函數與其圖形

變數與函數

(1)**函數的定義**：

設 A、B 為兩組資料，如果對於 A 資料中的每一個元素 x，在 B 資料中都有唯一的元素 y 與之對應，則稱這個對應 f 為 A 到 B 的函數，我們以 f ：A→B 來表示，並將對應於元素 x 之 y 值，記為 $f(x)$。

【範例】：

一年有十二個月，每個月的天數不同。在平年中，如果用 x 表示月份，y 表示 x 月份的天數，則 x 與 y 之間的對應關係如下表所示(如果是閏年，2 月份的天數為 29 天)：A 資料為月份，B 資料為天數。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

在這個關係中，每一個 x 值都只有一個 y 的對應值。

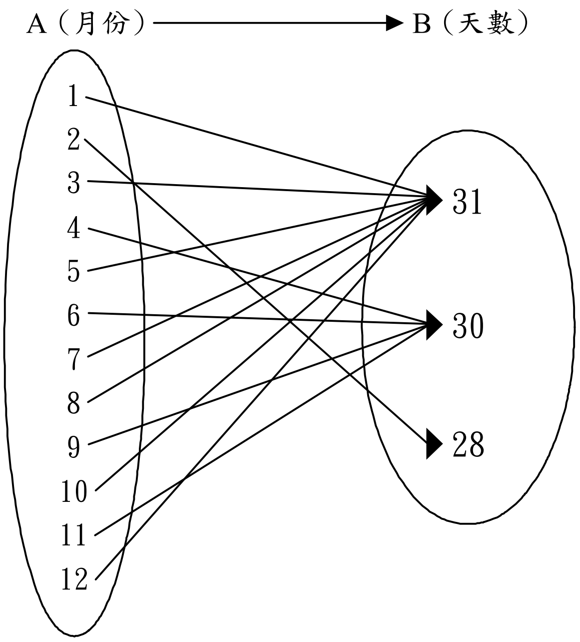
例如：　$x=1$ 時，$y=31$

$x=2$ 時，$y=28$

$\vdots$

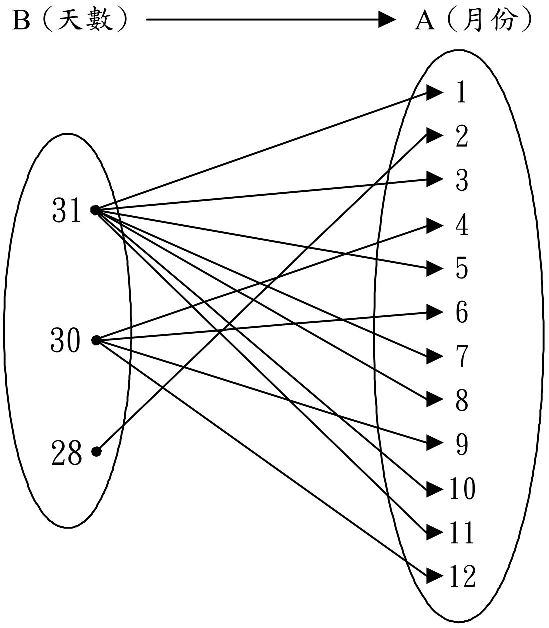
$x=12$ 時，$y=31$

這種對應關係表示 y 為 x 的函數，如下圖所示：



A對應到B是函數對應關係

反過來說，當 y 值為 31 時，得到對應的 x 值不只一個，有 1、3、5、7、8、10、12 等七個，所以 x 不是 y 的函數，如下圖所示：



B對應到A不是函數對應關係

【範例】：

在 y 隨著 x 正變的關係式 $y=5x$ 中，對於每一個 x 值，都恰好只能得到一個 y 值。

例如： $x=2$ 時，$y=10$

$x=3$ 時，$y=15$

⋮

當 x 的值給定時，與它對應的 y 值也就跟著確定，這種 x 與 y 之間的對應關係叫做 y 是 x 的函數。

同樣的，在 y 隨著 x 反變的關係式 $y=\dfrac{10}{x}$ 中，對於每一個 x 值($x\neq 0$)，都恰好只能得出一個 y 值。

例如： $x=1$ 時，$y=10$

$x=2$ 時，$y=5$

⋮

當 x 的值給定時，與它對應的 y 值也跟著確定，所以我們也把反變關係 $xy=10$，$y=\dfrac{10}{x}$ 叫做 y 是 x 的函數。

假如我們把上述的反變關係 $y=\dfrac{10}{x}$ 改寫成 $x=\dfrac{10}{y}$，同樣可以看出，

