正比

何謂常數和變數：

常數：不會隨著其他因素而改變的數。 例：圓周率。

變數：隨著不同的情形而改變的數。 例：圓的半徑。

何謂正比：

當一個量 y 與另一個量 x 的比值是一個固定的常數時，稱 y 與 x 成正比關係。

可以用數學式 $\frac{y}{x}=k$ 或 $y=kx$，表示此一關係。

【範例】：x、y 二個數，當 x 增加 2 倍、3 倍、4 倍…時，y 會隨著增加 2 倍、3 倍、4 倍…；或者當 x 變成 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍…時，y 也會變成 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍……。

二個數之間的關係有此現象時，稱兩數成正比的關係。

簡單來說，當 x、y 成正比，就是 y 值會隨著 x 值增加幾倍而增加幾倍，那麼 y 值也一定會隨著 x 減少為幾倍而減少為幾倍。

【範例】：設 x 為正數，下列各式中哪些式子的 y 與 x 成正比？

（甲）$4y=5x$ （乙）$y=3x^3$ （丙）$y=\frac{1}{5x}$

（丁）$y=x+3$ （戊）$xy=1000$ （己）$\frac{y}{x}=4$ 。

解：（甲）$4y=5x \Leftrightarrow y=\frac{5}{4}x$。

（己）$\frac{y}{x}=4$。 答：(甲)、(己)為正比的關係。

正比的關係表：

【範例】：下表為可樂數量與價錢的關係，請問 8 瓶可樂的價錢是多少元？

數量(罐)(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
價錢(元)(y)	17	34	51	68	85	102	119	?	153

解：8÷4＝2……8 瓶是 4 瓶的 2 倍，

68×2＝136……價錢也會是 68 元的 2 倍。

答：8 瓶可樂的價錢是 136 元。

正比的關係式：

x、y二數成正比例時，y除以x所得商固定不變，即關係式為：$\frac{y}{x}$＝商(k)

或是以 $y=k\cdot x$ 來表示也可以，在此k為常數。

【範例】：如上表所示，假設可樂數量為x，總價為y，我們知道一瓶可樂售價為 17 元，把總價＝可樂售價×數量，也就是$y=17\times x$，即可得正比例的關係式：$y=17x$ 或是移項可得 $\frac{y}{x}=17$。

正比的圖形：

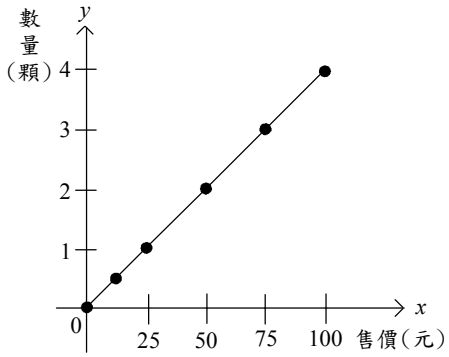
當x、y成正比時，所畫成的關係圖，必為通過原點的一直線。

【範例】：下表為蘋果數量和價錢的關係，請試畫出此關係圖。

數量(顆)	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
價錢(元)	0	12.5	25	50	75	100	…

解　：

從右圖中，逐一標出(x，y)，若上表中的(x，y)的數據愈多，則標出的點愈密集。



正比的應用：

x，y成正比，透過關係表、關係式或關係圖就可以找出商(常數)，進而找無限多組(x，y)。

【範例】：小華開車去加油站加油，已知汽油每 2 公升可跑 $13\frac{7}{10}$ 公里，總共加了 15 公升的汽油，請問可以跑多少公里？

解　：每一公升所走距離：$13\frac{7}{10}\div 2=6\frac{17}{20}$(公里)

乘以 15 得到總共距離為：$6\frac{17}{20}\times 15=102\frac{3}{4}$(公里)。

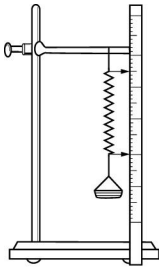
答：可以跑 $102\frac{3}{4}$ 公里。

虎克定律：在彈性限度內，彈簧的伸長量與所受的外力成正比。

※**備註**：一個彈簧所能承受的最大外力，稱為此彈簧的**彈性限度**，超過此值彈簧就不會恢復原狀，而產生永久形變。

【**範例**】：小華做如附圖中所示力的測量實驗，結果如附表。請問當彈簧長度 30 公分時，砝碼重量為多少公克？(假設未超過彈性限度。)

