

■ 比例式與連比

比例式的定義：

假設有兩個比 $a : b$ 和 $c : d$ ，如果這兩個比的比值相等 ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$)，則稱這兩個比相等，記成 $a : b = c : d$ ，這樣的式子就稱為比例式。

【範例】：請求出下列各比例式的解：

(1) 已知 $7 : 3 = 35 : d$ ，求 $d = ?$ (2) 已知 $a : 11 = 144 : 132$ ，求 $a = ?$

解：(1) $\because 7 : 3 = 35 : d$

$$\therefore \frac{7}{3} = \frac{35}{d} \quad , \quad \text{因為 } 35 \text{ 是 } 7 \text{ 的 } 5 \text{ 倍，所以 } d \text{ 也是 } 3 \text{ 的 } 5 \text{ 倍。}$$

$$\text{則 } d = 3 \cdot 5 = 15 \quad . \quad \text{答：} d = 15 \quad .$$

(2) $\because a : 11 = 144 : 132$

$$\therefore \frac{a}{11} = \frac{144}{132} \quad , \quad \text{因為 } 132 \text{ 是 } 11 \text{ 的 } 12 \text{ 倍，所以 } 144 \text{ 也是 } a \text{ 的 } 12 \text{ 倍。}$$

$$\text{則 } a = 144 \div 12 = 12 \quad . \quad \text{答：} a = 12 \quad .$$

【範例】：已知 $4a = 5b$ ，求 $a : b = ?$

解： $\because 4a = 5b$ (兩邊同除以 $4b$)，

$$\therefore \frac{4a}{4b} = \frac{5b}{4b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \quad .$$

$$\text{則 } a : b = 5 : 4 \quad . \quad \text{答：} a : b = 5 : 4 \quad .$$

比例式的性質：

性質 1： $a : b = a \times n : b \times n$ ，其中 $n \neq 0$ 。

性質 2：若 $a : b = m : n$ 則有 $a \times n = b \times m$ 。

性質 3： $x : y = a : b$ ，則 $px : qy = a \times p : b \times q$ 。

性質 4： $px : qy = a : b$ ，則 $x : y = \frac{a}{p} : \frac{b}{q}$ 。

【範例】：請求出下列各比例式中 x 的值：

(1) $x : 8 = 12 : 6$ (2) $0.2 : 5 = 10 : x$ (3) $3 : 4x = 34 : 48$ 。

解：(1) $\because x : 8 = 12 : 6$ ， $\therefore 6x = 8 \cdot 12 = 96$

$$\text{則 } x = 96 \div 6 = 16 \quad . \quad \text{答：} x = 16 \quad .$$

(2) $\because 0.2 : 5 = 10 : x$ ， $\therefore 0.2x = 5 \cdot 10 = 50$

$$\text{則 } x = 50 \div 0.2 = 250 \quad . \quad \text{答：} x = 250 \quad .$$

(3) $\because 3 : 4x = 34 : 48$ ， $\therefore 4x \cdot 34 = 3 \cdot 48 \Rightarrow 136x = 144$

$$\text{則 } x = 144 \div 136 = \frac{144}{136} = \frac{18 \times 8}{17 \times 8} = \frac{18}{17} \quad . \quad \text{答：} x = \frac{18}{17} \quad .$$