對於每一個 y 值($y\neq 0$)，都只有一個對應值。

例如： $x=1$ 時，$y=10$

$x=2$ 時，$y=5$

M

所以我們也可以把對應關係 $x=\dfrac{10}{y}$ 看做 x 是 y 的函數。

【範例】：

當正方形的邊長是 x 時，它的面積是 $A=x^2$，如果邊長 x 一經確定，則正方形面積 A 的對應值也跟著確定。例如： $x=2$ 時，$A=4$

$x=3$ 時，$A=9$

M

所以正方形面積 A 是邊長 x 的函數。(即 $A=A(x)=x^2$)

【範例】：有 18 顆糖果，分給 x 人，每人可分得 y 顆糖果，可列出關係式為：$y=\dfrac{18}{x}$

x	1	2	3	6	……
y	18	9	6	3	……

當 x 的值改變時，y 的值也隨著改變，如上表所示，像這種的對應關係，我們叫做 y 是 x 的函數。(即 $y=y(x)=\dfrac{18}{x}$，其中 $x=1, 2, 3, 4, \cdots, 18, 19\cdots$)

【範例】：下表是蔡老師在 5 歲到 26 歲的身高紀錄表：

年齡	5	8	11	14	17	20	23	26
身高(cm)	110	122	134	161	172	177	177	177

根據上表，問蔡老師的身高是否為年齡的函數？

解：根據上表的資料可以觀察到，只要知道蔡老師的年齡，就能知道蔡老師當時的身高，也就是每一個年齡值都會有一個身高的對應值。

所以蔡老師的身高是年齡的函數。(即 身高＝身高(年齡))

【範例】：下表是黃先生在 31 歲到 39 歲的身高紀錄表：

年齡(歲)	31	32	33	34	35	36	37	38
體重(kg)	62	63	63	64	67	67	68	72

根據上表，問黃先生的年齡是否為體重的函數？

解：根據上表的資料可以觀察到，只要知道黃先生的年齡，就能知道黃先生當時的體重。相反地，只知道黃先生的體重，並無法從上表判斷出他的年齡。例如，當黃先生的體重是 63 時，我們無法判斷他的年齡是 32 歲或 33 歲。所以黃先生的年齡不是體重的函數。

(即 年齡≠年齡(體重))

(2)**函數表示法**：

若用 x、y 表示兩個變數，而且對於任何一個 x 的值，恰好有一個 y 值與它對應，我們就說 y 是 x 的函數，x 是自變數，y 是應變數。當 y 是 x 的函數時，常用符號表示成：$y=f(x)$。

