

■ 函數圖形

(1) 函數圖形：

1. 在座標平面上，將合於 $y=f(x)$ 關係的所有點 (x, y) 描繪出來所得到的圖形，就是函數 f 的圖形。
2. 畫函數時圖形時，只需畫出部分重要的點，再將各點連接起來即可。
(取得的點合適而且描的越多或越密，圖形的準確性越高)

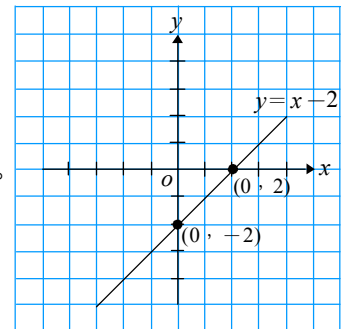
【範例】：試畫出函數 $y=f(x)=x-2$ 的圖形。

解：

對函數 $y=f(x)=x-2$ 時的圖形，先找出兩組方程式的解為：

x	0	2
y	-2	0

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為函數 $y=f(x)=x-2$ 的圖形。



(2) 線性函數圖形：

一次函數：

$f(x)=ax+b$ ， $a \neq 0$ 時，這種函數就叫做**一次函數**。(即 y 是 x 的一次函數)

例如： $f(x)=5x$ ， $g(x)=50-3x$ 都是一次函數；

$10 \cdot \frac{1}{x}$ ， x^2 ， $\frac{200}{x}$ 和 x^2+3x-1 都不是 x 的一次式，所以： $g(x)=10 \cdot \frac{1}{x}$ 、

$f(x)=x^2$ 、 $A(x)=\frac{200}{x}$ 、 $H(x)=x^2+3x-1$ ，都不是 x 的一次函數。

※注意：當一次函數： $y=f(x)=ax+b$ 中的 x 值有限制的時候，其圖形為直線的一部分，為一條線段或某些點。

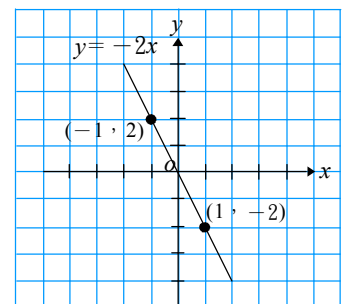
【範例】：試畫出一次函數 $y=f(x)=-2x$ 的圖形。

解：

對函數 $y=f(x)=-2x$ 時的圖形，先找出兩組方程式的解為：

x	-1	1
y	2	-2

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為函數 $y=f(x)=-2x$ 的圖形。



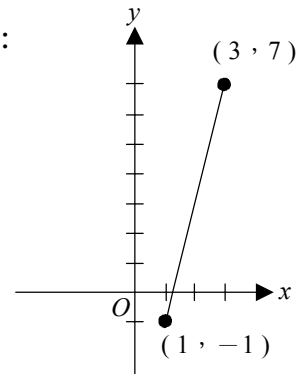
【範例】：設一次函數 $y=f(x)=4x-5$ ，且 $1 \leq x \leq 3$ ，請畫出它的圖形。