砝碼重量(gw)	0	20	40	60	80	100	…	?
彈簧長度(cm)	20	21	22	23	24	25	…	30
彈簧伸長量(cm)	0	1	2	3	4	5	…	10



解：∵ 由上表可發現：20 ÷ 1 ＝ 20，

40 ÷ 2 ＝ 20，

60 ÷ 3 ＝ 20，

80 ÷ 4 ＝ 20，

1000 ÷ 5 ＝ 20。

∴ 砝碼重量與彈簧伸長量成正比例關係。

砝碼重量 ÷ 彈簧伸長量 ＝ 20

砝碼重量 ＝ 彈簧伸長量 × 20

＝ 10 × 20

＝ 200（公克）。

【**範例**】：一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，($D=\frac{M}{V}$)。

當體積(V)固定時，質量越大密度也越大；質量越小密度也越小。

則密度(D)跟質量(M)成正比。

當密度(D)固定時，質量越大體積也越大；質量越小體積也越小。

則體積(V)跟質量(M)成正比。

若一個物體的體積為 100(cm^3)，則：

質量(g)	50	100	150	200	250	300
密度(g/cm^3)	0.5	1	1.5	2	2.5	3

若一個物體的密度為 2(g/cm^3)，則：

質量(g)	50	100	150	200	250	300
體積(cm^3)	25	50	75	100	125	150

【範例】：自由落體落下的距離與時間的平方成正比，已知在兩秒內落下的距離為 1960 公分，問：(1) 在 1.2 秒內落下多少公分？

(2) 在第 3 秒內落下多少公分？

解：(1) 設距離為 y 公分，時間為 x 秒，則 $y=kx^2$。

將 $x=2$，$y=1960$ 代入 $y=kx^2$，可得：$1960=4k$

$k=490$

因此當 $x=1.2$，$y=490\times(1.2)^2$

$=705.6$

(2) 因為 $y=490x^2$

所以 $y=490\times(3^2-2^2)$

$=1225$

答：(1) 在 1.2 秒內落下 705.6 公分，

(2) 在第 3 秒內落下 1225 公分。

【範例】：已知 $(5x-y)$ 與 $(3x+y)$ 成正比，當 $x=-2$，$y=1$，求：

(1) x 與 y 的關係如何？ (2) 當 $x=-3$ 時 $y=$？

解：(1) $(5x-y)=k\times(3x+y)$，

將 $x=-2$，$y=1$ 代入，可得：$-10-1=k\times(-6+1)$

$k=\frac{11}{5}$

所以 x 與 y 的關係式為 $(5x-y)=\frac{11}{5}\times(3x+y)$。

(2) 將 $x=-3$ 代入 $(5x-y)=\frac{11}{5}\times(3x+y)$，

可得：$-15-y=\frac{11}{5}\times(-9+y)$

$-75-5y=-99+11y$

$y=\frac{3}{2}$

小 試 身 手

【例題 1】

溜溜球一個是 150 元，所買的溜溜球數量和價錢的關係如下表：

溜溜球(x個)	1	2	3	4	5	6
價錢(y元)	150	300	450	600	750	900

(1) 溜溜球個數變成 3 倍，4 倍，…時，價錢變成(3)倍，(4)倍…。

(2) x增加則y隨x增加，x、y成(正)比例關係。

(3) x減少則y隨x(減少)，價錢隨著溜溜球數量成(正)比例關係。

【例題 2】

圓半徑和面積的關係如下表，請填入各空格裡的數並回答下列問題(圓周率用 3 來計算)