例如：$f(x)=5x$，$f(x)=\dfrac{18}{x}$，$f(x)=x^2$，$f(x)=x^2+2x-1$，

$f(x)=50+2x$，等都是 x 的函數。

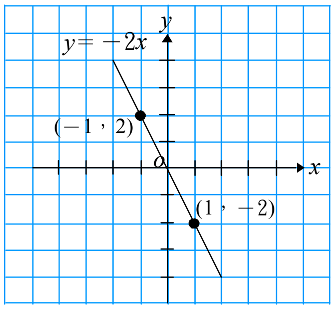
另外函數也可以表示成：$y=g(x)$，$y=B(x)$等的形式。

例如：方程式 $2x+y=0$ 的圖形。

當 $2x+y=0$ 時可以移項化簡成 $y=-2x$

圖形如右圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=-2x$。

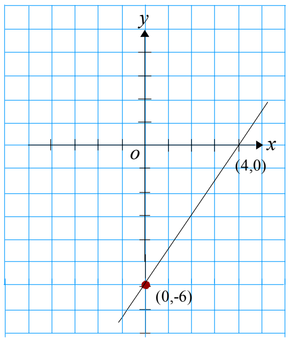


例如：方程式 $3x-2y=12$ 的圖形。

方程式 $3x-2y=12$，可以移項化簡成 $y=\dfrac{3}{2}x-6$

圖形如右圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=\dfrac{3}{2}x-6$。

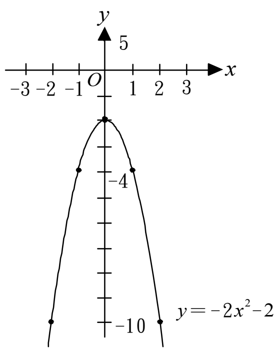


例如：方程式 $y+2x^2+2=0$ 的圖形。

方程式 $y+2x^2+2=0$，可以移項化簡成 $y=-2x^2-2$

圖形如下圖所示：

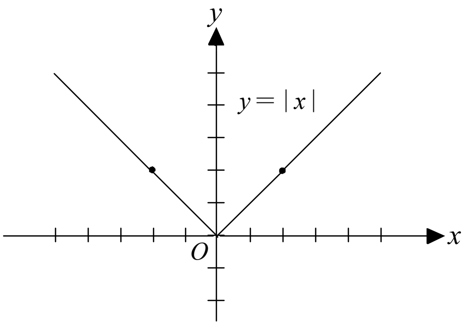
y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=-2x^2-2$。



例如：方程式 $y=|x|$ 的圖形。

方程式 $y=|x|$，其圖形如下圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=|x|$。



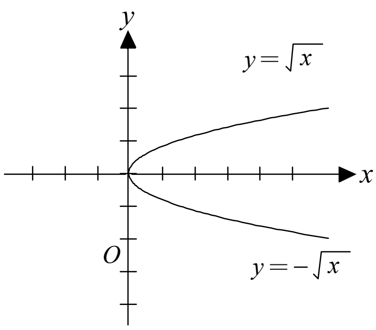
當然並不是每一個方程式都是函數，其中也有不是函數的方程式。

例如：方程式 $x=y^2$ 的圖形。

方程式 $x=y^2$，可以移項改寫成 $y=\pm\sqrt{x}$

其圖形如下圖所示：

在此方程式中，y 並不是 x 的函數。

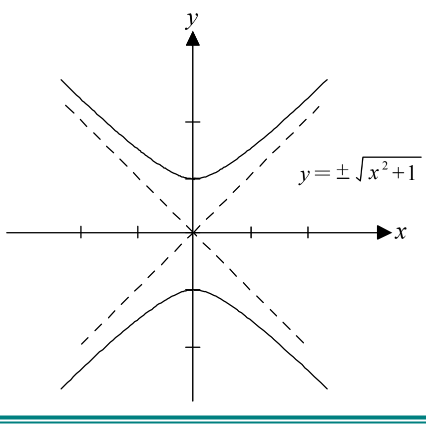


例如：方程式 $y^2-x^2-1=0$ 的圖形。

方程式 $y^2-x^2-1=0$，可以移項改寫成 $y=\pm\sqrt{x^2+1}$

其圖形如下圖所示：

在此方程式中，y 並不是 x 的函數。



(3)<u>函數的判別法則</u>：

在A、B兩組資料中，每一個元素x與其對應值y，如果可以一對一或者多對一，則稱y是x函數；但每一個元素x與其對應值y，如果是一對多或一對無則不是函數。

1. 一對一函數：

若x的每一個值，y恰有一對應值(一對一)，則y是x的函數。

【範例】：如果$y=30x$，則y是x的函數。

x		y
1	$\longrightarrow$	30
2	$\longrightarrow$	60
3	$\longrightarrow$	90
4	$\longrightarrow$	120
⋮		⋮

2. 多對一函數：

兩個或兩個以上的x值，可有相同的y值(多對一)，是函數。

【範例】：如果$y=x^2$，則y是x的函數。

x		y
1	$\longrightarrow$	1
-1	$\longrightarrow$	1
2	$\longrightarrow$	4
-2	$\longrightarrow$	4
3	$\longrightarrow$	9
-3	$\longrightarrow$	9
⋮		⋮

