二元一次方程式的圖形

二元一次方程式的解：

將 $x=m$、$y=n$ 代入二元一次方程式 $y=ax+b$ 後，等號兩邊數值相等時，我們稱這一組 x、y 值為二元一次方程式 $y=ax+b$ 的解。並可以用數對 $(m，n)$ 來表示描繪在直角座標平面上。

有一個二元一次方程式為 $x-2y=1$，把 $x=3$、$y=1$ 代入此方程式，

可得 $3-2\times1=3-2=1$ 與方程式符合，

所以 $x=3$、$y=1$ 稱為方程式 $x-2y=1$ 的一組解。

利用以前學過的等量公理，我們也可將 $x-2y=1$ 改寫成 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的形式

這樣找二元一次方程式的解會比較簡單方便。

$$x=1 \quad y=0$$
$$x=2 \quad y=\frac{1}{2}$$
$$x=3 \quad y=1$$
$$x=4 \quad y=1\frac{1}{2}$$
$$x=5 \quad y=2$$

所以一組方程式可以找到很多組的解。

注意：二元一次方程式的解會有無限多組解，例如：$x=1$、$y=0$ 或 $x=-1$、$y=-1$ 等，都是方程式 $x-2y=1$ 的解。

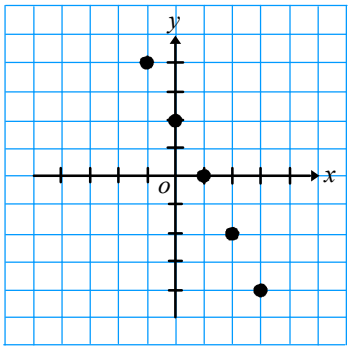
【範例】：有一個二元一次方程式為 $2x+y=2$，請找出五組此方程式的解？

解：先將方程式 $2x+y=2$ 改寫成 $y=-2x+2$ 的形式

取不同的 x，我們會有以下的解：

x	-1	0	1	2	3
y	4	2	0	-2	-4

我們可以把解寫成有序數對為 $(-1，4)$、$(0，2)$、$(1，0)$、$(2，-2)$、$(3，-4)$，接著把五組解一一描到直角座標平面上，結果如下圖：