半徑(cm)	1	2	3	4	5	8	10
面積(cm^2)	3	12	27	48	75	192	300

(1)若圓的面積是 4800cm^2，半徑是多少公分？1600cm

(2)圓的半徑 10cm 是 5cm 的(2)倍，半徑 10cm 的面積是半徑 5cm 的面積的(4)倍。

(3)圓半徑和面積是否成正比例？(否)。

【例題 3】

下表中，x和y有一定的比例關係，請回答下列問題：

x(cm)	2	3	4	ㄆ
y(元)	24	36	ㄅ	60

(1) 求出表格中，ㄅ，ㄆ各代表什麼數？

(2) x和y成什麼關係？

(3) x：y的比值為何？

(4) 當$x=18$公分，那麼y應該為多少呢？

答：(1) ㄅ代表 48，ㄆ代表 5。(2) $y=12x$。(3) x：y的比值為 $\frac{1}{12}$ 。

(4) $y=12\times18=216$。

【例題 4】

鐵條長 18 公尺重量是 144 公克，請回答下列問題：

(1) 完成右表填入適當的數。

(2) x 與 y 成什麼關係？

(3) x ： y 的比值為何？

(4) 重量 180g 的鐵絲，長度是多少？

(5) 長度 15 公尺的鐵絲，重量是多少？

鐵條(xm)	18	20	36
重量(yg)	144	160	288

答：(2) $y=8x$。(3) x ： y 的比值為$\frac{1}{8}$ 。

(4) $180=8x$ ∴ $x=22.5$。 ∴ 長度是 22.5 公尺。 (5) $y=8\times15=120$g。

【例題 5】

小明的身高 150 公分，他的影子長剛好 2.5 公尺，同一時間量得樹影長 9 公尺，請問：

(1)樹高多少公尺？

(2)實物的高度(x 公尺)和影子(y 公尺)成什麼關係？

(3)寫出 x 和 y 的關係式(列出二種不同寫法)。

(4)若此時有一棟建築物高 12 公尺，則同一時刻影子長多少公尺？

答：(1) $\frac{1.5}{2.5}=\frac{x}{9}=\frac{3}{5}$ $\therefore x=\frac{27}{5}$ ∴樹高$\frac{27}{5}$公尺。 (2) $x=\frac{3}{5}y$ 。

(3) $x=\frac{3}{5}y$ ， $y=\frac{5}{3}x$ ，$5x=3y$ 。

(4)$\frac{12}{a}=\frac{3}{5}$ ∴ $a=20$ ∴ 同一時刻影子長 20 公尺。

【例題 6】

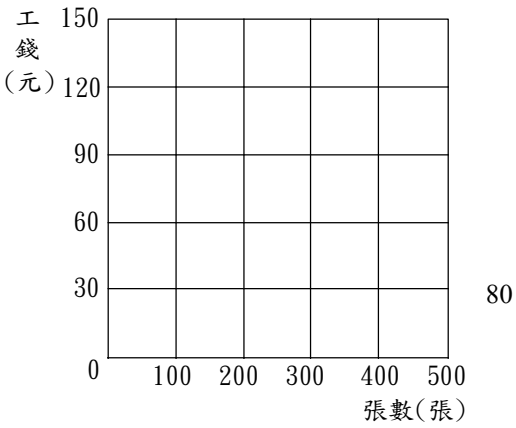
小吉暑假打工，每發出 100 張廣告紙可以得到工錢 30 元，請問：

(1)每發出一張廣告紙多少元？

(2)發出張數和工錢成什關係？

(3)請完成下表並畫成關係圖？

張數(張)	1	100	250	900
工錢(元)	0.3	30	75	270



答：(1) 30÷100＝0.3 元。

(2) 正比。工錢＝0.3 × 發出張數。

反比

何謂反比：

當一個量 y 與另一個量 x 的乘積是一個固定的常數時，稱 y 與 x 成反比，

或者說 y 與 $\frac{1}{x}$ 成正比。可以用數學式 $x \cdot y = k$ 或 $y = \frac{k}{x}$，表示此一關係。

【範例】：x、y 二個數，當 x 增加 2 倍、3 倍、4 倍……時，y 會隨著變成 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍……；或者當 x 變成 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍…時，y 也會變成 2 倍、3 倍、4 倍……。

二個數之間的關係有此現象時，稱兩數成反比的關係。

簡單來說，當 x、y 成反比，就是 y 值會隨著 x 值增加而減少，那麼 y 值也一定會隨著 x 減少而增加。

【範例】：設 x 為正數，下列各式中哪些式子的 y 與 x 成反比？

（甲）$4y = 5x$　（乙）$y = 3x^3$　（丙）$y = \frac{1}{5x}$

（丁）$y = x + 3$　（戊）$xy = 1000$　（己）$\frac{y}{x} = 4$ 。

解：（丙）$y = \frac{1}{5x} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{5}$ 。