3. 一對多(或一對無)函數：

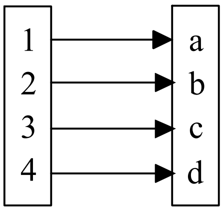
若x的每一個值，y非恰有一對應值或y沒有對應值(一對多或一對無)，不是函數。

【範例】：如果$y=x^2$，則x不是y的函數。

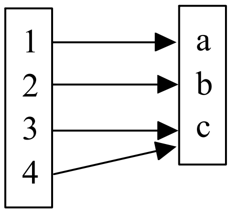
因為如果$y=1$，我們並不知道所對應的x值是1，還是-1。

y		x
1	$\longrightarrow$	1
1	$\longrightarrow$	-1
4	$\longrightarrow$	2
4	$\longrightarrow$	-2
9	$\longrightarrow$	3
9	$\longrightarrow$	-3
⋮		⋮

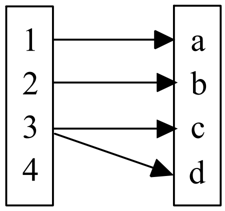
函數對應關係的判斷法則，可以用下圖來表示：



一對一函數



多對一函數



不是函數

(4)<u>**函數值**</u>：

在函數 $f(x)=5x$ 中，當 $x=1$ 時，我們把它所對應的函數值寫成 $f(1)$，因此 $f(1)=5\cdot1=5$；$x=3$ 時，它所對應的函數值是 $f(3)=5\cdot3=15$ 一般來說，與 x 對應的函數值就是 $f(x)$。

【範例】：設 $g(x)=\dfrac{10}{x}$，求 $g(5)$與 $g(10)$的值。

解　：因為 $g(x)=\dfrac{10}{x}$，所以 $g(5)=\dfrac{10}{5}=2$

$$g(10)=\frac{10}{10}=1$$

【範例】：設函數 $f(x)=x^2$，分別求 $x=3$ 與 $x=4$ 時的函數值。

解　：因為 $f(x)=x^2$，所以 $f(3)=3^2=9$

$$f(4)=4^2=16$$

【範例】：設函數 $A(x)=100+8x$，分別求 $A(10)$與 $A(50)$的值。

解　：因為 $A(x)=100+8x$，所以 $A(10)=100+8\cdot10=180$

$$A(50)=100+8\cdot50=500$$

小 試 身 手

【例題一】

誠誠原存有 100 元，自一月一日起，他又將每天的零用錢儲蓄 8 元，自開始儲蓄 x 天後，誠誠共有存款 y 元。

(1) 寫出 y 與 x 的函數關係。 (2) 到同一年的二月五日止，誠誠共有存款多少元？

解：

(1) 按題意：$y=100+8x$，只要 x 值確定，只有一個 y 的對應值，
所以 y 是 x 的函數。

(2) 一月一日到二月五日共有 $31+5=36$(天)，所以 $y=100+8\cdot 36=388$(元)
答：誠誠共有存款 388 元

【練習一】

一個農人想用籬笆圍成一個面積為 100 平方公尺的三角形花圃，如果花圃的底是 x 公尺，高為 y 公尺。

(1) 寫出 y 與 x 的函數關係。 (2) 當底為 20 公尺，其高是多少公尺？

解：(1) 由三角形面積公式，可得 y 與 x 的關係式：$\frac{1}{2}xy=100$ 即 $y=\frac{200}{x}$ $(x>0)$
只要 x 值確定，只有一個 y 的對應值 $\frac{200}{x}$ 跟著確定，所以 y 是 x 的函數。

(2) 當底為 20 公尺，即 $x=20$，可得：$y=\frac{200}{20}=10$
故知面積為 100 平方公尺的三角形花圃，當底為 20 公尺時，其高是 10 公尺。