【範例】：請求出下列各比例式中 x 的值：

$$(1) (x-2):(x+2)=3:2 \quad (2) (4x+7):(5x-2)=8:15。$$

解：(1) $\because (x-2):(x+2)=3:2$

$$\therefore 3(x+2)=2(x-2) \Rightarrow 3x+6=2x-4$$

$$\Rightarrow 3x-2x=-4-6$$

$$\Rightarrow x=-10 \quad \text{答：} x=13。$$

$$(2) \because (4x+7):(5x-2)=8:15$$

$$\therefore 8(4x+7)=15(5x-2) \Rightarrow 32x+56=75x-30$$

$$\Rightarrow 75x-32x=56+30$$

$$\Rightarrow 43x=86$$

$$\Rightarrow x=2 \quad \text{答：} x=2。$$

【範例】：已知鹽水混和液中，鹽巴和水的重量比是 $3:13$ ，其中水有 260 公克。

請問此混和液中含有鹽巴多少公克？

解：設有鹽巴 x 公克，所以 $3:13=x:260$

利用內項乘內項等於外項乘外項，可得： $13x=3 \cdot 260=780$

所以 $x=780 \div 13=60$ 。

答：含有鹽巴 60 公克。

連比：

如果第一個數與第二個數的比是 $a:b$ ，第二個數與第三個數的比是 $b:c$ ，那麼就可以將這三個數的比寫成 $a:b:c$ 。我們稱 $a:b:c$ 為三個數 a 、 b 、 c 的連比。按照同樣的方法，還可以定義四個數或四個以上的數的連比。

連比例式的定義：若 $x:y:z=a:b:c$ ，即 $x:y=a:b$ 且 $y:z=b:c$ 。

由 $x:y=a:b$ ，我們可得 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ ，由 $y:z=b:c$ 我們可得 $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

因此可得 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 。

性質 1： $x:y:z=a:b:c$ ，則有： $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 。

注意： $x:y:z=a:b:c$ ，亦可有： $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 。

【範例】： 已知 $6A=9B=14C$ ，求 $A:B:C=?$

解法一： $[6, 9, 14]=126$ ，將 $6A=9B=14C$ 除以 126 我們可得：

$$\frac{6A}{126} = \frac{9B}{126} = \frac{14C}{126}, \text{ 也就是 } \frac{A}{21} = \frac{B}{14} = \frac{C}{9}。$$

故 $A:B:C = 21:14:9$ 。

解法二： 由定義來做。

$$\because 6A=9B \Leftrightarrow A:B=9:6=3:2$$

$$\because 9B=14C \Leftrightarrow B:C=14:9$$

$$\begin{array}{r} \text{則：} \quad A : B : C \\ \quad \quad 3 : 2 \quad \quad \quad (\text{放大 7 倍}) \\ \quad \quad \underline{\quad \quad 14 : 9} \\ \quad \quad 21 : 14 \\ \quad \quad \quad \quad \underline{\quad \quad 14 : 9} \\ \quad \quad 21 : 14 : 9 \end{array}$$

【範例】： $A:B=3:2$ ， $B:C=4:9$ ，求 $A:B:C=?$

解法一： $A:B=3:2$ ，我們可得 $\frac{A}{3} = \frac{B}{2}$ ，

$B:C=4:9$ ，我們可得 $\frac{B}{4} = \frac{C}{9}$ ，

因此 $\frac{A}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{B}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{B}{4} = \frac{C}{9}$ ，也就是 $\frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{9}$ ，

故 $A:B:C = 6:4:9$ 。

解法二： 我們也可以從定義來做。

$\because A:B=3:2$ ， $B:C=4:9$ ，則：

$$\begin{array}{r} A : B : C \\ \quad \quad 3 : 2 \quad \quad \quad (\text{放大 2 倍}) \\ \quad \quad \underline{\quad \quad 4 : 9} \\ \quad \quad 6 : 4 \\ \quad \quad \quad \quad \underline{\quad \quad 4 : 9} \\ \quad \quad 6 : 4 : 9 \end{array}$$

故 $A:B:C = 6:4:9$ 。

【範例】： $A : C = 2 : 3$ ， $B : C = 3 : 4$ ，求 $A : B : C = ?$

解法一： $A : C = 2 : 3$ ，我們可得 $\frac{A}{2} = \frac{C}{3}$ ，

$B : C = 3 : 4$ ，我們可得 $\frac{B}{3} = \frac{C}{4}$ ，

因此 $\frac{A}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{C}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{C}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{B}{3} \times \frac{1}{3}$ ，也就是 $\frac{A}{8} = \frac{B}{9} = \frac{C}{12}$ ，

故 $A : B : C = 8 : 9 : 12$ 。

解法二： 由定義來做。

$\because A : C = 2 : 3$ ， $B : C = 3 : 4$ ，則：

$$\begin{array}{r}
 A : B : C \\
 2 \quad : \quad 3 \quad (\text{放大 4 倍}) \\
 \quad \quad 3 : 4 \quad (\text{放大 3 倍}) \\
 \hline
 8 \quad : \quad 12 \\
 \quad \quad 9 : 12 \\
 \hline
 8 : 9 : 12
 \end{array}$$