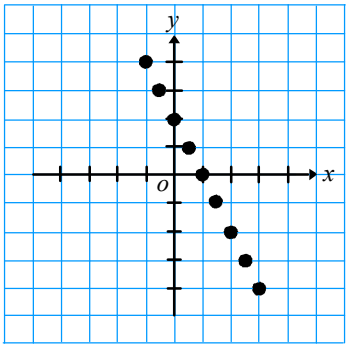
我們發現這五個點，在座標平面上像是一條直線，如果我們再找多一點解圖形會如何呢？

我們在多找幾組 $2x+y=2$ 的解，在把它描到直角座標平面上看看結果為何？

下面每一組 x、y 的值，都是 $2x+y=2$ 的解：

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

把它描到直角座標平面上的結果如下圖所示：



比較上面兩個圖的結果，圖形越來越像一條直線，這樣將方程式的點描在平面座標上，所得的圖形就稱為這個方程式的圖形。

所以方程式 $2x+y=2$ 所有的解，都會落在直角座標平面的這條直線上。

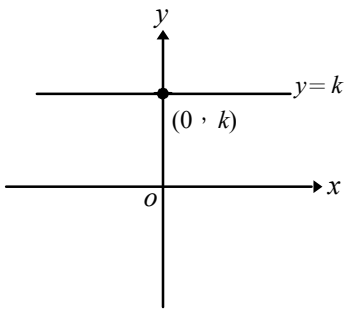
注意：由上圖可知連接兩點就可以決定一條直線，以後作圖可以只取兩個點就可以了。

<u>二元一次方程式的圖形</u>：

二元一次方程式的標準式為 $ax+by=c$，我們可以透過直角座標平面將方程式的圖形描繪出來，根據二元一次方程式的不同，我們將圖形分為下列幾個類型。

1. $y=k$ 的圖形：

   二元一次方程式 $y=k$ 的圖形是一條平行 x 軸的水平直線，而 $y=0$ 是代表 x 軸。如下圖所示：



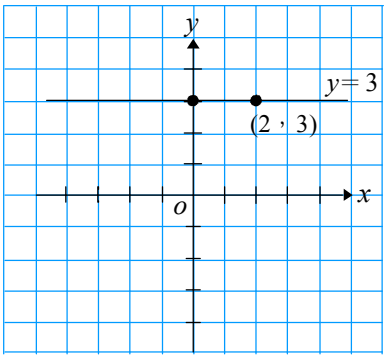
【範例】：請在座標平面上，試描繪出方程式 $y=3$ 的圖形。

解 ：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解

$y=3$ 的解為：

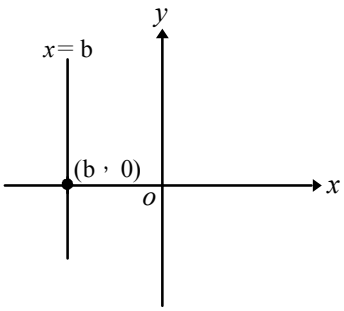
x	0	2
y	3	3

將方程式的解描到座標平面上，再分別將兩點連接成一條直線，如右圖所示。



2. $x=b$ 的圖形：

二元一次方程式 $x=b$ 的圖形是一條平行 y 軸的水平直線，而 $x=0$ 是代表 y 軸。如右圖所示：



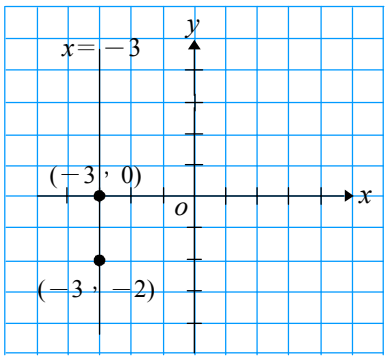
【範例】：請在座標平面上，試描繪出方程式 $x=-3$ 的圖形。

解 ：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解

$x=-3$ 的解為：

x	-3	-3
y	-2	0

將方程式的解描到座標平面上，再分別將兩點連接成一條直線，如右圖所示。



3. $y=ax(a\neq 0)$的圖形：

二元一次方程式$ax+by=c$，當$c=0$時$ax+by=0$，我們可以移項化簡為$y=-\frac{a}{b}x$的形式。

【範例】：請在座標平面上，試描繪出方程式$3x-y=0$的圖形。

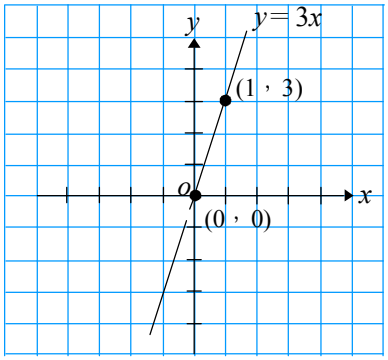
解：當$3x-y=0$時可以移項化簡成$y=3x$

對$y=3x$的圖形：

先找出兩組方程式的解為：

x	0	1
y	0	3

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為$y=3x$的圖形。



注意：在座標平面上，二元一次方程式$y=ax(a>0)$的圖形是一條通過原點的直線，而且這條直線會經過第一象限與第三象限。

【範例】：試比較方程式$y=x$、$y=2x$、$y=3x$在座標平面上的圖形。

解：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解

$y=x$的解為：

x	0	2
y	0	2

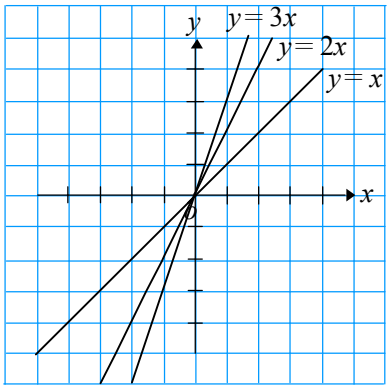
$y=2x$的解為：

x	0	2
y	0	4

$y=3x$的解為：

x	0	-1
y	0	-3

將方程式的解描到座標平面上，結果如右圖所示：x項係數越大，直線圖形越陡，也就是直線圖形的斜率越大，且圖形都通過一、三象限。



【範例】：請在座標平面上，試描繪出方程式 $2x+y=0$ 的圖形。

解 ：當 $2x+y=0$ 時可以移項化簡成 $y=-2x$

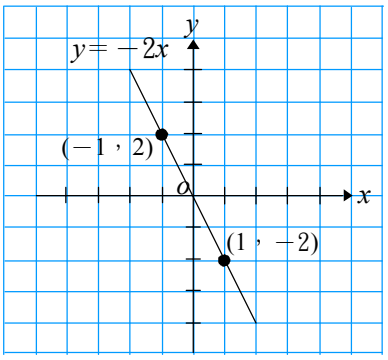
對 $y=-2x$ 的圖形：

先找出兩組方程式的解為：

x	-1	1
y	2	-2

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，

則此直線即為 $y=-2x$ 的圖形。