解：

取函數 $y=f(x)=4x-5$ 的兩組端點的對應值如下：

x	1	3
y	-1	7

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為函數 $f(x)=4x-5$ 的圖形。



常數函數：

$f(x)=ax+b$ 中， $a=0$ 時， $f(x)=b$ ，這種函數就叫做**常數函數**。

例如： $f(x)=5$ ， $g(x)=-2$ ， $f(x)=0$ 都是常數函數，其圖形都是 x 軸或與 x 軸平行的直線。

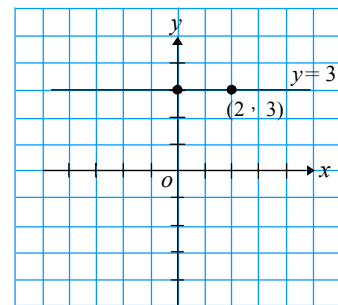
【範例】：試畫出常數函數 $y=f(x)=3$ 的圖形。

解：

對函數 $y=f(x)=3$ 時的圖形，先找出兩組方程式的解為：

x	0	2
y	3	3

再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為函數 $y=f(x)=3$ 的圖形。



【範例】：下面的函數中，那些是一次函數？那些是常數函數？

(1) $f(x)=-5$ (2) $g(x)=3x-8$ (3) $A(x)=2x^2+4$ (4) $B(x)=-1$

解：

- (1) $f(x)=-5$ 是常數函數。
- (2) $g(x)=3x-8$ 是一次函數。
- (3) $A(x)=2x^2+4$ 不是線性函數，它是二次函數。
- (4) $B(x)=-1$ 是常數函數。

(3)一元二次多項式的函數圖形：

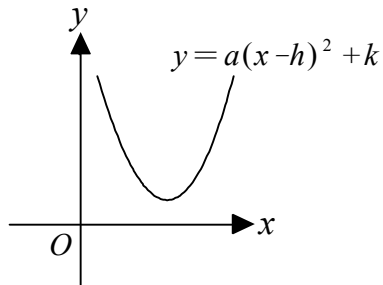
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的形式為所謂的二次函數，其中 a 、 b 、 c 為常數，但 $a \neq 0$ 。

例如： $y = x^2$ ， $y = -3x^2 + 6$ ， $y = 2x^2 - 1$ ， $y = x^2 + 2x + 1$ 皆是二次函數。

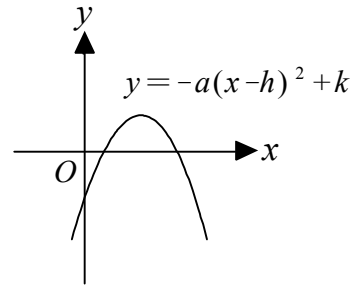
一元二次多項式的函數圖形，是開口向上或開口向下的拋物線圖形。

如下圖所示：

開口向上



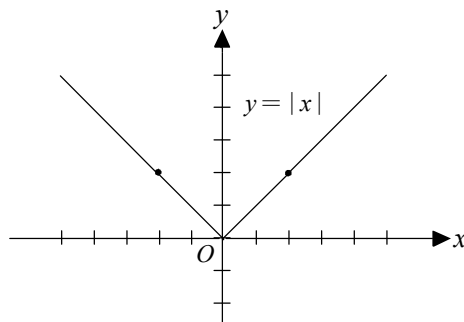
開口向下

**(4)絕對值的函數圖形：**

例如：方程式 $y = |x|$ 的圖形，即為絕對值的函數圖形。

方程式 $y = |x|$ ，其圖形如下圖所示：

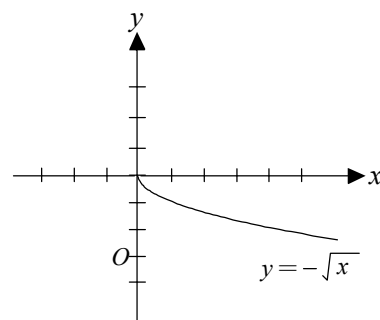
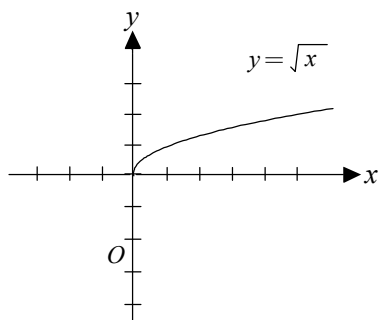
y 是 x 的函數，也就是 $y = f(x) = |x|$ 。