故 $A : B : C = 8 : 9 : 12$ 。

回顧： $a : b = a \times n : b \times n$ 。

性質 2： $x : y : z = a \times x : a \times y : a \times z$ 。

【範例】： $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{6}$
 $= \frac{1}{3} \times 6 : \frac{1}{2} \times 6 : \frac{1}{6} \times 6$
 $= 2 : 3 : 1$ 。

【範例】： $x : y : z = 1.2 : 0.7 : 1.3$
 $= 1.2 \times 10 : 0.7 \times 10 : 1.3 \times 10$
 $= 12 : 7 : 13$ 。

【範例】： $x : y : z = 0.6 : \frac{2}{3} : 2.1$
 $= \frac{6}{10} : \frac{2}{3} : \frac{21}{10}$
 $= \frac{6}{10} \times 30 : \frac{2}{3} \times 30 : \frac{21}{10} \times 30$
 $= 18 : 20 : 63$ 。

回顧： $x : y = a : b$ ，則 $px : qy = a \times p : b \times q$ 。

性質 3： $x : y : z = a : b : c$ ，則 $px : qy : rz = a \times p : b \times q : c \times r$ ，
其中 p 、 q 、 r 三個數不為零。

由性質 1：可知 $x : y : z = a : b : c$ ，則有 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ，

若 p 、 q 、 r 三個不為零的數，則：

$$\frac{x}{a} \times \frac{p}{p} = \frac{y}{b} \times \frac{q}{q} = \frac{z}{c} \times \frac{r}{r} \Leftrightarrow \frac{px}{a \times p} = \frac{qy}{b \times q} = \frac{rz}{c \times r}$$

因此我們有 $px : qy : rz = a \times p : b \times q : c \times r$ 。

【範例】： 已知 $A : B : C = 2 : 3 : 5$ ，求 $4A : 2B : 3C = ?$

解法一： $\because A : B : C = 2 : 3 : 5$ 我們可得：

$$\begin{aligned} \therefore 4A : 2B : 3C &= 2 \times 4 : 3 \times 2 : 5 \times 3 \\ &= 8 : 6 : 15 \end{aligned}$$

故 $4A : 2B : 3C = 8 : 6 : 15$ 。

解法二：

$$\because A : B = 2 : 3$$

$$\because B : C = 3 : 5$$

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{B}{C} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \times \frac{A}{B} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \times \frac{B}{C} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4A}{2B} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2B}{3C} = \frac{2}{5}$$

$$4A : 2B = 4 : 3$$

$$2B : 3C = 2 : 5$$

由定義來做。

$$4A : 2B : 3C$$

$$4 : 3 \quad (\text{放大 2 倍})$$

$$\underline{\quad\quad\quad} 2 : 5 \quad (\text{放大 3 倍})$$

$$8 : 6$$

$$\underline{\quad\quad\quad} 6 : 15$$

$$8 : 6 : 15$$

故 $4A : 2B : 3C = 8 : 6 : 15$ 。

回顧：若 $px : qy = a : b$ ，則 $x : y = \frac{a}{p} : \frac{b}{q}$ 。

性質 4：若 $px : qy : rz = a : b : c$ ，則有 $x : y : z = \frac{a}{p} : \frac{b}{q} : \frac{c}{r}$ 。

$$\begin{aligned} \text{因為 } px : qy : rz = a : b : c &\Rightarrow \frac{px}{a} = \frac{qy}{b} = \frac{rz}{c} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{p}} = \frac{y}{\frac{b}{q}} = \frac{z}{\frac{c}{r}} \\ &\Rightarrow x : y : z = \frac{a}{p} : \frac{b}{q} : \frac{c}{r}。 \end{aligned}$$

【範例】：將 $2A : 4B : 3C = 4 : 12 : 15$ ，求 $A : B : C = ?$

解法一： $2A : 4B : 3C = 4 : 12 : 15$ ，

$$\begin{aligned} \text{故有 } A : B : C &= \frac{4}{2} : \frac{12}{4} : \frac{15}{3} \\ &= 2 : 3 : 5 \end{aligned}$$