注意：在座標平面上，二元一次方程式 $y=ax(a<0)$ 的圖形是一條通過原點的直線，而且這條直線會經過第二象限與第四象限。

【範例】：試比較方程式 $y=-x$、$y=-2x$、$y=-3x$ 在座標平面上的圖形。

解 ：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解

$y=-x$ 的解為：

x	0	2
y	0	-2

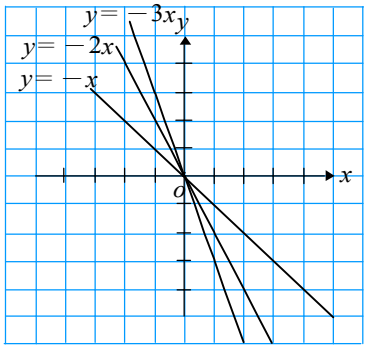
$y=-2x$ 的解為：

x	0	2
y	0	-4

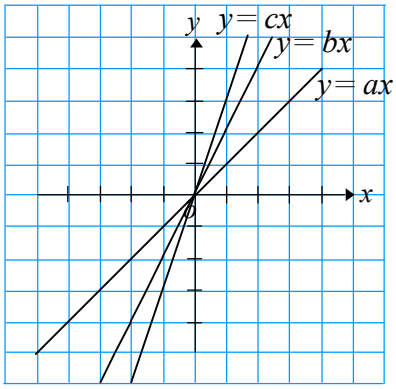
$y=-3x$ 的解為：

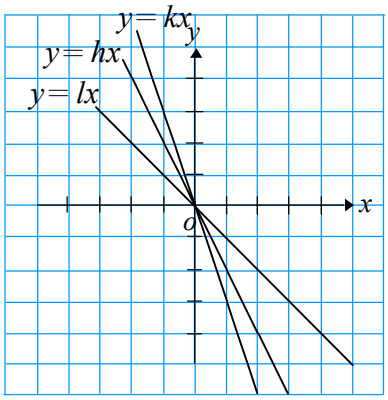
x	0	-1
y	0	3

將方程式的解描到座標平面上，結果如右圖所示：x 項係數負的越大，直線圖形越陡也就是直線圖形的斜率越大，且圖形都通過二、四象限。



結論：在座標平面上，二元一次方程式 $y=ax\,(a>0)$ 以及 $y=ax\,(a<0)$ 的圖形是一條通過原點的直線，如下圖。





$0<a<b<c$，
此直線通過一、三象限。

$k<h<l<0$，
此直線通過二、四象限。

4. $y=ax\pm b$ （$a\neq 0$、$b>0$）的圖形：

二元一次方程式 $ax+by=c$，我們可以移項化簡為 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ 的形式。

【範例】：試在座標平面上，試描繪出方程式 $x+y=2$ 的圖形。

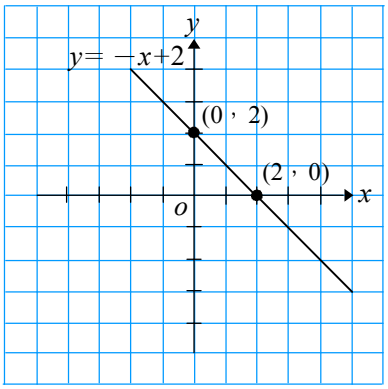
解：當 $x+y=2$ 時可以先移項化簡成 $y=-x+2$

對 $y=-x+2$ 時的圖形：

先找出兩組方程式的解為：

x	0	2
y	2	0

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為 $y=-x+2$ 的圖形。



描繪直線的小技巧：先將方程式 $ax+by=c$，移項化簡為 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$，

取 $x=0$ 求出 $y=-\dfrac{a}{b}$；再取 $y=0$ 求出 $x=\dfrac{c}{b}$，

即可快速找出兩點，在連接此兩點即為一條直線。

【範例】：試在座標平面上，試描繪出方程式 $x-y=2$ 的圖形。

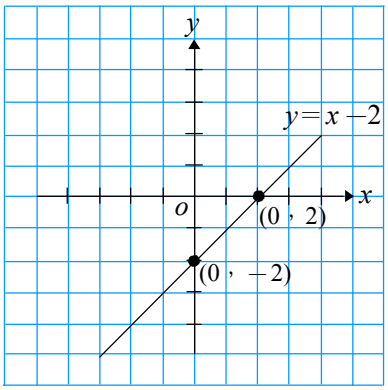
解：當 $x-y=2$ 時可以先移項化簡成 $y=x-2$

對 $y=x-2$ 時的圖形：

先找出兩組方程式的解為：

x	0	2
y	-2	0

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為 $y=x+2$ 的圖形。



【範例】：請在座標平面上，繪出方程式 $y=x$、$y=x-2$ 與 $y=x+2$ 的圖形。

解：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解。

$y=x$ 的解為：

x	0	2
y	0	2

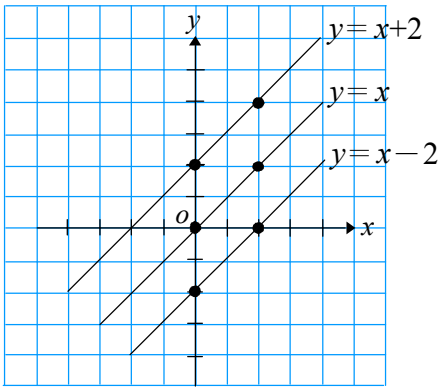
$y=x-2$ 的解為：

x	0	2
y	-2	0

$y=x+2$ 的解為：

x	0	2
y	2	4

將三個方程式的解描到座標平面上，再分別將兩點連接成一條直線，如圖所示。在右圖中，$y=x$、$y=x-2$ 與 $y=x+2$ 的圖形都是直線，而且三條直線兩兩互相平行。



【範例】：請在座標平面上，繪出方程式 $y=-2x$、$y=-2x-4$ 與 $y=-2x+4$ 的圖形。

解：因為平面上兩點可以畫一條直線，所以我們先找出兩組解

$y=-2x$ 的解為：

x	0	2
y	0	-4

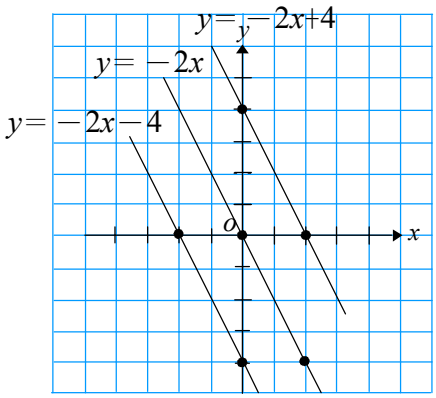
$y=-2x-4$ 的解為：

x	0	-2
y	-4	0

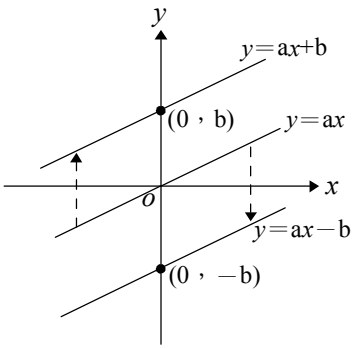
$y=-2x+4$ 的解為：

x	0	2
y	4	0

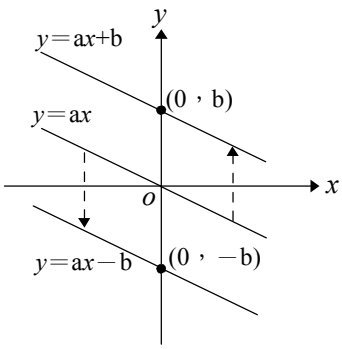
將三個方程式的解描到座標平面上，再分別將兩點連接成一條直線，如圖所示。在下圖中，$y=-2x$、$y=-2x-4$ 與 $y=-2x+4$ 的圖形都是直線，而且三條直線兩兩互相平行。