（戊）$xy = 1000$。　答：(丙)、(戊)為反比的關係。

【範例】：面積 $54\,cm^2$ 的長方形，若長為 $x\ cm$，寬為 $y\ cm$，則 x 和 y 是成什麼關係？

解：

$$\begin{aligned} 54 &= 1 \times 54 \\ &= 2 \times 27 \\ &= 3 \times 18 \end{aligned}$$

所以可以得到 x 和 y 為**反比關係**。

反比的關係表：

把上例可能的情形填入表中，並請找出當長方形的長為 $\frac{1}{2}$ 公分時，寬為多少公分？

面積(cm^2)	54	54	54	54	54	54	54	54
長($x\ cm$)	1	2	3	6	9	18	27	54
寬($y\ cm$)	54	27	18	9	6	3	2	1

反比的關係式：

當 x 、 y 二數成反比時， $x \times y =$ 積(常數)

【範例】：面積 $54\,cm^2$ 的長方形，若長為 $x\,cm$ ，寬為寬為 $y\,cm$ ，則 x 和 y 的關係式為： $x \times y = 54$。

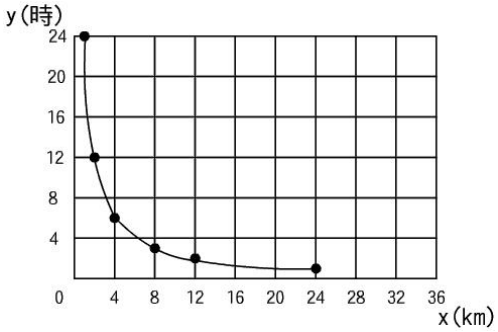
反比的圖形：

當 x 、 y 成反比時，所畫成的關係圖，為不通過原點的曲線。

【範例】：走 $24\,km$ 路程，時速與時間小時的關係表如下，請畫出關係圖。

時速 x (km)	2	3	4	6	8	12
時間 y (時)	12	8	6	4	3	2

解 ：從右圖中，逐一標出(x ， y)，若上表中的(x ， y)數據愈多，則標出的點愈密集。



反比的應用：

x ， y 成反比，透過關係表、關係式或關係圖就可以找出積(常數)，進而找無限多組(x ， y)。

【範例】：設 y 與 $(2x+3)$ 成反比，當 $x=6$ ， $y=\frac{1}{3}$ 時，求：

(1) x 與 y 的關係如何？ (2) 當 $x=11$ 時 $y=$ ？

解 ：(1) $y \times (2x+3) = k$ ，

將 $x=6$ ， $y=\frac{1}{3}$ 代入，可得： $\frac{1}{3} \times (12+3) = k$

$k=5$

所以 x 與 y 的關係式為 $y \times (2x+3) = 5$。

(2) 將 $x=11$ 代入 $y \times (2x+3) = 5$，

可得： $y\times(22+3)=5$

$$y=\frac{1}{5}$$

【範例】：一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，($D=\frac{M}{V}$)。

也可以改寫成質量(M)等於密度(D)乘以體積(V)，($M=D\cdot V$)。

當質量(M)固定時，密度越大則體積越小；密度越小則體積越大。

所以密度(D)跟體積(V)成反比關係。

若一個物體的質量為 200(g)，則：

體積(cm^3)	50	100	150	200	250	300
密度(g/cm^3)	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$

【範例】：一個物體的密度(D)等於質量(M)除以體積(V)，($D=M\div V$)。

假設某物體的密度為 0.8(g/cm^3)，體積為 500(cm^3)。當此物體質量為固定值的時候，體積要多少？才能使密度減少 0.2。

解 ：$\because$ $D=M\div V$

$\therefore$ $M=D\times V$ ， 則：$M=0.8\times500=400(g)$

使密度減少 0.2，也就是：密度(D)$=0.8-0.2=0.6$(g/cm^3)。

$M=D\times V$

$\Leftrightarrow$ $400=0.6\times V$

$\Leftrightarrow$ $V=400\div0.6=\frac{2000}{3}(cm^3)$

答：當體積為 $\frac{2000}{3}(cm^3)$時。

【範例】：有一個工程，若每天有 8 位工人施工，則需要施工 18 天，若希望提早 6 天完成，則需要多少工人？

解 ：工程每個人所需的花費的總天數：$8\times18=144$(天)

