乘法公式與多項式

乘法公式

藉由以前對數字的運算規則，我們對符號運算也給定一些遵循的運算規則：

交換律：

$a+b=b+a$

$a\times b=b\times a$

【範例】： $7+4=4+7$。

【範例】： $7\times4=4\times7$。

結合律：

$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$

$a\times b\times c=a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

【範例】： $2+3+5=2+(3+5)=(2+3)+5$。

【範例】： $2\times3\times5=2\times(3\times5)=(2\times3)\times5$。

分配律：

1. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
2. $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$
3. $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$
4. $(a-b)\times c=a\times c-b\times c$
5. $(a+b)\times(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$
6. $(a-b)\times(c+d)=(a-b)\times c+(a-b)\times d=a\times c-b\times c+a\times d-b\times d$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

1. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
2. $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$
3. $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$
4. $(a-b)\times c=a\times c-b\times c$
5. $(a+b)\times(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d$
$=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$
6. $(a-b)\times(c+d)=(a-b)\times c+(a-b)\times d$
$=a\times c-b\times c+a\times d-b\times d$

【範例】：$2\times(3+5)=2\times3+2\times5=6+10=16$。

【範例】：$2\times(3-5)=2\times3-2\times5=6-10=-4$。

【範例】：$(3+5)\times7=3\times7+5\times7=21+35=56$。

【範例】：$(3-5)\times7=3\times7-5\times7=21-35=-14$。

【範例】：
$$\begin{aligned}(2+5)\times(3+6)&=(2+5)\times3+(2+5)\times6\\&=2\times3+5\times3+2\times6+5\times6\\&=6+15+12+30\\&=63\text{。}\end{aligned}$$

【範例】：
$$\begin{aligned}(2-5)\times(3+6)&=(2-5)\times3+(2-5)\times6\\&=2\times3-5\times3+2\times6-5\times6\\&=6-15+12-30\\&=-27\text{。}\end{aligned}$$

【範例】：求 $123\times279+127\times121+123\times121+127\times279$ 的值。

解：在上面的算式中，我們觀察到 123×279 與 123×121 有公因數 123，127×121 與 127×279 有公因數 127，因此它是 $(123+127)\times(121+279)$ 的乘積展開：

$$\begin{aligned}&123\times279+127\times121+123\times121+127\times279\\=\ &123\times279+123\times121+127\times279+127\times121\\=\ &(123+127)\times(121+279)\\=\ &250\times400\\=\ &100000\text{。}\end{aligned}$$

【範例】：利用公式展開下列各式：

（1）$(1+a)(1+b)$　（2）$(x+2)(x+3)$　（3）$(2x+y)(3x-y)$

解：（1）
$$\begin{aligned}(1+a)(1+b)&=1\cdot1+1\cdot b+1\cdot a+a\cdot b\\&=1+a+b+ab\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}(x+2)(x+3)&=x\cdot x+x\cdot3+2\cdot x+2\cdot3\\&=x^2+5x+6\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}(2x+y)(3x-y)&=(2x+y)[3x+(-y)]\\&=2x\cdot3x+2x\cdot(-y)+y\cdot3x+y\cdot(-y)\\&=6x^2-2xy+3xy-y^2\\&=6x^2+xy-y^2\end{aligned}$$

【範例】：問 1999×20002000×200120012001 是否與 2001×19991999×200020002000 相等？

解：
1999×20002000×200120012001
＝(2000－1)×20002000×200120012001
＝(2000×20002000－20002000)×200120012001
＝(2000×20002000－20002000)×(200020002000＋100010001)
＝2000×20002000×200020002000－20002000×200020002000
＋2000×20002000×100010001－20002000×100010001
＝2000×20002000×200020002000－20002000×200020002000
＋20002000×200020002000－20002000×100010001
＝2000×20002000×200020002000－<u>20002000×100010001</u>

2001×19991999×200020002000
＝(2000＋1)×(20002000－10001)×200020002000
＝(2000×20002000＋20002000－2000×10001－10001)×200020002000
＝(2000×20002000＋20002000－20002000－10001)×200020002000
＝(2000×20002000－10001)×200020002000
＝2000×20002000×200020002000－<u>10001×200020002000</u>