結論：方程式 $y=ax+b$ 跟 $y=ax-b$ 的圖形都是一條直線(其中 $a\neq 0$、$b>0$)。$y=ax\pm b$ 的圖形可看成是方程式 $y=ax$ 的圖形，沿著 y 軸方向移動而得，如下圖所示：



當 $a>0$、$b>0$



當 $a<0$、$b>0$

二元一次聯立方程式的幾何圖形：

由上面的一些範例可以知道，二元一次方程式 $ax+by=c$ 的圖形，在座標平面上是一條直線，只要找出方程式的兩組解，就可以描繪出二元一次方程式的圖形。當兩條直線相交於一點的時候，它們的交點座標即為二元一次聯立方程式的解。

【範例】：請在座標平面上描繪出二元一次聯立方程式 $\begin{cases}2x-3y=-1\\x+y=2\end{cases}$ 的圖形，並求出其交點座標。

解：我們先利用之前學過的代數運算方法求出解

$$\begin{cases}2x-3y=-1 \text{ ---(1)}\\x+y=2 \text{ ------(2)}\end{cases}$$

將(1)－2×(2)可得：$-5y=-5$

$y=1$

將 $y=1$ 代入(1)式或(2)式中可得 $x=1$

所以我們可得聯立方程式解(x，y)＝(1，1)

現在我們可以利用幾何圖形的方法，了解聯立方程式解的幾何意義：

先找出兩組方程式 $2x-3y=-1$ 的解

x	－2	4
y	－1	3

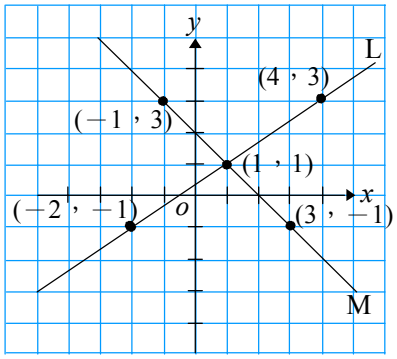
畫出通過點(－2，－1)、(4，3)的直線 L。

再找出兩組方程式 $x+y=2$ 的解

x	－1	3
y	3	－1

畫出通過點(－1，3)、(3，－1)的直線 M。

如下圖所示：



聯立方程式 $\begin{cases}2x-3y=-1\\x+y=2\end{cases}$ 的解(1，1)，即為兩直線的交點。

結論：給定一組二元一次方程式 $ax+by=c$，我們可以在座標平面上描繪出一條直線，因此，我們也稱 $ax+by=c$ 為一組直線方程式。

【範例】：試在座標平面上，試描繪出方程式$\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$的圖形。

解 ：先將方程式$\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}$等號兩邊同乘以 8，將其改為$3x-4y=12$

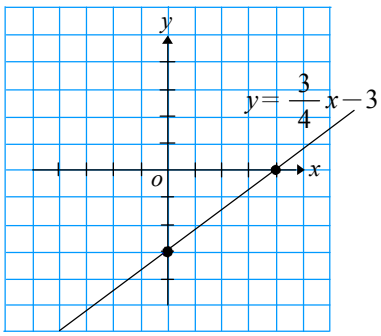
再將$3x-4y=12$ 移項簡化成$y=\frac{3}{4}x-3$

對方程式$y=\frac{3}{4}x-3$我們可以找出兩點為：

x	0	4
y	-3	0

再將方程式的解描到座標平面上，分別將兩點連接成一條直線，

如下圖所示。



【範例】：在座標平面上，直線$4x+3y=20$的圖形與x軸相交於 A 點，與y軸相交於 B 點，設原點為 O，則：(1)求出 A、B 兩點的座標。

(2) $\triangle AOB$ 的面積為多少？

解(1)：因為直線$4x+3y=20$與x軸的交點會落在x軸上，所以y軸座標為 0

令$y=0$代入直線方程式$4x+3y=20$可得$x=5$，即 A(5，0)。

因為直線$4x+3y=20$與y軸的交點會落在y軸上，所以x軸座標為 0

令$x=0$代入直線方程式$4x+3y=20$可得$y=\frac{20}{3}$，即 B(0，$\frac{20}{3}$)。

所以 A(5，0)、B(0，$\frac{20}{3}$)如下圖所示。

解(2)：因為 A 座標為(5，0)，與原點的距離為 5；

B 座標為(0，$\frac{20}{3}$)，與原點的距離為$\frac{20}{3}$，

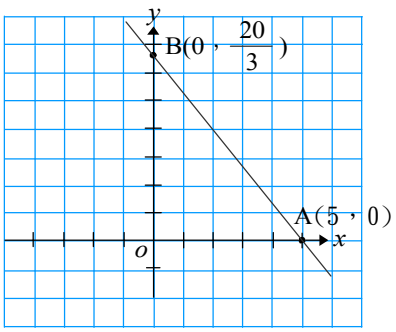
而且x軸、y軸與直線$4x+3y=20$

相交成直角三角形。

所以$\triangle AOB$的面積：

$=5\times\frac{20}{3}\div 2$

$=\frac{50}{3}$(平方單位)