**(5)平方根與立方根的函數圖形：**

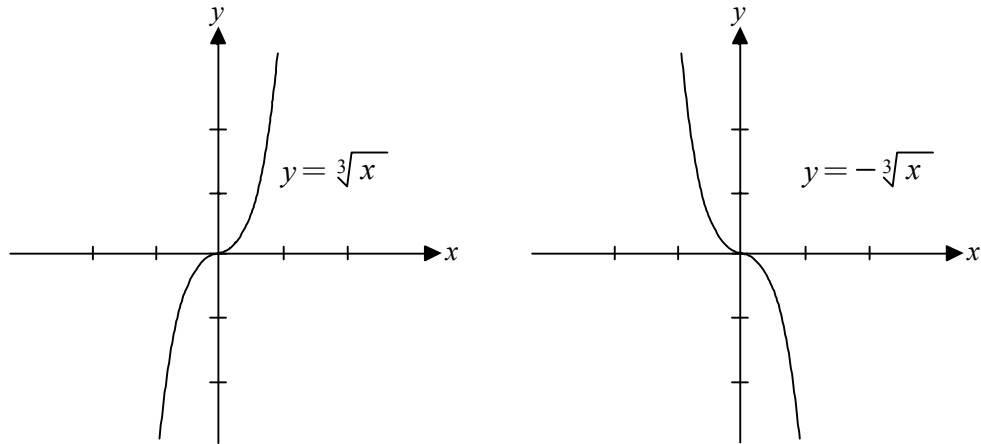
例如：方程式 $y = \sqrt{x}$ ， $y = -\sqrt{x}$ 的圖形，即為平方根的函數圖形。

方程式 $y = \sqrt{x}$ ， $y = -\sqrt{x}$ ，其圖形如下圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y = f(x) = \sqrt{x}$ ， $y = f(x) = -\sqrt{x}$ 。

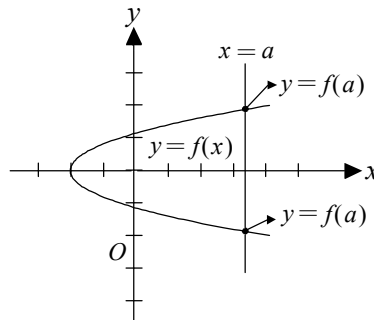


方程式 $y = \sqrt[3]{x}$ 以及 $y = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ 的圖形，即為立方根的函數圖形。
 方程式 $y = \sqrt[3]{x}$ 以及 $y = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ ，其圖形如下圖所示：
 y 是 x 的函數，也就是 $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ， $y = f(x) = -\sqrt[3]{x}$ 。

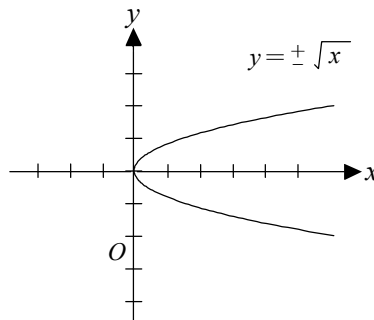


(6) 不是函數的函數圖形：

如右圖所示，若方程式 $y = f(x)$ ，
 如果 $x = a$ 代入，會跑出兩個根(解)，則
 此方程式不是函數。



若將方程式 $y = \sqrt{x}$ ， $y = -\sqrt{x}$ 的函數圖形合併，使函數為 $y = \pm\sqrt{x}$ 。
 則函數為 $y = \pm\sqrt{x}$ 其圖形如下圖所示：
 所以， $y = \pm\sqrt{x}$ 不是一個函數。





小 試 身 手

【例題一】

下面函數中，有哪些是一次函數？哪些是常數函數？哪些是線性函數？

(1) $f(x)=12$ (2) $f(x)=-x-2$ (3) $f(x)=3x-1$ (4) $f(x)=-1$

(5) $f(x)=x^2+1$ (6) $f(x)=\frac{12}{x+1}$ (7) $f(x)=0$

解：

一次函數：(2) $f(x)=-x-2$ 、(3) $f(x)=3x-1$

常數函數：(1) $f(x)=12$ 、(4) $f(x)=-1$ 、(7) $f(x)=0$

線性函數：(1)、(2)、(3)、(4)、(7)

