

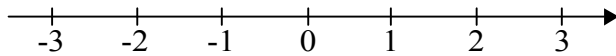
二元一次方程式的圖形

直線座標系

數線的作法：

數線的構成三要素：原點、方向、單位長。

1. 首先畫一直線，在線上任取一點作為「原點」，標示為 0。
2. 習慣上右邊的方向為此數線的「正向」，並標上箭頭表示。
3. 在數線上由原點依「相同的間隔」，依序向右標示 1, 2, 3, 4, ... 等，向左標示 -1, -2, -3, -4, ... 等，此「相同的間隔」即為單位長。
4. 數線上每一個點所代表之數，稱為該點的坐標。



直線座標系：

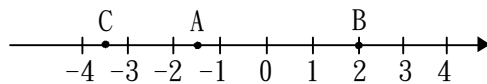
數線上的任意一點，都有一個數來表示它的位置，也就是說數線上的每一個點，都有一個座標。所以，數線也可以稱為直線座標系。

注意：如果數線上，它的位置用 a 來表示，可以說 P 點的座標為 a ，為了表示它的位置，可以將 P 點記為 $P(a)$ 。

【範例】：如下圖中，A 點所代表的數為 $-2\frac{1}{2}$ ，則 A 點坐標，記為 $A(-2\frac{1}{2})$ 。



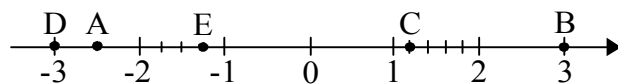
【範例】：寫出下列數線中 A B C 的座標。



解： A 的座標為 -1.5、B 的座標為 2、D 的座標為 -3.5、

【範例】：在下列數線上標出 $A(-2.5)$ 、 $B(3)$ 、 $C(1\frac{1}{5})$ 、 $D(-3)$ 、 $E(-1.25)$ 的點座標。

解： 如下圖所示

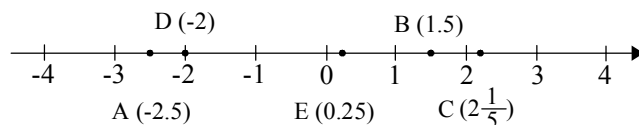




小試身手

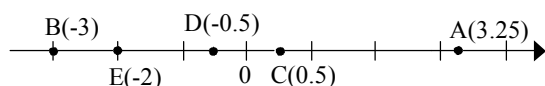
【例題 1】

在下列數線上標出 $A(-2.5)$ 、 $B(1.5)$ 、 $C(2\frac{1}{5})$ 、 $D(-2)$ 、 $E(0.25)$ 的點座標。



【例題 2】

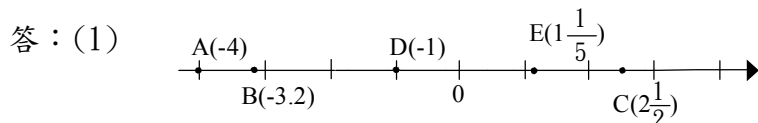
在下列數線上標出 $A(3.25)$ 、 $B(-3)$ 、 $C(0.5)$ 、 $D(-0.5)$ 、 $E(-2)$ 的點座標。



【例題 3】

(1) 試作一條數線，並在數線上標出 $A(-4)$ 、 $B(-3.2)$ 、 $C(2\frac{1}{2})$ 、 $D(-1)$ 、 $E(1\frac{1}{5})$ 五點的點座標。

(2) 試比較 $A(-4)$ 、 $B(-3.2)$ 、 $C(2\frac{1}{2})$ 、 $D(-1)$ 、 $E(-1\frac{1}{5})$ 五點的大小。

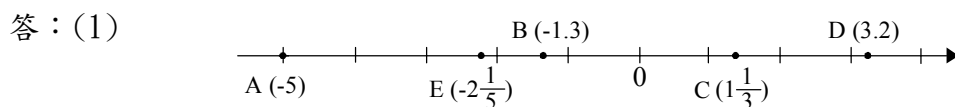


(2) $C > E > D > B > A$ 。

【例題 4】

(1) 試作一條數線，並在數線上標出 $A(-5)$ 、 $B(-1.3)$ 、 $C(1\frac{1}{3})$ 、 $D(-5.2)$ 、 $E(-1\frac{1}{5})$ 五點的點座標。