小 試 身 手

【例題 1】

請找出五組方程式 $3x-2y=6$ 的解。

答： (－2，－6)、(0，－3)、(2，0)、(4，3)、(6，6)。

【例題 2】

請找出五組方程式 $2x+y=-2$ 的解。

答： (－2，2)、(－1，0)、(0，－2)、(1，－4)、(2，－6)。

【例題 3】

請找出下列哪些點在直線 $y=-4$ 上？

(－1，－4)、(－4，－3)、(－1，0.2)、(0，4)、(－1，1)、(2，0)、(3，－4)。

答：(－1，－4)、(3，－4)。

【例題 4】

請找出下列哪些點在直線 $x=2$ 上？

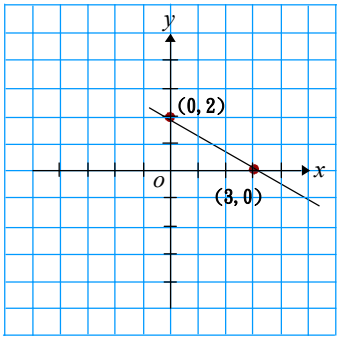
(－2，2)、(2，－2)、(2，0)、(0，2)、(3，1)、(2，5)、(－3，2)、(2，－4)。

答：(2，－2)、(2，0)、(2，5)、 (2，－4)。

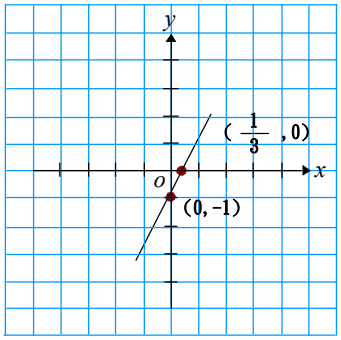
【例題 5】

在直角座標平面上，畫出下列各組二元一次方程式的圖形。

(1) $2x+3y=6$



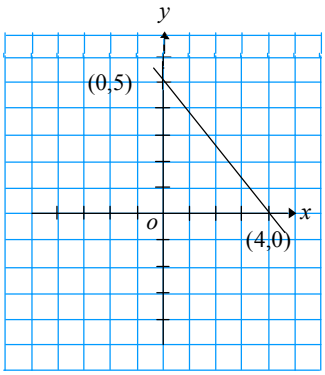
(2) $y-3x=-1$



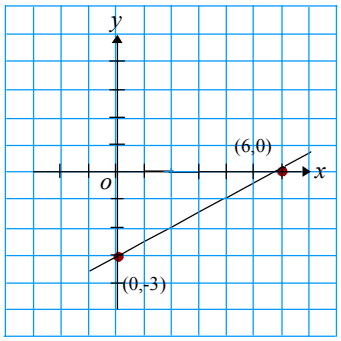
【例題 6】

在直角座標平面上，畫出下列各組二元一次方程式的圖形。

(1) $5x+4y=20$



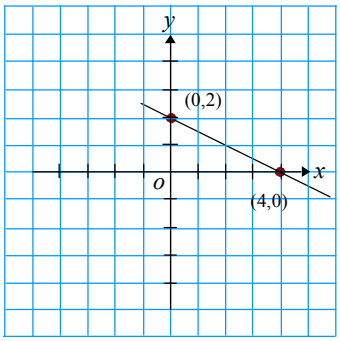
(2) $x-2y=6$



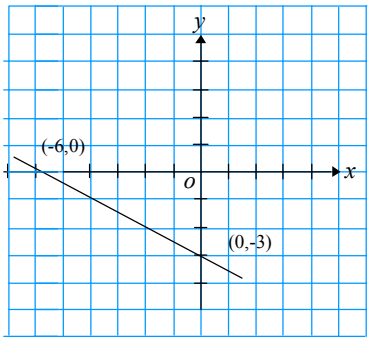
【例題 7】

在直角座標平面上，畫出下列兩個方程式的圖形，檢驗看看它們是否平行？

(1) $x+2y=4$



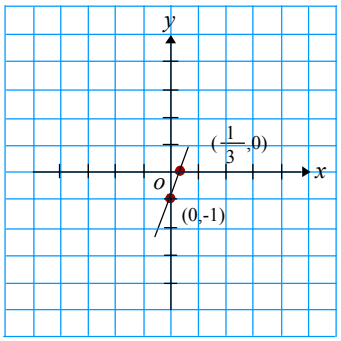
(2) $x+2y=-6$



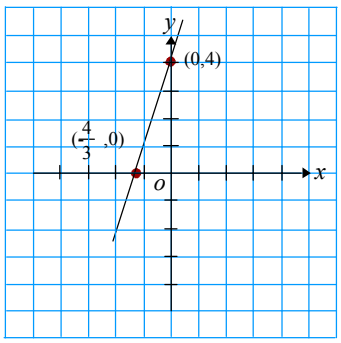
【例題 8】

在直角座標平面上，畫出下列兩個方程式的圖形，檢驗看看它們是否平行？

(1) $-3x+y=-1$



(2) $y-3x=4$



【例題 9】

若直線 L 為 $y=ax+b$ 通過兩點 A(1，−3)與 B(−1，1)，請算出 a 與 b 的值，並寫出此直線 L 的方程式。

解：將 A(1，−3)代入 $y=ax+b$，得到 $-3=a+b$ ……①

將 B(−1，1) 代入 $y=ax+b$，得到 $1=-a+b$ ……②

將①＋②，得到 $-2=2b$ ∴ b＝−1 代入①，得到 $a=-2$

$\therefore y=-2x-1$

答：直線 L 的方程式為 $y=-2x-1$。

【例題 10】

若直線 L 為 $y=ax+b$ 通過兩點 A(2，3)與 B(4，0)，請算出 a 與 b 的值，並寫出此直線 L 的方程式。

解：將 A(2，3)代入 $y=ax+b$，得到 $3=2a+b$ ……①

將 B(4，0) 代入 $y=ax+b$，得到 $0=4a+b$ ……②

將①－②，得到 $3=-2a$ ∴ $a=-\frac{3}{2}$，代入②，得到 $b=6$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+6$

答：直線 L 的方程式為 $y=-\frac{3}{2}x+6$。

【例題 11】

如果有兩條直線方程式分別為 $3x+ay=-6$ 跟 $bx-2y=8$，它們的交點為 P(2，3)，請問：(1)請求出 a 與 b 的值。(2)直線方程式 $bx-2y=8$ 通過哪些象限？