因此 $A : B : C = 2 : 3 : 5$ 。

解法二：

$$\because 2A : 4B = 4 : 12$$

$$\therefore \frac{2A}{4B} = \frac{4}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \times \frac{2A}{4B} = \frac{4}{12} \times \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

$$A : B = 2 : 3$$

由定義來做。

$$A : B : C$$

$$2 : 3$$

$$\frac{3 : 5}{\quad}$$

$$2 : 3 : 5$$

故 $A : B : C = 2 : 3 : 5$ 。

$$\because 4B : 3C = 12 : 15$$

$$\therefore \frac{4B}{3C} = \frac{12}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \times \frac{4B}{3C} = \frac{12}{15} \times \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{C} = \frac{3}{5}$$

$$B : C = 3 : 5$$

【範例】：若 $2x : 3y : 4z = 1 : 2 : 3$ ，求 $x : y : z$ 之連比？

解法一： $\because 2x : 3y : 4z = 1 : 2 : 3$

$$\therefore x : y : z = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } x : y : z &= 12 \times \frac{1}{2} : 12 \times \frac{2}{3} : 12 \times \frac{3}{4} \\ &= 6 : 8 : 9. \end{aligned}$$

答： $x : y : z = 6 : 8 : 9$ 。

解法二：

$$\because 2x : 3y = 1 : 2$$

$$\because 3y : 4z = 2 : 3$$

$$\therefore x : y = \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$$

$$\therefore y : z = \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

$$= 3 : 4$$

$$= 8 : 9$$

由定義來做。

$$x : y : z$$

$$3 : 4 \quad (\text{放大 2 倍})$$

$$8 : 9$$

$$6 : 8$$

$$8 : 9$$

$$6 : 8 : 9$$

故 $x : y : z = 6 : 8 : 9$ 。

最簡整數連比：若連比 $x : y : z = a : b : c$ ，其中 a, b, c 的最大公因數為 1，

$(a, b, c) = 1$ ，則稱 $x : y : z$ 為**最簡整數連比**。

【範例】： $x : y : z = 2 : 8 : 10$ ，其最簡整數比為？

解： $(2, 8, 10) = 2$

$$x : y : z = \frac{2}{2} : \frac{8}{2} : \frac{10}{2}$$

$$= 1 : 4 : 5,$$

因為 $(1, 4, 5) = 1$ ，因此 $x : y : z$ 其最簡整數比為 $1 : 4 : 5$ 。

【範例】：將連比 $2.5 : 0.25 : \frac{1}{3}$ 化為最簡整數連比。

$$\begin{aligned} \text{解} : 2.5 : 0.25 : \frac{1}{3} &= \frac{5}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} \quad (\text{因為 } 2、4、3 \text{ 的最小公倍數為 } 12) \\ &= \frac{5 \times 6}{2 \times 6} : \frac{1 \times 3}{4 \times 3} : \frac{1 \times 4}{3 \times 4} \\ &= \frac{30}{12} : \frac{3}{12} : \frac{4}{12} \\ &= 30 : 3 : 4 \end{aligned}$$

因為 $(30, 3, 4) = 1$ ，因此 $2.5 : 0.25 : \frac{1}{3}$ 其最簡整數比為 $30 : 3 : 4$ 。

連比的應用：

【範例】：兄弟三人共有 4500 元，大哥跟二哥及小弟所有錢的比為 $4 : 3 : 2$ ，請問三人各有多少錢？

解：三人所有錢的比為 $4 : 3 : 2$ ，也就說將所有錢分成 9 份，大哥佔了其中的 4 份，二哥佔了其中的 3 份，弟弟佔了其中的 2 份，所以：

$$\text{大哥的錢：} \quad 4500 \times \frac{4}{9} = 2000 \text{ (元)}$$

$$\text{二哥的錢：} \quad 4500 \times \frac{3}{9} = 1500 \text{ (元)}$$

$$\text{弟弟的錢：} \quad 4500 \times \frac{2}{9} = 1000 \text{ (元)}$$

答：大哥 2000 元；二哥 1500 元；弟弟 1000 元

【範例】：已知某工程需要混凝土 527 公噸，此混凝土所需水泥、細沙、碎石的重量比為 $3 : 6 : 8$ ，請問此工程各需要水泥、細沙、碎石多少公噸？

解：設需要水泥 x 公噸，細沙 y 公噸，碎石 z 公噸。

則 $x : y : z = 3 : 6 : 8$ ，如果令它們的比值為 r ，且 $r \neq 0$ 。

$$\text{可得 } \frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = r \Rightarrow x = 3r、y = 6r、z = 8r。$$