(2) 試比較 $A(-5)$ 、 $B(-1.3)$ 、 $C(1\frac{1}{3})$ 、 $D(3.2)$ 、 $E(-2\frac{1}{5})$ 五點的大小。



(2) $D > C > B > E > A$ 。

■ 平面座標系

平面座標系(直角座標系)：

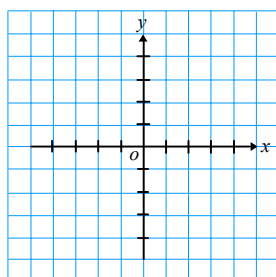
平面座標系是由一條水平的數線(x 軸)與一條鉛直的數線(y 軸)所構成， x 軸向右為正、向左為負， y 軸向上為正、向下為負， x 軸與 y 軸的交點 O 稱為原點(如圖)。

x 軸：水平的數線叫做 x 軸或橫軸。

y 軸：鉛直的數線叫做 y 軸或縱軸。

原點： x 軸與 y 軸的交點稱為此座標平面的原點，通常以英文字母 O 來表示，或 $O(0, 0)$ 來表示。

座標：從原點出發，沿 x 軸走 a 單位，再朝著平行 y 軸的方向走 b 單位，就到達 P 點， P 點的位置叫做 $P(a, b)$ ，其中第一個數 a 就叫做 P 點的 x 座標，第二個數 b 就叫做 P 點的 y 座標。

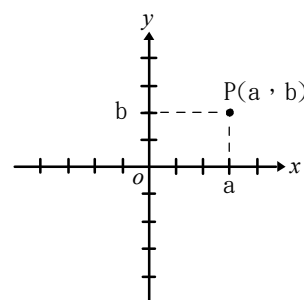


平面上點的座標表示法：

有序數對 (a, b) 稱為 P 點的座標，則記為 $P(a, b)$ ，

其中 a 稱為 P 的 x 座標(或橫座標)、 b 稱為 P 的 y 座

標(或縱座標)，原點 O 的座標為 $(0, 0)$ 。如右圖所示：



注意：在此所謂的有序數對指的是 $(-2, 3)$ 跟 $(3, -2)$ 所表示的是不同的點。

【範例】：在直角座標平面上標出 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $C(-4, 0)$ 、 $D(0, -2)$ 各點。