將總天數除以施工天數：$144\div12=12$（人）

壓力：

（1）意義：物體的表面受到外力作用時，表面凹陷越深代表所受的壓力越大。

（2）定義：單位面積所受的正向力。

（3）公式：若以 P 表示壓力，F 表示正向力，A 表示接觸面積，

則F、P、A的關係為： $P=\frac{F}{A}$ 。

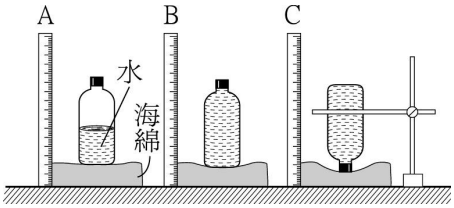
(4) 正向力必須垂直於接觸面。

壓力的單位：由力的單位除以面積的單位而產生。

常　用　者：公克重／平方公分（gw/cm^2）、公斤重／平方公尺（kgw/m^2）

其中 1 gw/cm^2 ＝ 1000 kgw/m^2

下圖中A、B、C是有關壓力的實驗裝置：



在B、C兩個裝置中，因為瓶子裡的水一樣多，所以正向力一樣，但是C裝置的瓶子與海棉的接觸面積較小，海綿的凹陷程度較大；而B裝置的瓶子與海棉的接觸面積較大，海綿的凹陷程度較小。所以當正向力(F)固定時，瓶子與海棉的接觸面積(A)跟海綿的凹陷程度(壓力P)成反比。

$$F=P\cdot A$$

小 試 身 手

【例題 1】

誠誠的寒假作業有一項是閱讀哈利波特，誠誠調查幾位同學的閱讀情形如下表，請問：

姓名	愛愛	琦琦	小旻	誠誠
頁數(頁/天)	10	75	15	30
所需天數(天)	45	6	30	15

(1)頁數變成 2 倍，3 倍…，所需要的天數變成($\frac{1}{2}$)倍，($\frac{1}{3}$)倍。

(2)誠誠的天數是愛愛的($\frac{1}{3}$)倍，頁數是愛愛的(3)倍。

(3)天數隨著頁數成(反)比例。

(4)這本書共有(450)頁。

【例題 2】

企鵝要走到 30 km外的海邊，若速率為每小時 x km時，所花的時間為 y 小時，請問：

速率 x(km/時)	1	5	4	0.5	$\frac{1}{3}$	45	2	120
時間 y(時)	30	6	7.5	60	90	$\frac{2}{3}$	15	$\frac{1}{4}$