解：(1)將 P(2，3)代入 $3x+ay=-6$，得到 $6+3a=-6$ ∴ $a=-4$

將 P(2，3)代入 $bx-2y=8$，得到 $2b-6=8$ ∴ $b=7$

(2)∴ 直線方程式 $7x-2y=8$ 通過一、三、四象限

答：(1) $a=-4$，$b=7$。(2) 通過一、三、四象限。

【例題 12】

兩條直線 $ax+y=-4$ 跟 $2x-by=6$ 的交點為 A(−2，−4)

請問：(1)請求出 a 與 b 的值。(2)直線方程式 $ax+y=-4$ 通過哪些象限？

解：(1)將 A(−2，−4)代入 $ax+y=-4$，得到 $-2a-4=-4$ ∴ $a=0$

將 A(−2，−4)代入 $2x-by=6$，得到 $-4+4b=6$ ∴ $b=\frac{5}{2}$

(2)∴ 直線方程式 $y=-4$ 通過 三、四象限。

答：(1) $a=0$，$b=\frac{5}{2}$。(2) 通過 三、四象限。

【例題 13】

設有四個二元一次方程式為 L：$2x+ay=-6$，M：$2x+y=7$， N：$bx+2y=5$，O：$3x+2y=11$ 相交於同一個點，請求出 a 與 b 的值為何？

解： $2x+y=7$……①　　將①×2，得到， $4x+2y=14$……③

$3x+2y=11$……②

③－②得到 $x=3$ 代入① ∴ $y=1$

將 $x=3$， $y=1$ 代入 L：$2x+ay=-6$

得到 $6+a=-6$　　∴ $a=-12$

將 $x=3$， $y=1$ 代入 N：$bx+2y=5$

得到 $3b+2=5$　∴ $b=1$

答： $a=-12$，$b=1$。

【例題 14】

如果有四個二元一次方程式為 $ax+2y=3$，$x-by=1$，$2x+y=2$，$2x-y=2$，請求出 a 與 b 的值為何？

解： $ax+2y=3$……①

$x-by=1$……②

$2x+y=2$……③

$2x-y=2$……④

將③＋④，得到 $4x=4$　∴ $x=1$ 代入③，得到 $y=0$

將 $x=1$，$y=0$ 代入①，得到 $a=3$

將 $x=1$，$y=0$ 代入②，得到 $1-b\times0=1$　∴ b 為任意數

答：$a=3$，b 為任意數。

【例題 15】

(1)通過點(4，－2)且平行 y 軸的直線方程式為何？

(2)通過點(3，－1)且平行 x 軸的直線方程式為何？

答：(1) $x=4$。　(2) $y=-1$。

【例題 16】

(1)通過點(－5，－1)且平行 x 軸的直線方程式為何？

(2)通過點(－1，9)且平行 y 軸的直線方程式為何？

答：(1) $y=-1$。　(2) $x=-1$。

【例題 17】

兩條直線方程式 $3x-2y=5$ 與 $ax+y=7$ 之交點在 $x=1$ 上，請求出 a 之值？

解：將 $x=1$ 代入 $3x-2y=5$，得到 $-2y=2$ $\therefore$ $y=-1$

將 $x=1$，$y=-1$ 代入 $ax+y=7$，得到 $a-1=7$ $\therefore$ $a=8$

答：$a=8$。

【例題 18】

兩條直線方程式 $2x-3y=1$ 與 $x+ay=4$ 之交點在 $y=1$ 上，請求出 a 之值？

解：將 $y=1$ 代入 $2x-3y=1$，得到 $2x-3=1$ $\therefore$ $x=2$

將 $x=2$，$y=1$ 代入 $x+ay=4$，得到 $2+a=4$ $\therefore$ $a=2$

答：$a=2$。

二元一次聯立方程式的圖解

在上一節已經學過二元一次方程式的作圖，只要在直角座標平面上，給定到兩個點就能決定一條直線；也學過二元一次聯立方程式的解，為兩條直線的交點座標。想一想，是不是每一組聯立方程式都會有交點座標呢？