(5) $f(x)=x^2+1$ (6) $f(x)=\frac{12}{x+1}$ 不是線性函數。

【練習一】

下面函數中，有哪些是一次函數？

$f(x)=5$ 、 $g(x)=10^2x+10^2$ 、 $k(x)=2x-3$ 、 $A(x)=-2$

解：

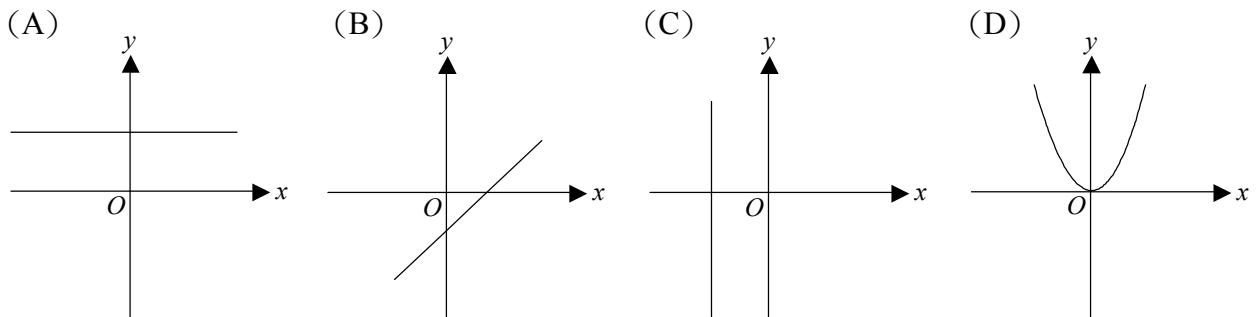
一次函數的是： $g(x)=10^2x+10^2$ 、 $k(x)=2x-3$ 。

$f(x)=5$ 、 $A(x)=-2$ 都是常數函數。

【例題二】

下列圖形中：(1) 線性函數圖形的是？(2) 一次函數圖形的是？

(3) 常數函數圖形的是？(4) 不是函數圖形的是？



解：

常數函數的圖形式平行於 x 軸的直線，一次函數的圖形則是一條斜的直線。

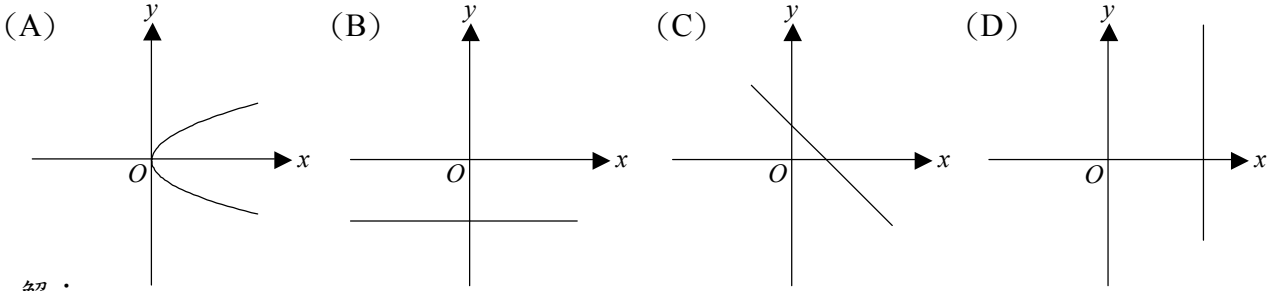
∴ (1) 線性函數的圖形是(A)和(B) (2) 一次函數圖形的是(B)

(3) 常數函數圖形的是(A) (4) 不是函數圖形的是(C)

(D)的圖形是二次函數的圖形。

【練習二】

下列圖形中：(1) 線性函數圖形的是？ (2) 一次函數圖形的是？
 (3) 常數函數圖形的是？ (4) 不是函數圖形的是？



解：

常數函數的圖形式平行於 x 軸的直線，一次函數的圖形則是一條斜的直線。

- ∴ (1) 線性函數的圖形是(B)和(C) (2) 一次函數圖形的是(C)
 (3) 常數函數圖形的是(B) (4) 不是函數圖形的是(D)
 (A)的圖形是二次函數的圖形。