$$\text{所以 } x + y + z = 3r + 6r + 8r = 17r = 527，$$

$$\text{則 } r = 527 \div 17 = 31。$$

$$\text{因此 } x = 3 \cdot 31 = 91、y = 6 \cdot 31 = 186、z = 8 \cdot 31 = 248。$$

答：需要水泥 91 公噸，細沙 186 公噸，碎石 248 公噸。

【範例】：三角形 ABC 中，三個角具有比例關係為 $3A : 4B = 1 : 2$ ， $5B : 6C = 1 : 2$ ，

則 $\angle A$ ， $\angle B$ 及 $\angle C$ 各為多少度？

解： $3A : 4B = 1 : 2$ ，我們可得 $\frac{3A}{1} = \frac{4B}{2}$ ，

$5B : 6C = 1 : 2$ ，我們可得 $\frac{5B}{1} = \frac{6C}{2}$ 。

$$\frac{3A}{1} \times 5 = \frac{4B}{2} \times 5 = \frac{5B}{1} \times 2 = \frac{6C}{2} \times 2，$$

$$15A = 10B = 6C，[15, 10, 6] = 60，$$

將 $15A = 10B = 6C$ 除以 60 我們可得：

$$\frac{15A}{60} = \frac{10B}{60} = \frac{6C}{60}，也就是 \frac{A}{4} = \frac{B}{6} = \frac{C}{10}。$$

因此 $A : B : C = 4 : 6 : 10$ 。

$$\angle A = 180^\circ \times \frac{4}{20} = 36^\circ，$$

$$\angle B = 180^\circ \times \frac{6}{20} = 54^\circ，$$

$$\angle C = 180^\circ \times \frac{10}{20} = 90^\circ。$$

答： $\angle A = 36^\circ$ ， $\angle B = 54^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ 。

解法二： $\because 3A : 4B = 1 : 2$

$$\therefore 6A = 4B \Leftrightarrow A : B = 4 : 6$$

$$\because 5B : 6C = 1 : 2$$

$$\therefore 10B = 6C \Leftrightarrow B : C = 6 : 10$$

則 $A : B : C = 4 : 6 : 10 = 2 : 3 : 5$ 。

$$\text{令 } \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = r \Rightarrow A = 2r、B = 3r、C = 5r。$$

$$\text{所以 } \angle A + \angle B + \angle C = 2r + 3r + 5r = 10r = 180^\circ$$

$$\text{則 } r = 180^\circ \div 10 = 18^\circ。$$

$$\text{因此 } \angle A = 2 \times 18^\circ = 36^\circ、\angle B = 3 \times 18^\circ = 54^\circ、\angle C = 5 \times 18^\circ = 90^\circ。$$

答： $\angle A = 36^\circ$ 、 $\angle B = 54^\circ$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 。

【範例】：老農夫帶他的兩個兒子到果園採收草莓，小兒子採滿 2 箱時，大兒子採滿 3 箱；大兒子採滿 4 箱時，老農夫採滿 5 箱。

(1) 求小兒子、大兒子、老農夫在同一時間內採收草莓的箱數比？

(2) 如果當天三人共採滿 70 箱，則大兒子採滿多少箱？

解：(1) 設小兒子為 a ，大兒子為 b ，老農夫為 c 。

依題意， $a : b = 2 : 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$b : c = 4 : 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$

