一元一次不等式

不等式

<u>**不等號的意義**</u>：

【範例】：求一元一次方程式，$2x + 3 = 4x - 5$ 的解？

解 ：

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 4x-5 \\ 2x-4x &= -5-3 \\ -2x &= -8 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

在此 $2x+3=4x-5$ 我們稱為一元一次方程式，若我們將等號換為不等號。

$2x + 3 > 4x - 5$

$2x + 3 \geq 4x - 5$

$2x + 3 < 4x - 5$

$2x + 3 \leq 4x - 5$

則形如上列的式子，我們稱為一元一次不等式。

【範例】：下面的形式都稱為一元一次不等式：

(1) $3x-2>4$ 、(2) $3x-1\geq 5x-3$ 、(3) $-2x+5<3x+4\leq 8x+3$

(4) $|2x-1|<5$ 、(5) $|-4x+1|\geq 5$

【範例】：身體質量指數 $=\dfrac{\text{體重(kg)}}{\text{身高的平方}(\mathrm{m}^2)}$。依照衛生署的資料指出，13 歲的學生的身體質量指數如果大於 24.8(男生)或 24.6(女生)，就視為過重。

試用符號和不等號來表示這個條件。

解 ：

如果體重用 w 公斤表示，身高以 h 公尺表示，則上面建議的過重標準，

可以表示為：$\dfrac{w}{h^2}>24.8$(男生)或 $\dfrac{w}{h^2}>24.6$(女生)。

【範例】：下列哪一組數滿足不等式 $c<a-b$：

(1) $a=0$，$b=-1$，$c=1$　　(2) $a=1.3$，$b=1$，$c=0.1$

解 ：

(1) $\because\ a-b=0-(-1)=1$，$c=1$，$\therefore\ c=a-b=1$ （不符合）

(2) $\because\ a-b=1.3-1=0.2$，$c=0.1$，$\therefore\ c=0.1<a-b=0.2$ （符合）

答：第二組滿足不等式 $c<a-b$

$h \geq 120$ 和 $a \leq 80$ 的意義：

在前面的例子，因為語意明確，所以比較不會引起混淆。下面我們來看兩個敘述的意義，在生活上常常會引起混淆。

【範例】：身高在 120 公分以上要買全票。

說明：120 公分以上到底包不包含 120 公分？

實際上此題是不包含 120 公分的，而在往後的題目中，除了題目說明是大於等於 120 以上公分才有等號，否則只有單單一個以上是都不包含等號的。

如果用 b 代表身高，則「身高在 120 公分以上要買全票。」可簡記為：

「$b > 120$」，其中「$>$」要讀作「大於」，也可讀作「不小於或等於」。

【範例】：如果小誠這次段考的數學成績在 80 分以下，就要禁止打電玩一個月。

說明：數學成績在 80 分以下，如果剛好考 80 分，還能打電玩嗎？

「如果小誠這次段考的數學成績少於 80 分，就要禁止打電玩一個月。」

如果用 a 代表這次段考的數學分數，那「如果小誠這次段考的數學成績少於 80 分，就要禁止打電玩一個月。」可簡記為：「$a < 80$」，其中「$<$」要讀作「小於」，也可以讀作「不大於或等於」。

【範例】：到郵局寄長方體的包裹時，郵局規定：「長方體的最長邊不得超過 150 公分，另外兩邊和的兩倍加上最長邊不能超過 300 公分。」請利用不等號來表示這個規定。

解：設最長邊的長度為 a 公分，兩邊的長度分別為 b 公分、c 公分。

則「最長邊不得超過 150 公分」可表示成：$a \leq 150$。

「兩邊和的兩倍加上最長邊不能超過 300 公分」可表示成：$2(b+c)+a \leq 300$。

所以，如果長方體的三邊長為 a、b、c，而且 a 為最長邊，

則此規定可表示成：$a \leq 150$ 而且 $a+2b+2c \leq 300$。

【範例】：如果有一個長方體盒子的三邊長為：a、b、c(公分)，且 a 為最長邊，並規定 $a \geq 100$(公分)而且 $a+b+c \leq 200$(公分)。請問下列哪一個符合此規定？

(1) 50 公分、50 公分、100 公分　(2) 80 公分、80 公分、100 公分

解：(1) 最長邊是 $100 \geq 100$(公分)而且 $50+50+100=200 \leq 200$(公分)