【例題三】

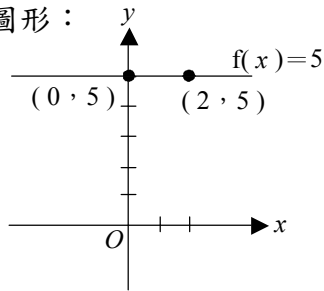
請畫出下列函數的圖形： (1) $f(x)=5$ (2) $f(x)=3x-5$

解：

(1) 先找出兩個函數值：

x	0	2
y	5	5

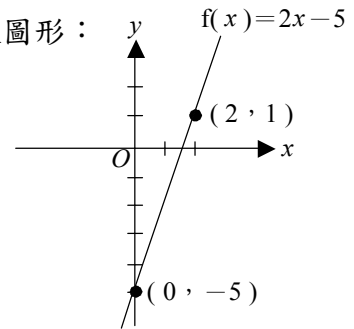
再畫出函數圖形：



(2) 先找出兩個函數值：

x	0	2
y	-5	1

再畫出函數圖形：



【練習三】

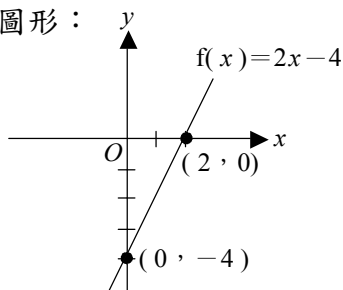
請畫出下列函數的圖形： (1) $f(x)=2x-4$ (2) $f(x)=-3x+3$

解：

(1) 先找出兩個函數值：

x	0	2
y	-4	0

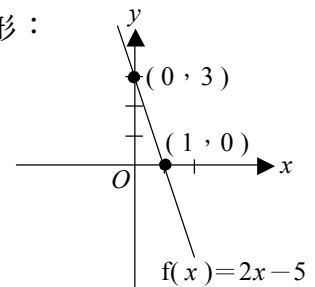
再畫出函數圖形：



(2) 先找出兩個函數值：

x	0	1
y	3	0

再畫出函數圖形：



【例題四】

設一個線性函數 f 的圖形通過兩點 $(2, 4)$ 、 $(3, 5)$ 兩點：

(1) 求此線性函數 f 。(2) 如果 $(2k-1, k+3)$ 為此線性函數圖形上一點，請求出 k 值。

解：

(1) 設線性函數為 $y = f(x) = ax + b$ ，將 $(2, 4)$ 、 $(3, 5)$ 兩點代入得：

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \quad (1) \\ 3a + b = 5 \quad (2) \end{cases} \quad \text{將(2)-(1)得：} \quad a = 1 \quad \text{代入(1)得：} \quad b = 2$$

所以此線性函數為： $y = f(x) = x + 2$

(2) 將 $(2k-1, k+3)$ 代入 $y = f(x) = x + 2$ 可得： $k+3 = 2k-1+2$

$$\therefore k = 2$$

答：(1) $y = f(x) = x + 2$ (2) $k = 2$

【練習四】

設一個線性函數 f 的圖形通過兩點 $(0, -1)$ 、 $(2, 0)$ 兩點：

(1) 求此線性函數 f 。(2) 如果 $(2k+1, 2k+3)$ 為此線性函數圖形上一點，請求出 k 值。

解：

(1) 設線性函數為 $y = f(x) = ax + b$ ，將 $(0, -1)$ 、 $(2, 0)$ 兩點代入得：

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1 \quad \text{所以此線性函數為：} \quad y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

(2) 將 $(2k+1, 2k+3)$ 代入 $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 可得： $2k+3 = \frac{1}{2}(2k+1) - 1$

$$\therefore k = -3\frac{1}{2} \quad \text{答：(1) } y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad (2) k = -3\frac{1}{2}$$

【例題五】

設兩線性函數 $f(x) = -2x - 2$ ， $g(x) = x + 3$ ，求：

(1) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的交點座標 A ？ (2) $y = f(x)$ 與 y 軸的交點座標 B ？