將 $\textcircled{1} \times 4$ 可得 $a : b = 8 : 12$

將 $\textcircled{2} \times 3$ 可得 $b : c = 12 : 15$

所以 $a : b : c = 8 : 12 : 15$

答：同一時間內採收草莓的箱數比為 $8 : 12 : 15$ 。

(2) $\because a : b : c = 8 : 12 : 15$

\therefore 令 $a = 8r$ 、 $b = 12r$ 、 $c = 15r$ ，其中 $r \neq 0$ 。

依題意， $a + b + c = 8r + 12r + 15r = 35r = 70$

則可得： $r = 70 \div 35 = 2$

所以 $a = 8 \cdot 2 = 16$ 、 $b = 12 \cdot 2 = 24$ 、 $c = 15 \cdot 2 = 30$

答：大兒子採滿 24 箱。



小 試 身 手

【例題 1】

設 $x : y = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ ，且 $y : z = \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ ，求連比 $x : y : z$ 。

$$\begin{array}{l} \text{解：} \quad x : y : z \\ \quad \quad 3 : 2 \\ \quad \quad \quad 3 : 2 \\ \hline \quad \quad 9 : 6 : 4 \end{array}$$

答： $x : y : z = 9 : 6 : 4$ 。

【例題 2】

(1) 設 $x : y = 2 : 3$ ， $y : z = 6 : 5$ ，求 $x : y : z$ 。

(2) $a : b = 1 : \frac{3}{4}$ ， $a : c = 6 : 7$ ，求 $a : b : c$ 。

$$\begin{array}{l} \text{解：(1)} \quad x : y : z \\ \quad \quad 2 : 3 \\ \quad \quad \quad 6 : 5 \\ \hline \quad \quad 4 : 6 : 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{(2)} \quad a : b : c \\ \quad \quad 4 : 3 \\ \quad \quad \quad 6 : 7 \\ \hline \quad \quad 12 : 9 : 14 \end{array}$$

答：(1) $x : y : z = 4 : 6 : 5$ 。 (2) $a : b : c = 12 : 9 : 14$ 。

【例題 3】

設三整數 x 、 y 、 z ，若 $x : y = 4 : 3$ ， $y : z = 2 : 5$ ，且 x 、 y 、 z 的最小公倍數為 240。求 $x + 2y + 3z$ 之值。

$$\begin{array}{l} \text{解：} \quad x : y : z \\ \quad \quad 4 : 3 \\ \quad \quad \quad 2 : 5 \\ \hline \quad \quad 8 : 6 : 15 \end{array}$$

$$\therefore x : y : z = 8 : 6 : 15, \quad x = 8t, \quad y = 6t, \quad z = 15t, \quad \therefore 120t = 240 \quad t = 2$$

$$\therefore x = 16, \quad y = 12, \quad z = 30 \quad \therefore x + 2y + 3z = 130$$

答： $x + 2y + 3z$ 之值為 130。

【例題 4】

有 a 、 b 、 c 三數，已知 a 的 3 倍等於 b 的 5 倍， a 的 4 倍等於 c 的 6 倍，試求：

(1) $a : 2b : 3c = ?$ (2) 設 c 為 150 時， a 、 b 各為多少？

$$\text{解：(1)} \quad 3a = 5b \quad \therefore a : b = 5 : 3, \quad 4a = 6c \quad \therefore a : c = 3 : 2$$

$$\therefore a : b : c = 15 : 9 : 10 \qquad \therefore a : 2b : 3c = 15 : 18 : 30 = 5 : 6 : 10$$

$$(2) \quad \text{設 } c = 10t = 150, \quad \therefore t = 15, \quad a = 225, \quad b = 135。$$

答：(1) $a : 2b : 3c = 5 : 6 : 10$ 。 (2) $a = 225$ ， $b = 135$ 。

【例題 5】

(1) $ax + by + c = 0$ 的圖形包含 $(1, 4)$ 、 $(4, 2)$ 兩點，求 $a : b : c = ?$

(2) 若 $y : (2x - y) : (x - 1) = 1 : 3 : 3$ ，求 $x + y = ?$

解：(1) $(1, 4)$ 將 $x = 1$ ， $y = 4$ 代入 $ax + by + c = 0$

$$\text{得到 } x + 4y + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(4, 2)$ 將 $x = 4$ ， $y = 2$ 代入 $ax + by + c = 0$

$$\text{得到 } 4x + 2y + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得到 } 3a - 2b = 0$$

$$\therefore 3a = 2b = 6t \quad \text{得 } a = 2t, b = 3t \text{ 代入 } \textcircled{1} \quad \text{得 } c = -14t$$

$$\therefore a : b : c = 2 : 3 : (-14)$$

(2) 設 $y = t$ ， $2x - y = 3t$ ， $x - 1 = 3t$

$$\therefore x = 2t = 3t + 1 \quad \therefore t = -1$$

$$\therefore x = -2, y = -1, x + y = -3$$

答：(1) $a : b : c = 2 : 3 : (-14)$ 。 (2) $x + y = -3$ 。

【例題 6】

(1) 設 $2x + y - z = 0$ ， $x - 2y + z = 0$ ，求 $x : y : z = ?$ (但 $xyz \neq 0$)