【例題二】

寫出下列 x 、 y 的關係式；且判斷是否為函數：

(1) 邊長為 x cm 的正三角形，其周長為 y cm。

(2) 周長為 x cm 的長方形，其面積為 y cm^2。

解：(1) 正三角形周長＝3・邊長 ， $y=3\cdot x$
當 x 值確定時，y 值就唯一確定 ， $\therefore$ y 是 x 的函數

(2) 長方形面積＝長・寬 ， $y=$ 長・寬 ， 長＋寬＝$\frac{x}{2}$
當 x 值確定時，y 值沒有唯一確定 ， $\therefore$ y 不是 x 的函數

【練習二】

一杯 x 元的咖啡，買 10 杯總金額為 y，寫出其關係式，且判斷是否為函數？

解：

總金額 $y=10\cdot x$

當 x 值確定時，y 值就唯一確定， $\therefore y$ 是 x 的函數

【例題三】

周長為 24cm 的長方形，長確定，當寬值變動時，面積也會跟著變動，試著將空格(A、B、C、D)填入適當的數：

長(cm)	1	2	3	4	5
寬(cm)	11	10	A	B	7
面積(cm)	11	20	C	D	35

解：

周長為 24，長＋寬＝24÷2＝12

A＝12－3＝9　C＝3・9＝27

B＝12－4＝8　D＝4・8＝32

答：A＝9　B＝8　C＝27　D＝32

【練習三】

正方形周長的變化量如右，則邊長為何？

試著將空格填入適當的數：

周長(cm)	10	12	14	16	18	20
邊長(cm)	A	3	B	4	C	D

解：

正方形周長＝邊長・4 ，邊長＝正方形周長÷4

A＝10 ÷ 4＝2.5　B＝14 ÷ 4＝3.5

C＝18 ÷ 4＝4.5　D＝20 ÷ 4＝5

答：A＝2.5　B＝3.5　C＝4.5　D＝5

【例題四】

每小時走 4 公里，走 x 小時所前進的距離為 y 公里，請回答下列問題：

(1) 寫出 x 與 y 的關係式？ (2) 如果此函數用 g 表示，請寫出 $g(x)$

(3) $x=6$ 時，$g(x)$的值為多少？ (4) $g(x)=32$ 時，x 值為多少？

解：

(1) 距離＝速率 × 時間，$y=4\times x$

(2) 函數表示為：$g(x)=4x$

(3) $x=6$ 代入可得：$g(6)=4\times 6=24$

(4) $g(x)=32$ 代入可得：$32=4\times x$ ， $x=8$

答：(1) $y=4x$ (2) $g(x)=4x$ (3) 24 (4) $x=8$

【練習四】

邊長為 x 公分的正三角形，其周長為 y 公分，請回答下列問題：

(1) 寫出 x 與 y 的關係式？ (2) 如果此函數用 g 表示，請寫出 $g(x)$

(3) $x=7$ 時，$g(x)$的值為多少？ (4) $g(x)=72$ 時，x 值為多少？

解：

(1) 正三角形周長＝3 × 邊長，$y=3x$

(2) 函數表示為：$g(x)=3x$

(3) $x=7$ 代入可得：$g(7)=3\times 7=21$

(4) $g(x)=72$ 代入可得：$72=3\times x$ ， $x=24$

答：(1) $y=3x$ (2) $g(x)=3x$ (3) 21 (4) $x=24$

【例題五】

設函數：$y = \mathrm{f}(x)$，其定義為：$y=\mathrm{f}(x)=\begin{cases} 4x-1\text{, 若 } x>4 \\ x^2-3\text{, 若 } -3\le x\le 4 \\ 3x+4\text{, 若 } x<-3 \end{cases}$

求：(1) f(5)　(2) f(－1)　(3) f(－6)　(4) f(f(10))

解：

(1) ∵ $5>4$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=4x-1$，$\mathrm{f}(5)=4\cdot5-1=19$

(2) ∵ $-3<-1<4$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=x^2-3$，$\mathrm{f}(-1)=(-1)^2-3=-2$

(3) ∵ $-6<-3$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=3x+4$，$\mathrm{f}(-6)=3\cdot(-6)+4=-14$

(4) ∵ $\mathrm{f}(10)=4\cdot10-1=39$ ∴$\mathrm{f}(\mathrm{f}(10))=\mathrm{f}(39)=4\cdot39-1=155$