(3) $y = g(x)$ 與 y 軸的交點座標 C ？ (4) $\triangle ABC$ 的面積。

解：

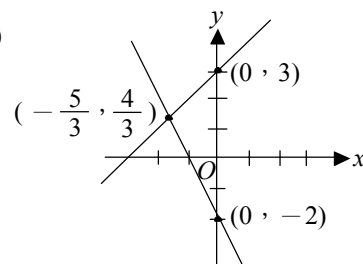
(1) 兩個函數的交點座標，即是兩函數的聯立方程式的解。

$$\begin{cases} y = -2x - 2 \quad (1) \\ y = x + 3 \quad (2) \end{cases} \quad \text{將(2)-(1)得：} \quad x = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{4}{3} \quad \therefore A\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

(2) 令 $x = 0$ 代入 $y = -2x - 2$ 可得： $y = -2$ $\therefore B(0, -2)$

(3) 令 $x = 0$ 代入 $y = x + 3$ 可得： $y = 3$ $\therefore C(0, 3)$

(4) $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times |3 - (-2)| \times \left| -\frac{5}{3} \right| = \frac{25}{6}$ (平方單位)



答：(1) $A\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (2) $B(0, -2)$ (3) $C(0, 3)$ (4) 面積 $= \frac{25}{6}$ (平方單位)

【練習五】

已知線性函數 $f(x) = -2x + k$ 的圖形通過點 $(-1, 6)$ ，分別求出：

- (1) k 值是多少？ (2) $y = f(x)$ 的圖形與兩軸的交點座標是多少？
 (3) $y = f(x)$ 的圖形與兩軸所形成的三角形面積與周長為多少？

解：

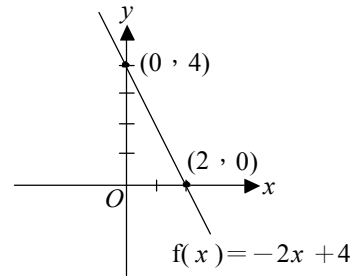
(1) 將點 $(-1, 6)$ 代入 $y = f(x) = -2x + k$ 可得： $6 = -2 \cdot (-1) + k \quad \therefore k = 4$

(2) 與 x 軸交點座標：令 $y = 0$ 代入 $y = -2x + 4$ 可得： $x = 2 \quad \therefore (x, y) = (2, 0)$

與 y 軸交點座標：令 $x = 0$ 代入 $y = -2x + 4$ 可得： $y = 4 \quad \therefore (x, y) = (0, 4)$

(3) 面積 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ (平方單位)

周長 $= 2 + 4 + (\sqrt{2^2 + 4^2}) = 6 + 2\sqrt{5}$

**【例題六】**

(1) 設函數 $y = f(x) = ax + b$ 的圖形平行 x 軸，並經過點 $(0, -3)$ ，求 a 、 b 之值。

(2) 若一次函數的圖形通過 $(3, 10)$ 、 $(-1, 8)$ 兩點，請求出此一次函數。

解：

(1) 線性函數 $y = f(x) = ax + b$ 的圖形平行 x 軸，為一個常數函數的圖形。

\therefore 令 $a = 0$ 代入可得： $y = b \quad \therefore$ 經過點 $(0, -3)$ 則可得 $b = -3$

(2) 設一次函數為 $y = f(x) = ax + b$ ， \therefore 此圖形經過 $(3, 10)$ 、 $(-1, 8)$ 兩點

\therefore 代入可得 $\begin{cases} 10 = 3a + b \quad (1) \\ 8 = -a + b \quad (2) \end{cases}$ ，將 $(1) - (2)$ 可得： $a = \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{17}{2}$

則函數 $y = f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$

【練習六】

若一次函數的圖形通過 $(5, 9)$ 、 $(1, -3)$ 兩點，請求出此一次函數？

解：

設一次函數為 $y = f(x) = ax + b$ ， \therefore 此圖形經過 $(5, 9)$ 、 $(1, -3)$ 兩點

\therefore 代入可得 $\begin{cases} 9 = 5a + b \quad (1) \\ -3 = a + b \quad (2) \end{cases}$ ，將 $(1) - (2)$ 可得： $a = 3$ ， $b = -6$