(2) 設 $(x + 1) : (y - 2) : (z + 3) = 4 : 5 : 6$ ，且 $x + 2y + 3z = 90$ ，
求 $x - y + z$ 之值。

解：(1) $2x + y - z = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$x - 2y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得到 } 3x - y = 0$$

$$\therefore y = 3x \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } z = 5x$$

$$\therefore x : y : z = 1 : 3 : 5$$

(2) 設 $x + 1 = 4t \Rightarrow x = 4t - 1$

$$y - 2 = 5t \Rightarrow y = 5t + 2$$

$$z + 3 = 6t \Rightarrow z = 6t - 3$$

$$\therefore 4t - 1 + 2(5t + 2) + 3(6t - 3) = 90$$

$$32t = 96 \Rightarrow t = 3$$

$$\therefore x = 11, y = 17, z = 15$$

$$\therefore x - y + z = 9$$

答：(1) $x : y : z = 1 : 3 : 5$ 。 (2) $x - y + z$ 之值為 9。

【例題 7】

設 a 、 b 、 c 為三正數，若 $3a = 6b = 2c$ ，求：(1) $a : b : c = ?$ (2) $\frac{2a - 3b + c}{a + 2b + 3c}$ 之值。

解：(1) 設 $3a = 6b = 2c = 6t$

$$(2) \quad \frac{2a - 3b + c}{a + 2b + 3c} = \frac{4t - 3t + 3t}{2t + 2t + 9t} = \frac{4}{13}$$

$$\therefore a = 2t, b = t, c = 3t$$

$$\therefore a : b : c = 2 : 1 : 3$$

答：(1) $a : b : c = 2 : 1 : 3$ 。 (2) $\frac{2a - 3b + c}{a + 2b + 3c}$ 之值為 $\frac{4}{13}$ 。

【例題 8】

設 a 、 b 、 c 、 x 、 y 、 z 都是正數，且 $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ，又知 $ax = by = cz$ ，求 $x : y : z = ?$

解：∵ $ax = by = cz$ ，∴ $x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2t} : \frac{1}{3t} : \frac{1}{4t} = 6 : 4 : 3$

答： $x : y : z = 6 : 4 : 3$ 。

【例題 9】

設 $xyz \neq 0$ ，若 $2xy = 3yz = 5zx$ ，求：(1) $x : y : z = ?$ (2) $\frac{x^2 - 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 之值。

解：(1) ∵ $\frac{2xy}{xyz} = \frac{3yz}{xyz} = \frac{5zx}{xyz}$ ∴ $\frac{2}{z} = \frac{3}{x} = \frac{5}{y} \Rightarrow x : y : z = 3 : 5 : 2$

(2) 設 $x = 3t$ ， $y = 5t$ ， $z = 2t$

$$\therefore \frac{x^2 - 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{9t^2 - 50t^2 + 12t^2}{9t^2 + 25t^2 + 4t^2} = \frac{-29t^2}{38t^2} = \frac{-29}{38}$$

答：(1) $x : y : z = 3 : 5 : 2$ 。(2) $\frac{x^2 - 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 之值為 $\frac{-29}{38}$ 。

【例題 10】

若 $2x : 3y : 4z = 1 : 2 : 3$ ，求：

(1) $x : y : z = ?$

(2) $(3x^2 - 2y^2 + z^2) : (x^2 + y^2)$ 之比值。

解：(1) ∵ $2x : 3y : 4z = 1 : 2 : 3 \Rightarrow x : y : z = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 6 : 8 : 9$

