
$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \wedge (1) \\ x - 2y + z = 1 \wedge (2) \\ x + y - z = 2 \wedge (3) \end{cases}$$
 改寫成
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
 的形式。

再將(3)乘以(-1)之後，加到(1)可得：

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*)$$

再將(3)加到(2)可得：

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdots \cdots (*)$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore 2x - y = 0$$

$$y = 2$$

$$\text{則 } x + y - z = 2$$

$$x + 1 + (-1) = 2$$

$$z = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore 2x - y = 0$$

$$y = 2$$

$$\text{則 } x + y - z = 2$$

$$x + 1 + (-1) = 2$$

$$z = 1$$

在(*)式子中：第一列的 x 項的係數是1， y 項的係數是0， z 項的係數是0，常數項的係數是1，則可得： $x = 1$ 。

在(*)式子中：第二列的 x 項的係數是2， y 項的係數是-1， z 項的係數是0，常數項的係數是3，則可得： $2x - y = 0$

$$\therefore x = 1, \therefore y = 2。$$

在(*)式子中：第三列的 x 項的係數是1， y 項的係數是1， z 項的係數是-1，常數項的係數是2，則可得： $x + y - z = 2$

$$\therefore x = 1, y = 2, \therefore z = 1。$$

故此聯立方程式的解為 $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ 。



小 試 身 手

【例題 1】

利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} 3x + 4y = 93 \\ 2x + 6y = 102 \end{cases}。$$

解：將 $\begin{cases} 3x + 4y = 93 \cdots \cdots (1) \\ 2x + 6y = 102 \cdots \cdots (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 93 \\ 2 & 6 & 102 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(2) $\times(-\frac{3}{2})$ 之後，加到(1)可得：

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 93 \\ 2 & 6 & 102 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -5 & -60 \\ 2 & 6 & 102 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -5y = -60 \quad y = 12 \text{ 代入(2)}$$

$$\therefore 2x + 72 = 102 \quad x = 15$$

答： $x = 15$ ， $y = 12$ 。

【例題 2】

利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 5y = 13 \end{cases}。$$

解：將 $\begin{cases} x - 3y = 3 \cdots \cdots (1) \\ 2x - 5y = 13 \cdots \cdots (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 13 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1) $\times(-2)$ 之後，加到(2)可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore y = 7 \text{ 代入(1)}$$

$$\therefore x - 21 = 3 \quad x = 24$$

答： $x = 24$ ， $y = 7$ 。

【例題 3】

利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} 8x+5y=186 \\ 4x+7y=174 \end{cases}。$$

解：將 $\begin{cases} 8x+5y=186 \cdots \cdots (1) \\ 4x+7y=174 \cdots \cdots (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 186 \\ 4 & 7 & 174 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(2) $\times(-2)$ 之後，加到(1)可得：

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 186 \\ 4 & 7 & 174 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -9 & -162 \\ 4 & 7 & 174 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -9y = -162 \quad \therefore y = 7 \text{ 代入(1)}$$

$$\therefore x - 21 = 3 \quad x = 24$$

答： $x=24$ ， $y=7$ 。

【例題 4】

利用高斯消去法解：
$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 3x+y=10 \end{cases}。$$

解：將 $\begin{cases} x-2y=-5 \cdots \cdots (1) \\ 3x+y=10 \cdots \cdots (2) \end{cases}$ 改寫成 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ 的形式。

再將(1) $\times(-3)$ 之後，加到(2)可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 7y = 25 \quad \therefore y = \frac{25}{7} \text{ 代入(1)}$$

$$\therefore x - \frac{50}{7} = -5 \quad x = \frac{15}{7}$$

答： $x = \frac{15}{7}$ ， $y = \frac{25}{7}$ 。