兩直線相交：

設二元一次方程式為 $\begin{cases} a_1x+b_1=c_1 \\ a_2x+b_2=c_2 \end{cases}$，當 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 時，此聯立方程式只有一組解，且圖形為相交於一點的兩條直線。

【範例】：請在座標平面上描繪出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$ 的圖形。

解　：　我們先利用之前學過的代數運算方法求出解

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \text{ ---(1)} \\ x+y=2 \text{ ------(2)} \end{cases}$$

將(1)－2×(2)可得：$-5y=-5$

$y=1$

將 $y=1$ 代入(1)式或(2)式中可得 $x=1$

所以我們可得聯立方程式解(x，y)＝(1，1)

先找出兩組方程式 $2x-3y=-1$ 的解

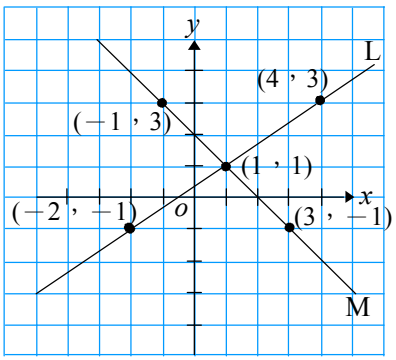
x	－2	4
y	－1	3

畫出通過點(－2，－1)、(4，3)的直線 L。

再找出兩組方程式 $x+y=2$ 的解

x	－1	3
y	3	－1

畫出通過點(－1，3)、(3，－1)的直線 M，如下圖所示：



∴ 此聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$ 有唯一解為(1，1)，即為兩直線的交點。

<u>兩直線重合</u>：

設二元一次方程式為$\begin{cases} a_1x+b_1=c_1 \\ a_2x+b_2=c_2 \end{cases}$，當$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$時，此聯立方程式有無限多解，且圖形為重合的兩條直線。

【範例】：請在座標平面上描繪出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$ 的圖形。

解　：我們先利用之前學過的代數運算方法求出解

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \text{ ---(1)} \\ 4x+6y=12 \text{ ------(2)} \end{cases}$$

先找出兩組方程式$2x+3y=6$的解：

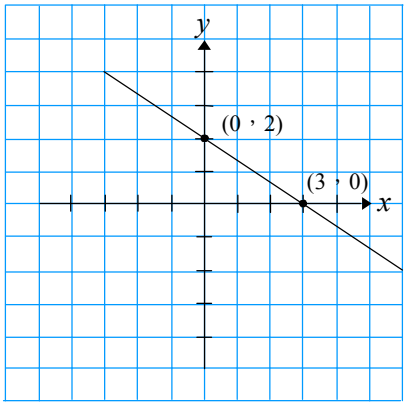
x	0	3
y	2	0

畫出通過點(0，2)、(3，0)的直線。

再找出兩組方程式$4x+6y=12$的解：

x	0	3
y	2	0

畫出通過點(0，2)、(3，0)的直線，如下圖所示：



我們發現兩條直線是重合的，且在直線上的每一個點座標，都是此聯立方程式的解。所以此聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$ 有無限多解，而且兩條直線重合。

<u>兩直線平行</u>：

設二元一次方程式為$\begin{cases} a_1x+b_1=c_1 \\ a_2x+b_2=c_2 \end{cases}$，當$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$時，此聯立方程式為無解，且圖形為平行的兩條直線。

【範例】：請在座標平面上描繪出二元一次聯立方程式 $\begin{cases}2x+3y=6\\2x+3y=12\end{cases}$ 的圖形。

解　：我們先利用之前學過的代數運算方法求出解

$$\begin{cases}2x+3y=6 \text{ ---(1)}\\2x+3y=12 \text{ ------(2)}\end{cases}$$

先找出兩組方程式 $2x+3y=6$ 的解

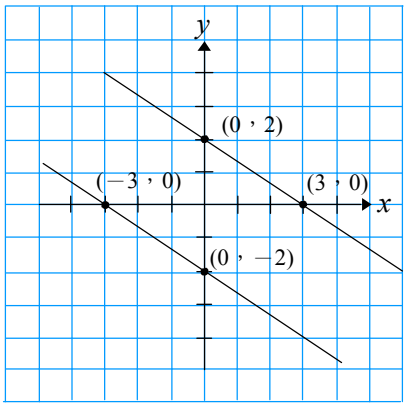
x	0	3
y	2	0

畫出通過點(0，2)、(3，0)的直線。

再找出兩組方程式 $2x+3y=-6$ 的解

x	0	−3
y	−2	0

畫出通過點(0，−2)、(−3，0)的直線，如下圖所示：



我們發現兩條直線是平行的，所以兩條直線沒有共同的解。也就是說，此聯立方程式的沒有交點座標。

所以此聯立方程式 $\begin{cases}2x+3y=6\\2x+3y=12\end{cases}$ 為無解。

【範例】：判斷下列各組聯立方程式，何者為無解、何者為無限多組解、何者只有一組解。

(1) $\begin{cases}2x-y=4\\4x-2y=12\end{cases}$　(2) $\begin{cases}3x-4y-5=0\\6x-8y-10=0\end{cases}$　(3) $\begin{cases}3x-2y=9\\5x+4y=12\end{cases}$

解　：(1) $\because \dfrac{2}{4}=\dfrac{-1}{-2}\neq\dfrac{4}{12}$，$\therefore$ 此方程式為無解。