(2) 設 $x = 6t$ ， $y = 8t$ ， $z = 9t$

$$\therefore (3x^2 - 2y^2 + z^2) : (x^2 + y^2)$$

$$= (108t^2 - 128t^2 + 81t^2) : (36t^2 + 64t^2) = 61 : 100$$

$$\therefore (3x^2 - 2y^2 + z^2) : (x^2 + y^2) \text{ 之比值為 } 61 \div 100 = \frac{61}{100}$$

答：(1) $x : y : z = 6 : 8 : 9$ 。(2) $(3x^2 - 2y^2 + z^2) : (x^2 + y^2)$ 之比值為 $61 \div 100 = \frac{61}{100}$ 。

【例題 11】

設 $\triangle ABC$ 的三內角中， $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且 $2x : 3y = 8 : 9$ ，

$2y : z = 6 : 5$ ，求此三角形的三內角的度數。

解：∵ $2x : 3y = 8 : 9 \Rightarrow x : y = 4 : 3$

$$2y : z = 6 : 5 \Rightarrow y : z = 3 : 5$$

$$\therefore x : y : z = 4 : 3 : 5$$

設 $x = 4t$ ， $y = 3t$ ， $z = 5t$

$$\therefore 4t + 3t + 5t = 180^\circ \Rightarrow 12t = 180^\circ \therefore t = 15^\circ$$

∴ $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ 答： $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ 。

【例題 12】

設一三角形的周長為 170 公分，三邊長分別為 a 公分、 b 公分和 c 公分。

若 $a : b = 1 : 2$ ， $b : c = 3 : 4$ ，求此三角形的三邊長。

解：∵ $a : b = 1 : 2$ ， $b : c = 3 : 4$ ∴ $a : b : c = 3 : 6 : 8$

設 $a = 3t$ ， $b = 6t$ ， $c = 8t$ ∴ $a + b + c = 170 \Rightarrow 17t = 170 \therefore t = 10$

∴ $a = 30$ ， $b = 60$ ， $c = 80$

答：三角形的三邊長為 30 公分、60 公分、80 公分。

【例題 13】

$10(x + y) = 12(z + x) = 15(x + y)$ ，求：

(1) $x : y : z = ?$

(2) 依 $yz : zx : xy$ 的比分 355 為三部分。

解：(1) 設 $10(x + y) = 12(z + x) = 15(x + y) = 180t$

$$\therefore x + y = 18t \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$z + x = 15t \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x + y = 12t \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 得到 } 2(x + y + z) = 45t \therefore x + y + z = 22.5t \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{1} \text{ 得到 } z = 4.5t$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{2} \text{ 得到 } y = 7.5t$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \text{ 得到 } x = 10.5t$$

$$\therefore x : y : z = 3 : 5 : 7$$

(2) $yz : zx : xy = 35 : 21 : 15$

∴ 設 $yz = 35t$ ， $zx = 21t$ ， $xy = 15t$

$$\therefore 35t + 21t + 15t = 355 \Rightarrow 71t = 355 \therefore t = 5$$

$$\therefore yz = 175, zx = 105, xy = 75$$

答：(1) $x : y : z = 3 : 5 : 7$ 。(2) 三部分為 175、105、75。

【例題 14】

設四邊形 ABCD 中， $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ， $\angle D = t^\circ$ ，且 $2x : 5y = 4 : 15$ ，

$x : z = 1 : 2$ ， $z : 3t = 4 : 9$ ，求：

(1) $x : y : z = ?$ (2) $(x + y + z) : t = ?$ (3) 最大角為多少度？

解：(1) ∵ $2x : 5y = 4 : 15 \therefore x : y = 2 : 3$

$$\text{又 } \because x : z = 1 : 2 \therefore x : y : z = 2 : 3 : 4$$

(2) ∵ $z : 3t = 4 : 9 \therefore z : t = 4 : 3$

$$\Rightarrow x : y : z : t = 2 : 3 : 4 : 3 \therefore (x + y + z) : t = 9 : 3 = 3 : 1$$

(3) ∵ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \therefore 12r = 360^\circ \Rightarrow r = 30^\circ$

∴ $\angle C = 120^\circ$ 是最大角

答：(1) $x : y : z = 2 : 3 : 4$ 。(2) $(x + y + z) : t = 3 : 1$ 。(3) 最大角為 120° 。