所以此正方體符合規定。

(2) 最長邊是 $100 \geq 100$(公分)但是 $80+80+100=260 > 200$(公分)

此正方體不符合規定。

$36<t<37$ 的意義：

在許多公共場合未發現到許多與不等號相關的規定。例如：坐公車 100 公分以下可以半價。去電影院看電影，身高如果在 100 公分和 130 公分之間，可以買半票。量體溫時，溫度在 36℃和 37℃之間，就算是正常體溫。而這些例子中有些有用到「之間」這個敘述，都會牽涉到兩個不等式。

【範例】：「體溫在 36℃和 37℃之間(不包含 36℃和 37℃)，算是正常體溫。」試著將這句話用不等號來表示。

解：假設用 t 表示體溫，則可將上面的條件改寫成：$t<37$ 且 $t>36$

又為了方便可將兩個不等式合併：

$\because\ t>36$ 可寫成 $36<t$，而且 $t<37$ $\quad\therefore\ 36<t<37$

或者是：

$\because\ t<37$ 可寫成 $37>t$，而且 $t>36$ $\quad\therefore\ 37>t>36$

所以「體溫在 36℃和 37℃之間(不包含 36℃和 37℃)」這個敘述，

可表示成：$36<t<37$ 或 $37>t>36$

【範例】：試著用符號和不等號來表示下列的敘述：

(1) 陳老師從台北開車回來台中的時速都在 90 公里到 100 公里之間(包含 90 公里和 100 公里)。

(2) 小誠家的面積小於 60 坪。

(3) x 是小於 10 的正數。

解：(1) 設車速每小時 x 公里，依題意：$x\geq 90$ 且 $x\leq 100$

$\therefore$ 可表示成 $90\leq x\leq 100$。

(2) 設小誠家的面積為 x 坪，依題意：$x<60$，且面積一定為正數，$\therefore x>0$

則此題可表示成：$0<x<60$。

(3) 依題意：$x<10$，又 $\because$ x 是正數，$\therefore x>0$

則此題可表示成：$0<x<10$。

【範例】：試著用合併的不等式來表示下列各式：

(1) 參加畢業旅行的人數不到 50 人，可是按照規定：每團人數一定要滿 10 人才能組成一團。

(2) 琦琦的身體質量指數不少於 17.5 但是少於 22.5。

解：(1) 設有 x 人，依題意：$x<50$ 且 $x\geq 10$ $\quad\therefore$ 可表示成：$10\leq x<50$

(2) 設琦琦的身體質量指數為 x，依題意：$x\geq 17.5$ 且 $x<22.5$

$\therefore$ 可表示成：$17.5\leq x<22.5$

小 試 身 手

【例題 1】

用不等式表示下列的敘述：

(1) x 是小於 8 的正數。

(2) b 是大於－3 的負數。

(3) $3x$ 小於或等於 120。

解：

(1) $0<x<8$

(2) $-3<b<0$。

(3) $3x\leq 120$。

【例題 2】

用不等式表示下列的敘述：

(1) x、y 兩數的乘積比－20 小。

(2) $b-5$ 不小於 5。

(3) 若以 w 表示體重，用不等式表示「體重不低於 58 公斤且未滿 65 公斤」

解：

(1) $xy<-20$

(2) $b-5\geq 5$。

(3) $58\leq w<65$。

【例題 3】

下列那一組數滿足不等式：$2a\geq b+1$

(1) $a=0$，$b=-1$

(2) $a=-2$，$b=-2$

解：

(1) $2\cdot 0=0\ =\ -1+1=0$

(2) $2\cdot(-2)=-4\ <\ -2+1=-1$

答：第(1)組。

【例題 4】

下列那一組數滿足不等式：$a+2\leq 2b$

(1) $a=-1$，$b=0$

(2) $a=-3$，$b=1$

解：

(1) $-1+2=1\ >\ 2\cdot 0=0$

(2) $-3+2=-1\ <\ 2\cdot 1=2$

答：第(2)組。

【例題 5】

如果有兩個不等式 $x>-3$ 以及 $x<7$ 同時成立，請將兩式合併為一個不等式。

解：

$-3<x$ 且 $x<7$

所以 $-3<x<7$

【例題 6】

如果有兩個不等式 $2x\leq 8$ 以及 $3x\geq -15$ 同時成立，請將兩式合併為一個不等式。

解：

$2x\leq 8\ \Rightarrow\ x\leq 4$

$3x\geq -15\ \Rightarrow\ x\geq -5\ \Rightarrow\ -5\leq x$

$-5\leq x$ 且 $x\leq 4$

所以 $-5\leq x\leq 4$

不等式的性質

<u>正負數、減法和大小比較</u>：

不管是運用數的運算規律，還是利用數線的表示法，我們都學過「正數加正數還是正數，負數加負數還是負數」的規律。乘除法也有「正正得正，負負得正」、「正負得負，負正得負」的規律。下面我們來做個範例。