問(<u>20002000×100010001</u>)是否與(<u>10001×200020002000</u>)相等。
若相等，則兩數相除為 1。

因為 $\dfrac{20002000\times100010001}{10001\times200020002000}=\dfrac{20002\times100010001}{10001\times200020002}=\dfrac{2\times10001\times100010001}{10001\times2\times100010001}=1$

所以 (<u>20002000×100010001</u>)＝(<u>10001×200020002000</u>)。
則： 1999×20002000×200120012001＝2001×19991999×200020002000。
答：兩數相等。

小 試 身 手

【例題一】

展開下列各式：$(x+3)(x+2)$

答：x^2+5x+6

【例題二】

展開下列各式：$(x-3)(x+5)$

答：$(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$

【例題三】

展開下列各式：$(x+8)(x-7)$

答：$(x+8)(x-7)=x^2+x-56$

【例題四】

展開下列各式：$(x-4)(x-2)$

答：$(x-4)(x-2)=x^2-6x+8$

【例題五】

展開下列各式：$(x+3)(x+2)(x+1)$

答：$(x+3)(x+2)(x+1)$

$=x^3+6x^2+11x+6$

【練習一】

展開下列各式：$(2x+4)(x+10)$答:

答：$(2x+4)(x+10)=2x^2+24x+40$

【練習二】

展開下列各式：$(3x-5)(x+1)$

答：$(3x-5)(x+1)=3x^2-2x-5$

【練習三】

展開下列各式：$(4x+15)(x-19)$

答：$(4x+15)(x-19)=4x^2-61x-285$

【練習四】

展開下列各式：$(5x-6)(x-20)$

答：$(5x-6)(x-20)=5x^2-106x+120$

【練習五】

展開下列各式：$(x-2)(3x+2)(2x-1)$

答：$(x-2)(3x+2)(2x-1)$

$=6x^3-11x^2-4x+4$

平方公式

平方公式：

二項式相乘特殊公式：

【公式 1】：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\because\ (a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b$

$=a^2+2ab+b^2$。

則可得到完全平方和的公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a+b)\times(a+b)=a\times a+a\times b+b\times a+b\times b$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

【範例】：利用公式 1 展開下列各式：

（1）$(x+1)^2$　　（2）$(2x+3y)^2$

解：（1）$(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$

$=x^2+2x+1$

（2）$(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$

【公式 2】：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\because (a-b)(a-b)=a\cdot a+a\cdot(-b)+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-b)$

$=a^2-2ab+b^2$。

則可得到完全平方差的公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a-b)\times(a-b)=a\times a-a\times b-b\times a-b\times(-b)$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

【範例】：利用公式 2 展開下列各式：

（1）$(x-1)^2$　　（2）$(x-a)^2$　　（3）$(2x-3y)^2$

解：(1) $(x-1)^2=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2$

$=x^2-2x+1$

(2) $(x-a)^2=x^2-2\cdot x\cdot a+a^2$

$=x^2-2a+a^2$

(3) $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$

$=4x^2-12xy+9y^2$

【公式 3】：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\because (a+b)(a-b)=a\cdot a+\cancel{a\cdot(-b)}+\cancel{b\cdot a}+b\cdot(-b)=a^2-b^2$

則可得到平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a+b)\times(a-b)=a\times a-a\times b+b\times a+b\times(-b)$$
$$=a^2-b^2$$

【範例】：利用公式 3 展開下列各式：

(1) $(x-2)(x+2)$ (2) $(3x+4y)(3x-4y)$ (3) $(a+b-c)(a-b+c)$

解：(1) $(x-2)(x+2)=x^2-(2)^2$

$=x^2-4$

(2) $(3x+4y)(3x-4y)=(3x)^2-(4y)^2$

$=9x^2-16y^2$

(3) 因為 $a+b-c=a+(b-c)$和 $a-b+c=a-(b-c)$，所以可以得到：

$(a+b-c)(a-b+c)=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$

【範例】：求出117^2-17^2的值。

解：如同平方和公式，我們也常利用平方差公式來簡化數的計算。

我們觀察到 117＝100＋17，所以可得到下列算式：

$117^2-17^2=(117+17)(117-17)$

$=134\times100$

$=13400$

【公式 4】：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

我們知道 $a+b+c=(a+b)+c$，所以利用和的完全平方公式，即可得到：

$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2$

$=[(a+b)+c]\cdot[(a+b)+c]$

$=(a+b)^2+2\cdot(a+b)\cdot c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$。