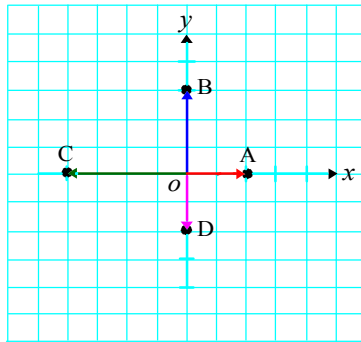
解：如圖所示，

$A(2, 0)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向2個單位長、 y 軸座標為0。

$B(0, 3)$ 的座標是從原點開始， y 軸正向3個單位長、 x 軸座標為0。

$C(-4, 0)$ 的座標是從原點開始， x 軸負向4個單位長、 y 軸座標為0。

$D(0, -2)$ 的座標是從原點開始， y 軸負向2個單位長、 x 軸座標為0。

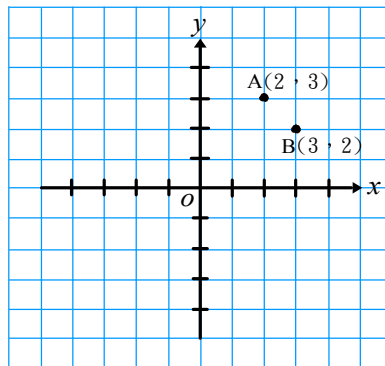


x 軸上的點座標為 $(a, 0)$ ， y 軸上的點座標為 $(0, b)$ 。

【範例】：在直角座標平面上標出 $A(2, 3)$ 、 $B(3, 2)$ 各點。

解：

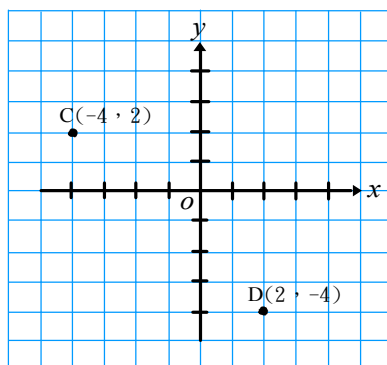
$A(2, 3)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向 2 個單位長、 y 軸正向 3 個單位長。
 $B(3, 2)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向 3 個單位長、 y 軸正向 2 個單位長。
 其中 $A(2, 3)$ 與 $B(3, 2)$ 是不同的點，如下圖所示。



【範例】：在直角座標平面上標出 $C(-4, 2)$ 、 $D(2, -4)$ 各點。

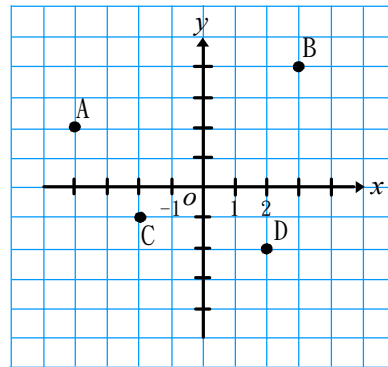
解：

$C(-4, 2)$ 的座標是從原點開始， x 軸負向 4 個單位長、 y 軸正向 2 個單位長。
 $D(2, -4)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向 2 個單位長、 y 軸負向 4 個單位長。
 $C(-4, 2)$ 與 $D(2, -4)$ 是不同的點，如下圖所示。



【範例】：寫出右圖中 ABCD 四個點的座標為多少？

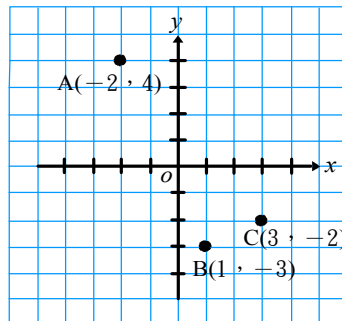
解：A 點座標 = $(-4, 2)$ ；
 B 點座標 = $(3, 4)$ ；
 C 點座標 = $(-2, -1)$ ；
 D 點座標 = $(2, -2)$ 。



【範例】：在座標平面上標出下列各點： $A(-2, 4)$ 、 $B(1, -3)$ 、 $C(3, -2)$

解：如圖所示，

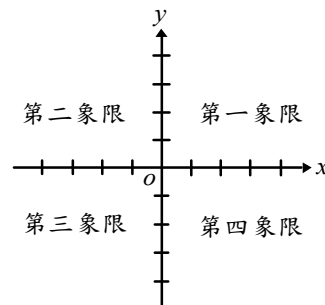
$A(-2, 4)$ 的座標是從原點開始， x 軸負向 2 個單位長、 y 軸正向 4 個單位長。
 $B(1, -3)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向 1 個單位長、 y 軸負向 3 個單位長。
 $C(3, -2)$ 的座標是從原點開始， x 軸正向 3 個單位長、 y 軸負向 2 個單位長。



直角座標平面上的象限：

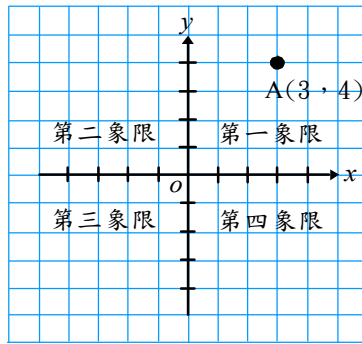
座標平面是由 x 軸與 y 軸分割成四個象限，從右上角開始，依逆時針方向的順序，稱為第一象限、第二象限、第三象限、第四象限(如右圖)，

- 第一象限座標 (a, b) ，其中 $a > 0$ 、 $b > 0$ 。
- 第二象限座標 (a, b) ，其中 $a < 0$ 、 $b > 0$ 。
- 第三象限座標 (a, b) ，其中 $a < 0$ 、 $b < 0$ 。
- 第四象限座標 (a, b) ，其中 $a > 0$ 、 $b < 0$ 。