【範例】：在下列□中，填入「＞」或「＜」：

(1) 如果 $a>0$，$b>0$，則 $a+b$ □ 0，$a\cdot b$ □ 0。

(2) 如果 $a<0$，$b<0$，則 $a+b$ □ 0，$a\cdot b$ □ 0。

解　：(1) ∵ a、b 都是正數。　∴ $a+b$、$a\cdot b$ 都會是正數。

則：$a+b>0$，$a\cdot b>0$。

(2) ∵ a、b 都是負數。　∴ $a+b$ 還是負數。

但是 ∵ 「負負得正」 ∴ $a\cdot b$ 是正數。

則：$a+b<0$，$a\cdot b>0$。

但是在減法時，因為是兩個數相減的結果，所以有可能是正數、可能是負數、也可能是 0。因此，要判斷兩數相減結果的不等號為何？就要利用「大減小為正，小減大為負」這個規律了。

利用不等式記法，將規律改寫如下：

「大減小為正」：如果 $a>b$，則 $a-b>0$。

「小減大為負」：如果 $a<b$，則 $a-b<0$。

【範例】：在下列□中，填入「＞」或「＜」：

(1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{9}$ □ 0　　(2) $\frac{4}{15}-\frac{4}{9}$ □ 0

解　：(1) ∵ $\frac{1}{2}>\frac{1}{9}$　　∴ $\frac{1}{2}-\frac{1}{9}>0$。

(2) ∵ $\frac{4}{15}<\frac{4}{9}$　　∴ $\frac{4}{15}-\frac{4}{9}<0$。

【範例】：請問下列哪一個式子表示「正數的相反數是負數」這個規律。

(1)若 $a>0$，則 $-a>0$ (2)若 $a>0$，則 $-a<0$ (3)若 $a<0$，則 $-a>0$

解　：∵ a 是正數，∴ $a>0$。

∵ a 的相反數為 $-a$ 而且為負數，∴ $-a<0$。

則「正數的相反數是負數」可用，若 $a>0$，則 $-a<0$ 來表示。

我們在下面會舉一些範例，來說明用減法來比較數的大小，有的時候會比直接計算出結果更容易。

【範例】：比較下列各組的大小：(1) $(9.99)^2$ 和 9.99　(2) $(0.99)^2$ 和 0.99

解　：(1) $(9.99)^2-9.99=9.99\times 9.99-9.99$

$=9.99\times(9.99-1)$

$=9.99\times 8.99>0$

∵「大減小為正」 ∴$(9.99)^2>9.99$

(2) $(0.99)^2-0.99=0.99\times 0.99-0.99$

$=0.99\times(0.99-1)$

$=0.99\times(-0.01)<0$

∵「小減大為負」 ∴$(0.99)^2<0.99$

備註：當 $a>1$ 時，若 $n>m>0$，則 $a^n>a^m$。

當 $0<a<1$ 時，若 $n>m>0$，則 $a^n<a^m$。

【範例】：比較下列各組的大小：(1) $(9.99)^4$ 和 $(9.99)^2$　(2) $(0.99)^4$ 和 $(0.99)^2$

解　：(1) ∵ $9.99>1$，∴ $(9.99)^4>(9.99)^2$。

(2) ∵ $0<0.99<1$，∴ $(0.99)^4<(0.99)^2$。

三一律：

如果 a 和 b 表示任意兩數，我們知道 a 和 b 的大小關係，恰好是下列三者中的一個：

$a>b$、$a=b$、$a<b$。

這三種情況有一種會成立，而且只有一種會成立。在數學上，我們稱之為**三一律**。

遞移律：

已知小誠比小愛高，而小愛又比小琪還高，所以我們知道小誠會比小琪還高。

再舉一個分數的例子，帶分數 $1\frac{89}{199}$ 比 1 還大，1 比真分數 $\frac{79}{89}$ 還大，所以 $1\frac{89}{199}$ 比 $\frac{79}{89}$ 還大。像這樣間接利用第三個數來比較大小時，就有用到遞移律。