因此，得到三項和的完全平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

【範例】：利用公式 4 展開下列各式：(1) $(x+y+3)^2$ (2) $(a+2b-3c)^2$。

解 ：(1) $(x+y+3)^2=x^2+y^2+3^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 3+2\cdot 3\cdot x$

$=x^2+y^2+9+2xy+6y+6x$

$=x^2+2xy+y^2+6x+6y+9$

(2) $(a+2b-3c)^2=[a+(2b)+(-3c)]^2$

$=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2(2b)(-3c)+2a(-3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ac$

※公式整理：1. 完全平方和：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2. 完全平方差：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3. 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

4. 三項完全平方和：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

【範例】：求下列各題的值：

(1) $\dfrac{96^2}{204^2-108^2}$ (2) $2001\times 2003-1998\times 2006$

解 ：(1) $\dfrac{96^2}{204^2-108^2}=\dfrac{96^2}{(204+108)(204-108)}=\dfrac{96^2}{312\times 96}=\dfrac{96}{312}=\dfrac{12}{39}$

(2) $2001\times 2003-1998\times 2006$

$=(2002-1)(2002+1)-(2002-4)(2002+4)$

$=2002^2-1-(2002^2-4^2)$

$=-1+16=15$

【範例】：若 6789A＝56789，則(A＋1)×6789

解 ：(A＋1)×6789＝6789A＋6789＝56789＋6789＝63578

【範例】：已知 $(99999)^2=100000^2-x$，求 x 的值。

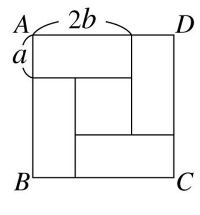
解 ：$(99999)^2=(100000-1)^2$

$=100000^2-2\times 100000\times 1+1^2$

$=100000^2-20000+1$

$=100000^2-x$ $\therefore\ x=199999$

【範例】：如圖，以四個相同的長方形拼成一個大正方形 ABCD，則正方形 ABCD 的面積為何？



解 ：因為 $\overline{AD}=(a+2b)$

所以面積為 $(a+2b)^2$

【範例】：$(69\frac{17}{23})\times(70\frac{6}{23})=a+b$，若 a 為正整數且 $0<b<1$，則 $a=$？

解　：$(69\frac{17}{23})\times(70\frac{6}{23})=(70-\frac{6}{23})\times(70+\frac{6}{23})$

$=70^2-(\frac{6}{23})^2$

$=4900-(0.2\Lambda\ )^2$

$=4899.\Lambda$

$\therefore\ a=4899$

【範例】：下列四個式子，哪一個值最大？

(A)777^2-27^2　(B) 852^2-48^2　(C)1001^2-599^2　(D)1006^2-604^2

解　：(A) $777^2-27^2=(777+27)(777-27)=804\times750$

(B) $852^2-48^2=(852+48)(852-48)=900\times804$

(C) $1001^2-599^2=(1001+599)(1001-599)=1600\times402$

(D) $1006^2-604^2=(1006+604)(1006-604)=1610\times402$

故比較(B)與(D)即可 因為(B)$=723600>647220=$(D) 故選(B)

【範例】：計算$(10006-11)^2-(10001-16)^2$之值

解　：$\because\ a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\therefore$ 原式$=[(10006-11)+(10001-16)][(10006-11)-(10001-16)]$