(1)完成 x 與 y 的關係表：

(2) x 與 y 成什麼關係？

(3)請寫出 x 和 y 的關係式？

答：(2) 成反比例，$xy=30$。 (3) $xy=30$。

【例題 3】

內部邊長為 1 公尺的正方體盒子，打開每分鐘流入 x 公升的水管，花費 y 分鐘剛好到達滿水位，請問：

(1) 正方體盒子的容積多少公升？

(2) x 與 y 的關係式為何？

(3) 若分別有 A 水管每分鐘流入 20 公升，B 水管每分鐘流 16 公升，則 A 水管和 B 水管的出水量比和比值各為多少？

(4) 由(3)到達滿水位時，A 水管和 B 水管所花的時間比和比值各為何？

解：(1) $1\times1\times1=1$ 立方公尺＝1000 公升。

(2) $xy=1000$ 。

(3) A 水管和 B 水管的出水量比為 20：16＝5：4； 比值為 $\frac{5}{4}$ 。

(4) A 水管和 B 水管所花的時間比為 $\frac{1000}{20}:\frac{1000}{16}=4:5$；比值為 $\frac{4}{5}$ 。

答：(1)1000 公升。 (2) $xy=1000$ 。

(3) A 水管和 B 水管的出水量比為 5：4， 比值為 $\frac{5}{4}$ 。

(4) A 水管和 B 水管所花的時間比為 4：5，比值為 $\frac{4}{5}$ 。

【例題 4】

有一個工程，若每天有 12 位工人施工，則需要施工 15 天，若希望提早 5 天完成，請問：

(1)原先的工作天數和現在的工作天數比為何？

(2)提早 5 天完成則共需要多少位工人？

解：(1) 15：10＝3：2

(2) 12 × 15 ÷（15－5）＝18 位工人

答：(1) 3：2 。 (2)18 位工人。

【例題 5】

有大小兩個齒輪相密合，大齒輪齒數 96 齒，小齒輪齒數 32 齒，小齒輪旋轉 12 圈花掉 36 秒，大齒輪要轉幾圈？大齒輪轉 1 圈需多少秒？

解：大齒輪要轉 32 × 12 ÷ 96＝4 圈，

小齒輪旋轉 1 圈花掉 36÷3＝12 秒，∴ 大齒輪轉 1 圈需 96 ÷ 32 × 12＝36 秒

答：大齒輪要轉 4 圈，大齒輪轉 1 圈需 36 秒。

【例題 6】

有三個齒輪 A、B、C，各別的齒數分別為 72、24、96，A 齒輪以順時針方向旋轉，請回答下列問題：

(1)B、C 兩齒輪各以何種方向旋轉？

(2)若 A 齒輪轉 8 圈，則 B、C 的回轉數各為多少？

(3)若 B 齒輪旋轉一圈時，A、C 兩齒輪各旋轉多少度？

(4)若 B 齒輪旋轉一圈需 13 秒，則 A、C 兩齒輪各旋轉一圈各需多少秒？

解：(1) B 齒輪以逆時針方向旋轉、C 齒輪以順時針方向旋轉。

(2) B 的回轉數 $72 \times 8 \div 24 = 24$ 圈 ， C 的回轉數 $72 \times 8 \div 96 = 6$ 圈

(3) A 齒輪旋轉 $\frac{24}{72} \times 360° = 120$ 度， C 齒輪旋轉 $\frac{24}{96} \times 360° = 90$ 度

(4) A 齒輪旋轉一圈需 $72 \div 24 \times 13 = 39$ 秒，

C 齒輪旋轉一圈需 $96 \div 24 \times 13 = 52$ 秒

答：(1) B 齒輪以逆時針方向旋轉、C 齒輪以順時針方向旋轉。

(2) B 的回轉數 24 圈 ， C 的回轉數 6 圈。

(3) A 齒輪旋轉 120 度， C 齒輪旋轉 90 度。

(4) A 齒輪旋轉一圈 39 秒，C 齒輪旋轉一圈需 52 秒。

【例題 7】

下表是農場割草時，割草機的數目和工作時數的關係表，請問：

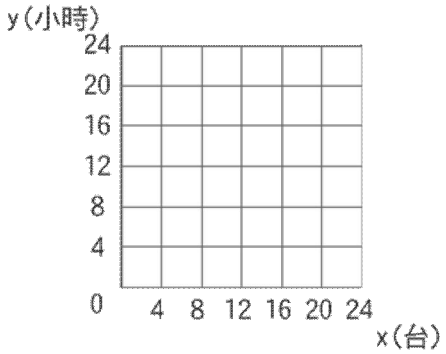
x(台)	3	6	12	24	48	32	120
y(時)	8	4	2	1	0.5	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$

(1) 完成上面的關係表。

(2) 根據上表完成右邊的關係圖。

(3) 右圖是一條(曲)線。

(4) x 和 y 的關係式是(反)比例關係。



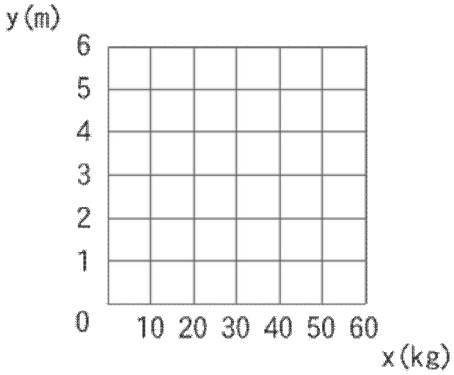
【例題 8】

小浩和小華在公園玩翹翹板，體重 30 公斤的小華坐在距支點 2 公尺的地方，若小浩的體重 x 公斤，坐在距支點 y 公尺的地方，請問：

x(kg)	40	25	20	15	30
y(m)	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{5}$	3	4	2

(1) 完成上面的關係表。

(2) x 和 y 成什關係？

(3) 畫出右邊的關係圖？

答：(2) $xy=60$。