如果有三個任意數 a、b、c，則遞移律可表示成：

若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$。

若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$。

若 $a\geq b$ 且 $b\geq c$，則 $a\geq c$。

若 $a\leq b$ 且 $b\leq c$，則 $a\leq c$。

【範例】：如果 $a+1=b$，$b+1=c$，試比較 a、b、c 三個數的大小。

解　：∵ $a+1=b$，∴ $a<b$。

∵ $b+1=c$，∴ $b<c$。

則由遞移律可以得知：$a<b<c$。

【範例】：如果$a=b-1$，$a=c+1$，試比較a、b、c三個數的大小。

解：$\because$ $a=b-1$，$\therefore$ $a<b$。

$\because$ $a=c+1$，$\therefore$ $c<a$。

則由遞移律可以得知：$c<a<b$。

<u>**不等號在數線上的表法**</u>：

1.「$x = y$」：等號用來表示兩個量x與y是相等。

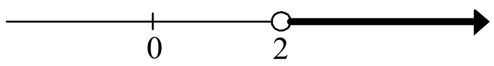
【範例】：$2+5=7$

【範例】：$3x=12$

2.「$x > y$」：大於符號用來表示x是大於y。

【範例】：$2+8>7$

【範例】：$x>2$ 表示數線上所有大於 2 的點。



3.「$x \geq y$」：大於等於符號用來表示x是大於或等於y。

【範例】：$2+8\geq 7$

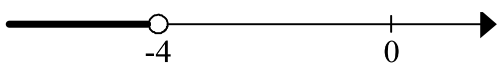
【範例】：$2+8\geq 10$

【範例】：$x\geq 2$ 表示數線上所有大於等於 2 的點。

4.「$x < y$」：小於符號用來表示x是小於y。

【範例】：$2+8<27$

【範例】：$x<-4$ 表示數線上所有小於-4的點。

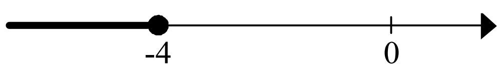


5.「$x \leq y$」：小於等於符號用來表示x是小於或等於y。

【範例】：$2+8\leq 17$

【範例】：$2+8\leq 10$

【範例】：$x\leq -4$ 表示數線上所有小於或等於-4的點。



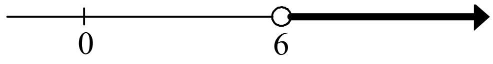
<u>不等式的移項規則</u>：

1. 不等號中一個數或未知數，從不等式一邊移到另一邊時，則要變號，但不等號不變。

【範例】：化簡不等式：$x-2>4$，並在數線上標示其範圍。

解　：

$$x-2>4 \Leftrightarrow x>4+2$$
$$\Leftrightarrow x>6$$



【範例】：化簡不等式：$5x-2 \leq 2x+4$，並在數線上標示其範圍。

解　：

$$5x-2x \leq 4+2 \Leftrightarrow 3x \leq 6$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

【範例】：化簡不等式：$5(x-4) < 2(x+4)$，並在數線上標示其範圍。

解　：

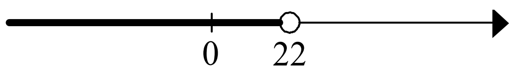
$$5x-20 < 2x+8 \Leftrightarrow 5x-2x < 8+20$$
$$\Leftrightarrow 3x < 28$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{28}{3}$$

2. 不等號兩邊同乘正數時不等號不變。

【範例】：化簡不等式：$\frac{1}{4}(x+2) < 6$，並在數線上標示其範圍。

解　：

$$\frac{1}{4}(x+2) < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{1}{2} < 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x < 6-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4 \times \frac{1}{4}x < 4 \times \frac{11}{2}$$
$$\Leftrightarrow x < 22$$



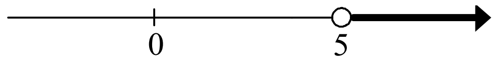
【範例】：化簡不等式：$2(x-2)>6$，並在數線上標示其範圍。

解　：$2(x-2)>6 \Leftrightarrow 2x-4>6$

$\Leftrightarrow 2x>10$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 2x>\frac{1}{2}\times 10$