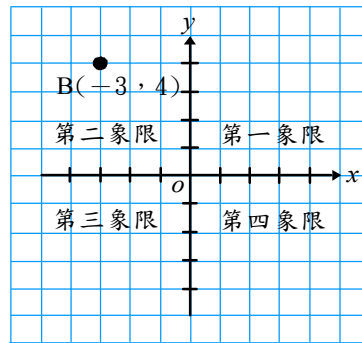


注意： x 軸與 y 軸上的點不屬於任何一個象限， x 軸上的點座標為 $(a, 0)$ ， y 軸上的點座標為 $(0, b)$ 。

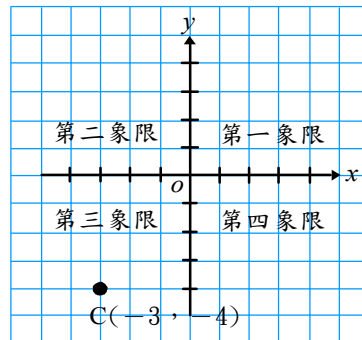
【範例】：圖中的 $A(3, 4)$ ， x 軸座標為正、 y 軸座標為正，所以 $A(3, 4)$ 落在第一象限上，如下圖所示。



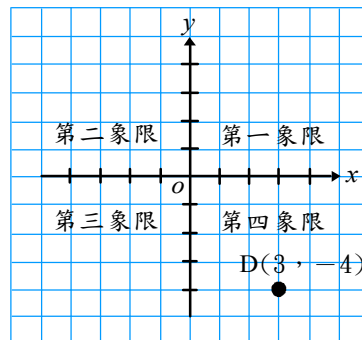
【範例】：圖中的 $B(-3, 4)$ ， x 軸座標為負、 y 軸座標為正，所以 $B(-3, 4)$ 落在第二象限上，如下圖所示。



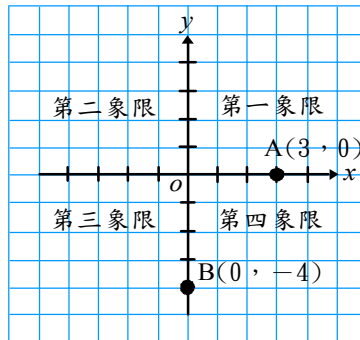
【範例】：圖中的 $C(-3, -4)$ ， x 軸座標為負、 y 軸座標為負，所以 $C(-3, -4)$ 落在第三象限上，如下圖所示。



【範例】：圖中的 $D(3, -4)$ ， x 軸座標為正、 y 軸座標為負，所以 $D(3, -4)$ 落在第四象限上，如下圖所示。

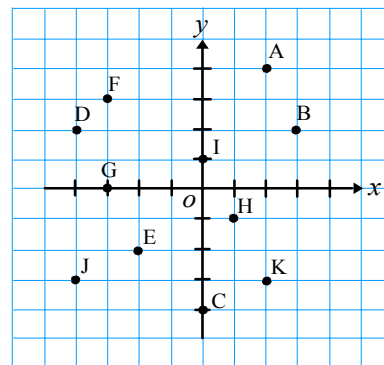


【範例】：圖中的 $A(3, 0)$ ， y 軸座標為 0 落在 x 軸上； $B(0, 4)$ ， x 軸座標為 0 落在 y 軸上，所以 $A(3, 0)$ 與 $B(0, 4)$ 不屬於任何一個象限，如下圖所示。



【範例】：請找出下圖中各點分別落在哪一個象限內或在哪一條座標軸上？

解：在第一象限內的點：A、B。
 在第二象限內的點：F、D。
 在第三象限內的點：E、J。
 在第四象限內的點：H、K。
 在 x 軸上的點：G。
 在 y 軸上的點：I、C。