(2) $\because \dfrac{3}{6}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{5}{10}$，$\therefore$ 此方程式有無限多組解。

(3) $\because \dfrac{3}{5}\neq\dfrac{-2}{4}$，$\therefore$ 此方程式只有一組解。

小 試 身 手

【例題 1】

若兩直線 $ax-3y=4$ 與 $6x+4y-9=0$ 相交於一點，請問 $a\neq$？

解：

$\because$ 兩直線相交於一點，只有一組解。

$\therefore \dfrac{a}{6}\neq\dfrac{-3}{4} \Rightarrow 4a\neq-18$

$\Rightarrow a\neq\dfrac{-9}{2}$

【例題 2】

若兩直線 $2x-4y=7$ 與 $3x+ay=13$ 相交於一點，請問 $a\neq$？

解：

$\because$ 兩直線相交於一點，只有一組解。

$\therefore \dfrac{3}{2}\neq\dfrac{a}{-4} \Rightarrow 2a\neq-12$

$\Rightarrow a\neq-6$

【例題 3】

若兩直線 $2x+y=10$ 與 $3x-ay=3$ 互相平行，請問 $a=$？

解：

$\because$ 兩直線互相平行，則為無解。

$\therefore \dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{-a} \Rightarrow -2a=3$

$\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$

【例題 4】

若兩直線 $-ax+2y=6$ 與 $3x-6y=7$ 互相平行，請問 $a=$？

解：

$\because$ 兩直線互相平行，則為無解。

$\therefore \dfrac{-a}{3}=\dfrac{2}{-6} \Rightarrow 6a=6$

$\Rightarrow a=1$

【例題 5】

座標平面上，若兩直線 $2x+y=a$ 與 $3x-by=12$ 之交點座標為 $(-1，2)$，則 $a+2b=$？

解： 將 $(-1，2)$ 代入兩直線方程式。

$2x+y=a \Rightarrow 2\cdot(-1)+2=a \Rightarrow a=0$

$3x-by=12 \Rightarrow 3\cdot(-1)-b\cdot2=12 \Rightarrow -2b=15 \Rightarrow b=-\dfrac{15}{2}$

$\therefore a+2b=0+2\cdot(-\dfrac{15}{2})=-15$。

【例題 6】

方程組 $\begin{cases}-x+2y=0\\3x+(2-a)y=0\end{cases}$，除了 $(x，y)=(0，0)$ 這組解之外，還有其它的解，求 a 之值。

解： 有兩組以上之解，所以此方程式有無限多解。

$\therefore \dfrac{-1}{3}=\dfrac{2}{2-a} \Rightarrow -2+a=6 \Rightarrow a=8$。

答：$a=8$。

【例題 7】

若 $4x-3y=-12$ 與 x 軸之交點為$(a，0)$，與 y 軸之交點為$(0，b)$，則 $a+b=$？

解：將 $y=0$ 代入 $4x=-12$　∴ $x=-3=a$

將 $x=0$ 代入 $-3y=-12$　∴ $y=4=b$

∴ $a+b=-3+4=1$

答：$a+b=1$。

【例題 8】

設直線 $ax+y+c=0$ 通過 A 點$(-4，3)$且垂直 y 軸，則 $a+b=$？

解：∵ 通過 A 點$(-4，3)$且垂直 y 軸　∴ $y=3$　即 $y-3=0$

∴ $a=0$，$b=-3$

∴ $a+b=-3$

【例題 9】

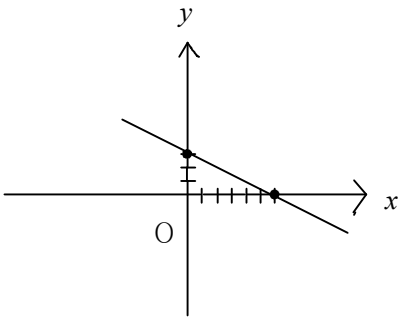
在座標平面上，畫出下列兩組直線方程式的圖形，並說明此兩條直線之間的關係。

(1) L：$\frac{x}{2}+y=3$。　(2) M：$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}y=1$。

解：(1)

L：$\frac{x}{2}+y=3$。

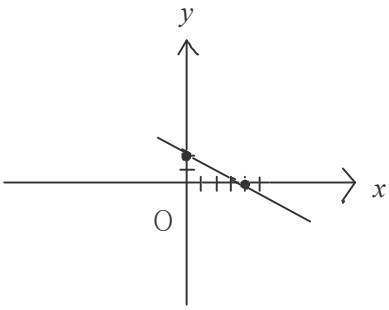
x	0	6
y	3	0



(2)

M：$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}y=1$。

x	0	4
y	2	0



【例題 10】

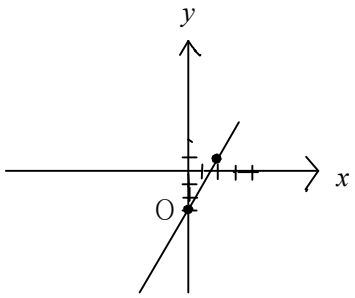
在座標平面上，畫出下列兩組直線方程式的圖形，並說明此兩條直線之間的關係。

(1) L：$2x-y=3$。　　(2) M：$x+y=4$。

解：(1)

L：$2x-y=3$。

x	0	2
y	-3	1



(2)

M：$x+y=4$。

x	0	4
y	4	0