$\Leftrightarrow x>5$

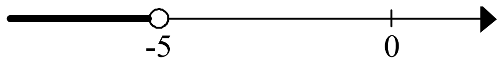


3. 不等號兩邊同乘負數時大於變為小於。

【範例】：化簡不等式：$-x+2>7$，並在數線上標示其範圍。

解　：$-x+2>7 \Leftrightarrow -x>5$

$\Leftrightarrow x<-5$ （同乘負數，「＞」變「＜」）



【範例】：化簡不等式：$-\frac{1}{4}(x+2)>6$，並在數線上標示其範圍。

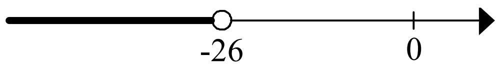
解　：$-\frac{1}{4}(x+2)>6$

$\Leftrightarrow (x+2)<6\times(-4)$ （ 兩邊同乘-4，「＞」變「＜」）

$\Leftrightarrow x+2<-24$

$\Leftrightarrow x<-24-2$

$\Leftrightarrow x<-26$



4. 不等號兩邊同乘負數時小於變為大於。

【範例】：化簡不等式 $\frac{1}{4}(x+2)<6(2x-4)$。

解　：$\frac{1}{4}(x+2)<12x-24$（兩邊同乘 4）

$\Leftrightarrow x+2<4(12x-24)$

$\Leftrightarrow x+2<42x-96$

$\Leftrightarrow x-42x<-98$

$\Leftrightarrow -41x<-98$ （兩邊同乘 -1，「＜」變「＞」）

$\Leftrightarrow 41x>98$

$\Leftrightarrow x>\frac{98}{41}$

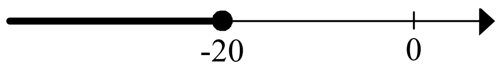
5. 不等號兩邊同乘負數時大於等於變為小於等於。

【範例】：化簡不等式：$-3x-7 \geq 13-2x$，並在數線上標示其範圍。

解　：$-3x-7 \geq 13-2x \Leftrightarrow -3x+2x \geq 13+7$

$\Leftrightarrow -x \geq 20$（兩邊同乘 -1，「≥」變「≤」）

$\Leftrightarrow x \leq -20$



6. 不等號兩邊同乘負數時小於等於變為大於等於。

【範例】：化簡不等式：$-5(x+2) \leq 2x+6$，並在數線上標示其範圍。

解　：$-5(x+2) \leq 2x+6$

$\Leftrightarrow -5x-10 \leq 2x+6$

$\Leftrightarrow -5x-2x \leq 6+10$

$\Leftrightarrow -7x \leq 16$　（兩邊同乘 $-\frac{1}{7}$ ）

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{16}{7}$

結論：當 $a>b$ 時，

推論 1：對任意數 c，我們恆有 $a+c>b+c$，$a-c>b-c$；

推論 2：對任意正數 $c>0$，我們恆有 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；

推論 3：對任意負數 $c<0$，我們恆有 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

此外，對於不等號「＜」、「≥」和「≤」，上述的推論也都成立。

小　試　身　手

【例題 1】

下面的形式哪些稱為一元一次不等式，請在括號內打勾：

(√) $-2>x-2$

(√) $3(x+5)\geq 5x-3$

(√) $x+5<3\frac{x}{2}+4\leq\frac{x}{3}+3$

(√) $|2x-1|<|-4x+1|$

(√) $3x-4\geq 5x+1$

【例題 2】

下面的形式哪些稱為一元一次不等式，請在括號內打勾：

(√) $-\frac{x}{2}+1>x-2$

(√) $x-\frac{x}{3}\geq 5\frac{x}{3}-9$

(√) $3x+7<3x+4\leq\frac{x}{3}+3$

(√) $|2x-1|<|-4x+1|$

(√) $\left|\frac{x}{2}-1\right|\geq 2\frac{x}{2}+9$

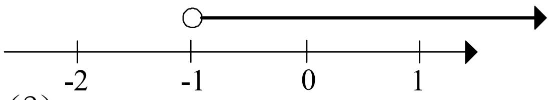
【例題 3】

請在數線上標出下列不等式的範圍：

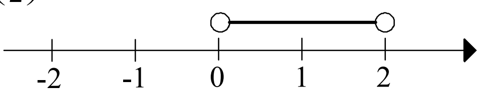
(1) $x>-1$ ； (2) $0<x<2$

解：

(1)