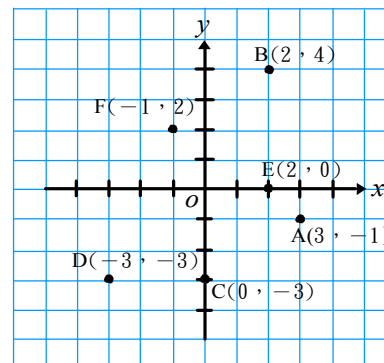


【範例】：請找出下列各點分別落在哪一個象限內或在哪一條座標軸上？

$A(3, -1)$ 、 $B(2, 4)$ 、 $C(0, -3)$ 、 $D(-3, -3)$ 、 $E(2, 0)$ 、 $F(-1, 2)$ 。

解：如圖所示

$A(3, -1)$ 在第四象限內，
 $B(2, 4)$ 在第一象限內，
 $C(0, -3)$ 在 y 軸上，
 $D(-3, -3)$ 在第三象限內，
 $E(2, 0)$ 在 x 軸上，
 $F(-1, 2)$ 在第二象限內。



點 $P(a, b)$ 到 x 軸的距離是 $|b|$ ，到 y 軸的距離是 $|a|$ 。

【範例】： $P(-120, 50)$ 。P 點到 x 軸的距離是 $|50| = 50$ ，

P 點到 y 軸的距離是 $|-120| = 120$ 。

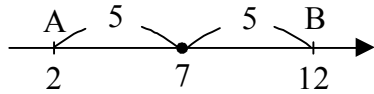
【範例】：已知 P 點在第二象限，且 P 點到 x 軸的距離是 6，P 點到 y 軸的距離是 4，則 P 點的座標為 $(-4, 6)$ 。

中點座標公式：

1. 在數線上 $A(a)$ 和 $B(b)$ 則線段 AB 的中點座標為： $(\frac{a+b}{2})$ 。

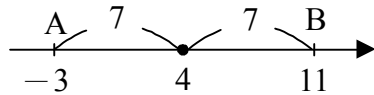
【範例】：數線上有 $A(2)$ 和 $B(12)$ 兩點，請求出 A 、 B 兩點的中點座標為何？

解： A 、 B 兩點的中點座標為： $\frac{2+12}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 。



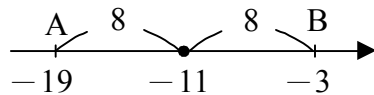
【範例】：數線上有 $A(-3)$ 和 $B(11)$ 兩點，請求出 A 、 B 兩點的中點座標為何？

解： A 、 B 兩點的中點座標為： $\frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4$ 。



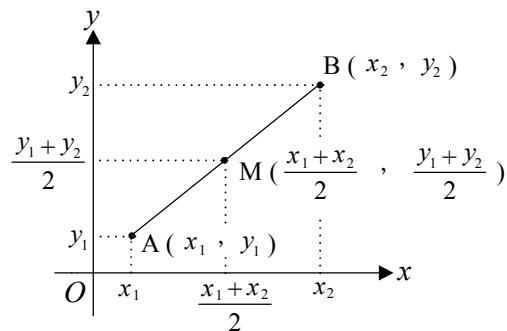
【範例】：數線上有 $A(-3)$ 和 $B(-19)$ 兩點，請求出 A 、 B 兩點的中點座標為何？

解： A 、 B 兩點的中點座標為： $\frac{-3+(-19)}{2} = \frac{-22}{2} = -11$ 。



2. 設座標平面上兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 \overline{AB} 的中點座標為：

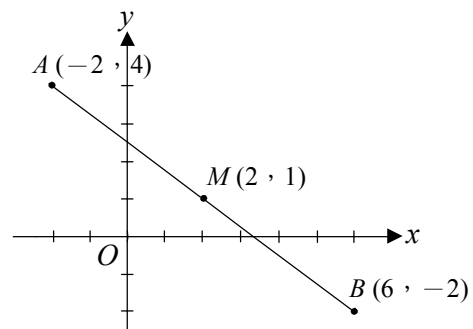
$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$