答：(1) 19　(2) －2　(3) －14　(4) 155

【練習五】

設函數：$y = \mathrm{f}(x)$，其定義為：$y=\mathrm{f}(x)=\begin{cases} x+3\text{, 若 } x>3 \\ x^2-2\text{, 若 } -4< x\le 3 \\ 2x-4\text{, 若 } x\le-4 \end{cases}$

求：(1) f(－6)　(2) f(5)　(3) f(－2)　(4) f(f(－5))

解：

(1) ∵ $-6<-4$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=2x-4$，$\mathrm{f}(-6)=2\cdot(-6)-4=-16$

(2) ∵ $5>3$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=x+3$，$\mathrm{f}(5)=5+3=8$

(3) ∵ $-4<-2<-3$ ∴ $y=\mathrm{f}(x)=x^2-2$，$\mathrm{f}(-2)=(-2)^2-2=2$

(4) ∵ $\mathrm{f}(-5)=2\cdot(-5)-4=-14$ ∴$\mathrm{f}(\mathrm{f}(-5))=\mathrm{f}(-14)=2\cdot(-14)-4=-32$

答：(1) －16　(2) 8　(3) 2　(4) －32

【例題六】

設 $\mathrm{f}(x)=3x+a$，$\mathrm{g}(x)=3x+11$，如果 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\mathrm{g}(\mathrm{f}(x))$，請求出 a？

解：

$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\mathrm{f}(3x+11)=3\cdot(3x+11)+a=9x+33+a$

$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x))=\mathrm{g}(3x+a)=3\cdot(3x+a)+11=9x+3a+11$

∵ $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\mathrm{g}(\mathrm{f}(x))$ ∴ $9x+33+a=9x+3a+11$，$2a=22$，$a=11$

答：$a=11$

【練習六】

設 $\mathrm{f}(x)=2x^2+bx+c$，$\mathrm{g}(x)=a(x-2)^2$，如果 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)$，請求出 $a+b+c=$？

解：

∵ $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)$ ∴ $2x^2+bx+c=a(x-2)^2$

$2x^2+bx+c=ax^2-4ax-4a$

則 $a=2$，$b=-4a=-8$，$c=-4a=-8$

∴ $a+b+c=2+(-8)+(-8)=-14$　答：$a+b+c=-14$

【例題七】

(1) 設 $f(x-1)=2x^2-5x+6$，請求出 $f(-3)$的值。

(2) 設 $f(x)=4x+6$，$g(x+4)=f(x-2)$，請求出 $g(2)$的值。

解：

(1) $\because\ x-1=-3\quad \therefore\ x=-2$

以 $x=-2$ 代入 $f(x-1)=2x^2-5x+6$

可得：$f(-2-1)=2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+6$

$f(-3)=8+10+6=24$　　答：$f(-3)=24$

(2) $\because\ x+4=2\quad \therefore\ x=-2$

以 $x=-2$ 代入 $g(x+4)=f(x-2)$可得：$g(-2+4)=f(-2-2)$

$\therefore\ g(2)=f(-4)=4\cdot(-4)+6=-10$

答：$g(2)=-10$

【練習七】

(1) 設 $f(\dfrac{x}{3x+1})=x+3$，請求出 $f(1)$的值。

(2) 設 $f(x+5)=f(x)+5$，且 $f(5)=10$，請求出 $f(50)$的值。

解：

(1) $\because\ \dfrac{x}{3x+1}=1\quad \therefore\ x=3x+1$ 則 $x=-\dfrac{1}{2}$

以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 代入 $f(\dfrac{x}{3x+1})=x+3$ 可得 $f(1)=-\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{5}{2}$

答：$f(1)=\dfrac{5}{2}$

(2) $\because\ f(5)=10$ 則 $f(10)=f(5+5)=f(5)+5=10+5=15$

$f(15)=f(10+5)=f(10)+5=15+5=20$

$f(20)=f(15+5)=f(15)+5=20+5=25$

$f(25)=f(20+5)=f(20)+5=25+5=30$

$f(30)=f(25+5)=f(25)+5=30+5=35$