(2)



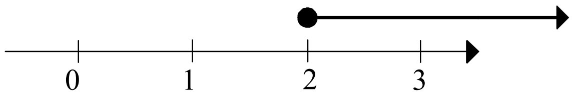
【例題 4】

請在數線上標出下列不等式的範圍：

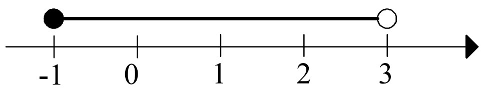
(1) $x\geq 2$； (2) $-1\leq x<3$

解：

(1)



(2)



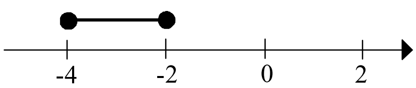
【例題 5】

請在數線上標出下列不等式的範圍：

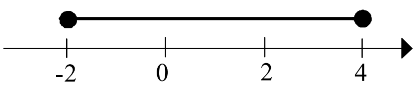
(1) $-4\leq x\leq -2$；(2) $-2\leq x\leq 4$

解：

(1)



(2)



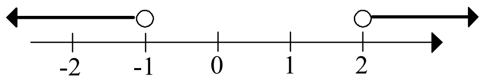
【例題 6】

請在數線上標出下列不等式的範圍：

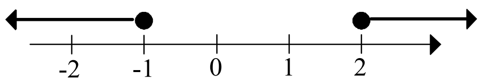
(1) $x>2$；$x<-1$；(2) $x\geq 2$；$x\leq -1$

解：

(1)



(2)



【例題 7】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $x+5>-2$

(2) $x-6<2$

答：(1) $x>-7$。　　(2) $x<8$。

【例題 8】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $-15>x-9$

(2) $-6<x+2$

答：(1) $x<-6$。　　(2) $x>-8$。

【例題 9】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $3x+5>-2$

(2) $2x-10<22$

解：(1) $3x+5>-2$

$3x>-7$

$\therefore\ x>-\frac{7}{3}$

(2) $2x-10<22$

$2x<32$

$\therefore\ x<16$

【例題 10】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $2x+5\leq-21$

(2) $5x-10\geq x+6$

解：(1) $2x+5\leq-21$

$2x\leq-26$

$\therefore\ x\leq-13$

(2) $5x-10\geq x+6$

$4x\geq16$

$\therefore\ x\geq4$

【例題 11】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $\frac{2}{3}(3x+9)<6(\frac{2}{3}x-1)$

(2) $-\frac{1}{4}(12x+28)\leq 6x+2$

解：(1) $\frac{2}{3}(3x+9)<6(\frac{2}{3}x-1)$

$2x+6<4x-6$

$2x>12$

$\therefore\ x>6$

(2) $-\frac{1}{4}(12x+28)\leq 6x+2$

$-3x-7\leqq6x+2$

$9x\geqq-9$

$\therefore\ x\geqq-1$

【例題 12】

化簡下列各一元一次不等式：

(1) $-2(3x+1)\leq 5x+9$

(2) $-\frac{2}{3}(6x+1)>2\frac{2}{3}$

解：(1) $-2(3x+1)\leq 5x+9$

$-6x-2\leq 5x+9$

$11x\geqq-11$

$\therefore\ x\geqq-1$

(2) $-\frac{2}{3}(6x+1)>2\frac{2}{3}$

$-2(6x+1)>8$

$6x+1<-4$

$6x<-5$

$\therefore\ x<-\frac{5}{6}$

【例題 13】

化簡下列各一元一次不等式：

$5x+2<2(x-1)\leq x+5$

解：

(1) $5x+2<2(x-1)$

$3x<-4$

$\therefore\ x<-\frac{4}{3}$

(2) $2(x-1)\leq x+5$

$\therefore\ x\leq7$

由(1)(2)得到 $x<-\frac{4}{3}$

【例題 14】

化簡下列各一元一次不等式：

$3x-9<6(x+2)<3x-1$

解：

(1) $3x-9<6(x+2)$

$3x>-21$

$\therefore\ x>-7$

(2) $6(x+2)<3x-1$

$3x<-13$

$\therefore\ x<-\frac{13}{3}$

由(1)(2)得到 $-7<x<-\frac{13}{3}$