【範例】：設兩點座標為 $A(-2, 4)$ 、 $B(6, -2)$ ，請問 A 、 B 的中點座標為何？

解：利用中點公式， $M = (\frac{-2+6}{2}, \frac{4+(-2)}{2}) = (2, 1)$ 。

所以 A 、 B 的中點座標為 $(2, 1)$ 。

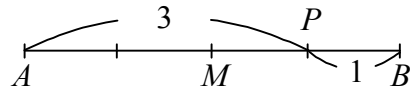
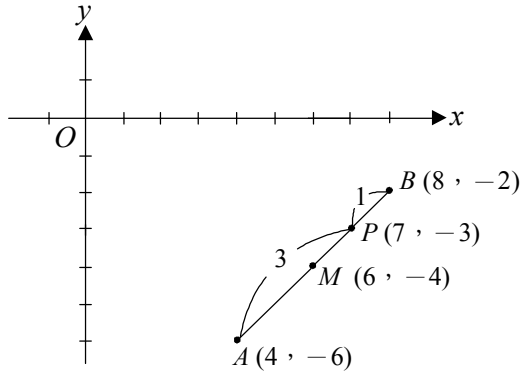


【範例】：設兩點座標為 $A(4, -6)$ 、 $B(8, -2)$ ， P 為 \overline{AB} 上一點，若 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$ ，則求 P 點座標？

解：先求出 \overline{AB} 的中點座標為 $M = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{(-6)+(-2)}{2} \right) = (6, -4)$ 。

在求出 \overline{MB} 的中點座標 P 為 $\left(\frac{6+8}{2}, \frac{(-4)+(-2)}{2} \right) = (7, -3)$ 。

答： P 點座標為 $(7, -3)$ 。



直角座標的應用：

【範例】：在座標平面上，誠誠由 $A(-5, 2)$ 出發，向北走 5 個單位，在向西走 6 個單位到達 B 點，(1) 求 B 點座標？ (2) B 點到 x 軸的距離是多少？

(3) B 點到 y 軸的距離是多少？

解：(1) $-5-6 = -11$ ， $2+5 = 7$ 。

所以 B 點座標為 $(-11, 7)$ 。

(2) B 點到 x 軸的距離是 $|7| = 7$ 。

(3) B 點到 y 軸的距離是 $|-11| = 11$ 。

【範例】：在座標平面上，兩點 $(5, 3)$ 、 $(5, -4)$ 之距離為多少單位長？

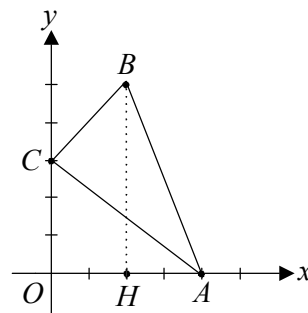
解： $3 - (-4) = 7$ 。

所以，兩點 $(5, 3)$ 、 $(5, -4)$ 之距離為 7 個單位長。

【範例】：如圖， $A(4, 0)$ 、 $B(2, 5)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $H(2, 0)$ ， O 為原點，請問：

(1) 梯形 $OHBC$ 之面積

(2) $\triangle ABC$ 之面積。



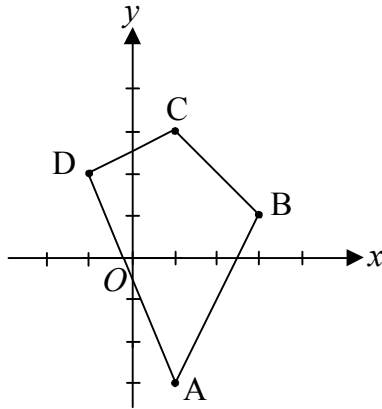
解：(1) 梯形 OHBC 之上底為 $\overline{OC} = 3$ ，下底為 $\overline{BH} = 5$ ，高為 $\overline{OH} = 2$ 。
 所以梯形 OHBC 之面積 = $\frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8$ (平方單位)

$$(2) \because \triangle ABH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5 \text{ (平方單位)},$$

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (平方單位)}。$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ 面積} &= \text{梯形 OHBC 面積} + \triangle ABH \text{ 面積} - \triangle AOC \text{ 面積} \\ &= 8 + 5 - 6 \\ &= 7 \text{ (平方單位)}. \end{aligned}$$