則函數 $y = f(x) = 3x - 6$

答：出此一次函數為 $f(x) = 3x - 6$

【例題七】

原長 20 公分的彈簧掛上 x 公克的物體後，長度會變成 y 公分， x 與 y 的關係如下表：

x (公克)	0	1	2	3	4	5	...	9
y (公分)	20	21.5	23	24.5	26	27.5	...	k

已知 x 、 y 的關係為一個線性函數，請求出：

- (1) x 、 y 的關係式為何？ (2) k 的值為多少公分
 (3) 若掛一個物體時，彈簧的長度為 57.5 公分，請問此重物為多少公克？

解：

- (1) 設 $y = ax + b$ ，將 $x = 0$ ， $y = 20$ 以及 $x = 4$ ， $y = 26$ 代入可得：

$$\begin{cases} 20 = b \\ 26 = 4a + b \end{cases} \text{ 可解得： } a = 1.5、b = 20 \quad \therefore y = 1.5x + 20$$

- (2) 將 $x = 9$ 代入 $y = 1.5x + 20$ 可得： $y = 1.5 \cdot 9 + 20 = 33.5 \quad \therefore k = 33.5$

- (3) 將 $y = 57.5$ 代入 $y = 1.5x + 20$ 可得： $57.5 = 1.5x + 20 \quad \therefore x = 25$

答：(1) x 、 y 的關係式： $y = 1.5x + 20$ (2) $k = 33.5$ (公分) (3) 25 公克

【練習七】

琦琦原有存款 400 元，自五月一日起，每天從零用錢中拿出 5 元儲蓄，假設儲蓄 x 天，琦琦總共有存款 y 元。請問：

- (1) 請寫出 x 與 y 的關係式。 (2) 到同一年的六月六日為止，琦琦共有存款多少元？
 (3) 如果琦琦總共有存款 1250 元，請問琦琦自五月一日起儲蓄了多少天？
 (4) 如果琦琦希望在兩個月後的存款總金額達到 1000 元，則需改成每天儲蓄多少元？

解：

- (1) 依題意可列出關係式： $y = 5x + 400$

- (2) 自五月一日到六月六日共有 36 天，

$$\therefore x = 36 \text{ 代入 } y = 5x + 400 \text{ 可得： } y = 5 \cdot 36 + 400 = 580(\text{元})$$

- (3) 令 $y = 1250$ 代入 $y = 5x + 400$ 可得： $1250 = 5x + 400 \quad \therefore x = 170(\text{天})$

- (4) 設每天需要 a 元，兩個月後為 60 天

$$\therefore \text{依題意可列式為： } 1000 = 60a + 400 \text{ 則 } a = 10(\text{元})$$

答：(1) $y = 5x + 400$ (2) 580(元) (3) 170(天) (4) 10(元)

【例題八】

有一線性函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形通過點 $(3, -4)$ ，並與 $g(x) = 3x - 7$ 的圖形平行，請求出 $f(x)$ 。

解：

∵ 線性函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)$ 的圖形互相平行

∴ 直線 $y = ax + b$ 會與 $y = 3x - 7$ 平行，可得： $y = 3x + b$

將點 $(3, -4)$ 代入 $y = 3x + b$ 可得： $-4 = 3 \cdot 3 + b$ ∴ $b = -13$

則 $y = 3x - 13$

答： $f(x) = 3x - 13$

【練習八】

設一次函數 $y = ax + b$ 的圖形通過 $(-2, 3)$ ，並與直線 $y = 4x - 3$ 的圖形平行，請求出 a 、 b 的值？

解：

∵ 一次函數 $y = ax + b$ 與直線 $y = 4x - 3$ 平行

∴ 一次函數 $y = 4x + b$

將點 $(-2, 3)$ 代入 $y = 4x + b$ 可得： $3 = 4 \cdot (-2) + b$ ∴ $b = 11$

則 $y = 4x + 11$

答： $a = 4$ 、 $b = 11$