【範例】：已知座標平面上的四點 A(1, -3)、B(3, 1)、C(1, 3)、D(-1, 2)，
 作 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} ，請求出四邊形 ABCD 之面積。



解： $\because \overline{AC} = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \text{四邊形 ABCD 面積} &= \triangle ABC \text{ 面積} + \triangle ADC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \\ &= 12 \text{ (平方單位)}. \end{aligned}$$

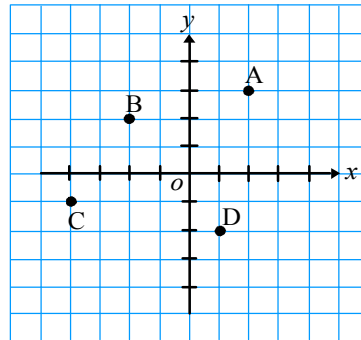


小 試 身 手

【例題 1】

請寫出下列各座標平面上各點的座標。

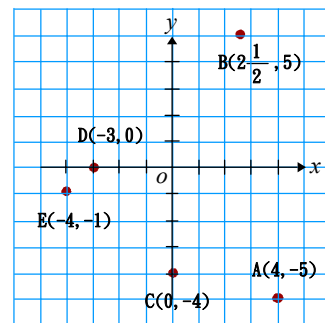
答：A(2, 3), B(-2, 2),
C(-4, -1), D(1, -2)。



【例題 2】

請在右圖上畫出直角座標平面，並寫出下列各點的座標。

A(4, -5), B(2 $\frac{1}{2}$, 5),
C(0, -4), D(-3, 0), E(-4, -1)。



【例題 3】

下表中，各點分別在哪一象限或在某一坐標軸上，請填上：

點座標	A(-3, 6)	B(-1, -5)	C(-2 $\frac{1}{3}$, -3 $\frac{5}{11}$)
象限或軸	二	三	三
點座標	D(3, -2 $\frac{11}{43}$)	F($\frac{1}{2}$, 0)	E(0, -3 $\frac{1}{7}$)
象限或軸	四	x 軸	y 軸

【例題 4】

下表中，各點分別在哪一象限或在某一坐標軸上，請填上：

點座標	A(-2, 2 $\frac{1}{2}$)	B(-2, -5)	C(3, -3)
象限或軸	二	三	四
點座標	D(-3 $\frac{11}{37}$, 3)	F(-4, 0)	E(0, -3)
象限或軸	二	x 軸	y 軸

【例題 5】

在坐標平面上一點 $P(2a+1, 3a-1)$ ，若 P 點不在任何一象限內，求 a 之值。

答：假設 P 點在 x 軸上，則 $3a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

假設 P 點在 y 軸上，則 $2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

【例題 6】

在坐標平面上一點 $A(5x+35, 2x-19)$ ，若 A 點不在任何一象限內，求 x 之值。

答：假設 A 點在 x 軸上，則 $2x-19=0 \Rightarrow x=\frac{19}{2}$

假設 A 點在 y 軸上，則 $5x+35=0 \Rightarrow x=-7$

【例題 7】

如果 $A(x, y)$ 在直角坐標平面上的第三象限內，請問 x 、 y 分別是正數或負數？

答： x 是負數， y 是負數。

【例題 8】

如果 $A(x, y)$ 在直角坐標平面上的第四象限內，請問 x 、 y 分別是正數或負數？

答： x 是正數， y 是負數。

【例題 9】

寫出下列哪些點在 x 軸上？哪些點在 y 軸上？

$A(-3, 0)$ ， $B(-\frac{11}{29}, 0.9)$ ， $C(0, -1)$ ， $D(-1, 0)$ ， $E(3, -5)$ ， $F(0, -7\frac{13}{98})$ 。

答： x 軸上： A, D 。 y 軸上： C, F 。

【例題 10】

寫出下列哪些點在 x 軸上？哪些點在 y 軸上？

$A(0, 4)$ ， $B(-1\frac{5}{3}, 2)$ ， $C(-1\frac{7}{15}, 0)$ ， $D(8, -14)$ ， $E(-3, 0)$ ， $F(0, -8\frac{1}{9})$ 。

答： x 軸上： C, E 。

y 軸上： A, F 。