【範例】：計算$7931\times7931-7930\times7932-7934\times7937+7935\times7936$之值

解　：求值式$=7931^2-(7931-1)(7931+1)-(7935-1)(7936+1)+7935\times7936$

$=7931^2-(7931^2-1^2)-7935\times7936-7935+7936+1+7935\times7936$

$=7931^2-7931^2+1+1+1\quad=3$

【範例】：100.1×100.1之計算結果，其個位數字為何？

解　：利用$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$之結果

可得$100.01\times100.01=(100+0.01)\times(100+0.01)=(100+0.01)^2$

$=100^2+2\times100\times0.01+0.01^2=10000+2+0.0001$

$=10002.0001$

【範例】：設 $a+b=3$，$ab=2$，求：

（1）$(a+1)(b+1)$

（2）a^2+b^2

（3）$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

（4）$3a^2-4ab+3b^2$

（5）$(a-b)$

（6）a^2-b^2

（7）a^3+b^3

（8）a^3-b^3

（9）a^4+b^4

（10）a^4-b^4

（11）a^8-b^8

解：（1）$(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+(a+b)+1=2+3+1=6$

（2）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(3)^2-4=5$

（3）$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}$

（4）$3a^2-4ab+3b^2=3(a^2+b^2)-4ab=15-8=7$

（5）因為 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2+b^2-2ab=5-4=1$

所以 $(a-b)=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

（6）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\pm 3$

（7）$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=27-3\times 2\times 3=27-18=9$

（8）$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=\pm 7$

（9）$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$

因為 $(a^2+b^2)^2=a^4+2(ab)^2+b^4$

所以 $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=25-8=17$

（10）$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=\pm 15$

（11）$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)=\pm 255$

小 試 身 手

【例題一】

展開下列各式：

(1) $(1+2a)(2-3b)$　(2) $(-x+5y)(2x-y)$

答:

(1) $(1+2a)(2-3b)=2-3b+4a-6ab$

(2) $(-x+5y)(2x-y)$

$=-2x^2+11xy-5y^2$

【例題二】

展開下列各式：

(1) $(a-b-c)(a+b+c)$

(2) $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

答:

(1) $(a-b-c)(a+b+c)$

$=[a-(b+c)][a+(b+c)]$

$=a^2-(b+c)^2$

$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$

$=a^2-b^2-c^2-2bc$

(2) $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

$=[(a^2+4b^2)+2ab][(a^2+4b^2)-2ab]$

$=(a^2+4b^2)^2-(2ab)^2$

$=a^4+8a^2b^2+16b^4-4a^2b^2$

$=a^4+4a^2b^2+16b^4$

【練習一】

展開下列各式：

(1) $(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b)^2$　(2) $(2x-y+3)^2$

答:

(1) $(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b)^2=\frac{4}{9}a^2+2ab+\frac{9}{4}b^2$

(2) $(2x-y+3)^2$

$=4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9$

【練習二】

展開下列各式：

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

答:

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)$

$=(x^2-3x+2)(x-3)$

$=x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6$

$=x^3-6x^2+11x-6$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]$

$=[(x^2+5x)+4][(x^2+5x)+6]$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

【例題三】

展開下列式子：$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=x^4-4x^2-x^2+4$

$=x^4-5x^2+4$

【練習三】

展開下列式子：$(x-2)(x+2)(x^2+4)$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)$

$=(x^2-4)(x^2+4)$

$=x^4-16$

【例題四】

求下列各題的值：

(1) $\dfrac{176^2}{138^2-38^2}$

(2) $2001\times2003-1998\times2006$

答:

(1) $\dfrac{176^2}{138^2-38^2}$

$=\dfrac{176^2}{(138+38)(138-38)}=\dfrac{176}{100}=\dfrac{44}{25}$

(2) $2001\times2003-1998\times2006$

$=(2002-1)(2002+1)-(2002-4)(2002+4)$

$=2002^2-1-(2002^2-4^2)$

$=-1+16=15$

【練習四】

求下列各題的值：

(1) $\dfrac{99^2}{201^2-102^2}$

(2) $301\times199+499^2$

答:

(1) $\dfrac{99^2}{201^2-102^2}$

$=\dfrac{99^2}{(201+102)(201-102)}$

$=\dfrac{99^2}{303\times99}=\dfrac{99}{303}=\dfrac{33}{101}$

(2) $301\times199+499^2$

$=301\times199+(300+199)^2$

$=301\times199+300^2+2\times300\times199+199^2$

$=199\times(301+2\times300+199)+300^2$

$=199\times1100+90000$

$=218900+90000=308900$

【例題五】

已知$(6825.5)^2=6825^2+x$，求x的值。

解：$(6825.5)^2=(6825+0.5)^2$

$=6825^2+2\times6825\times0.5+0.5^2$

$=6825^2+6825+0.25=6825^2+x$

$\therefore\ x=6825.25$

答: $x=6825.25$。

【練習五】

已知$(7999)^2=8000^2-x$，求x的值。

解：$(7999)^2=(8000-1)^2$

$=8000^2-2\times8000\times1+1^2$

$=8000^2-16000+1=8000^2-x$

$\therefore\ x=15999$

答: $x=15999$。

【例題六】

若 $(x^3+ax+2)(2x-a)$ 的展開式中，x^3 的係 數為 9，求 a 的值。

解： ∵ x^3 的係數為－a，

∴ a＝－9

答:a＝－9。

【練習六】

若 $(x+a)^2(x^2+x+1)$ 的展開式中，x^3 的係 數為 5，求 a 的值。

解： ∵ $(x+a)^2(x^2+x+1)$

$=(x^2+2ax+a^2)(x^2+x+1)$

∴ x^3 的係數為 1＋2a，

∴ 1＋2a＝5　即 a＝2

答:a＝2。

【例題七】

若 $1007^2=1000000+2000x+49$，

$995^2=1000000+2000y+25$，求 xy？

解： ∵ $1007^2=(1000+7)^2$

$=1000^2+2\times1000\times7+7^2$

$=1000000+14000+49$

$=1000000+2000x+49$

∴ $2000x=14000$　　∴ $x=7$

又 $995^2=(1000-5)^2$

$=1000000-2\times1000\times5+5^2$

$=1000000+2000y+25$

∴ $2000y=-10000$

∴ $y=-5$　　∴ $xy=-35$

答: $xy=-35$。

【練習七】

$(987+218)^2-(567-362)^2=$__1410000___。

解：$(987+218)^2-(567-362)^2$

$=1205^2-205^2$

$=(1205+205)\times(1205-205)$

$=1410\times1000=1410000$

答:$(987+218)^2-(567-362)^2=1410000$。

【例題八】

若 $(100+a)^2=100^2+800+b$，則 a=__4__，b=___16__。

解：$\because (100+a)^2=100^2+2\times100\times a+a^2$

$=100^2+800+b$

$\therefore 200a=800$ 即 $a=4$

又 $a^2=b$ $\therefore b=16$

答: $a=4$，$b=16$。

【練習八】

設 $a-b=5$，$ab=6$，求：

(1) $a^2+b^2=$__37__。

(2) $3a^2-4ab+3b^2=$___87__。

解：(1) $\because$ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=5^2+2\times6=37$

(2) $\because$ $3a^2-4ab+3b^2$

$=3(a^2+b^2)-4ab$

$=3\times37-24=87$

答: (1) $a^2+b^2=37$，(2) $3a^2-4ab+3b^2=87$。

【例題九】

如附圖，將邊長為 x 公分的正方形，一邊增加 a 公分，一邊減少 a 公分，則

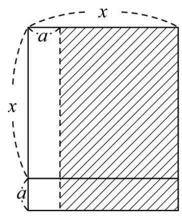
（1）斜線部分的面積＝__x^2-a^2___平方公分（ 以 x、a 表示 ）

（2）若 $x=996$，$a=4$，則斜線部分面積為__992000__平方公分。

解：（1）斜線部分的面積＝$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

（2）斜線部分面積為$=996^2-4^2=(996+4)\times(996-4)$

$=1000\times992=992000$

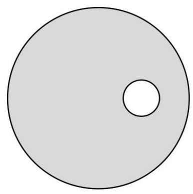


【練習九】

如附圖，大圓半徑 12.95 公分，小圓半徑 2.95 公分，則灰色部分面積為__159π__平方公分

。

解：$\pi\times(12.95^2-2.95^2)=\pi\times15.9\times10=159\pi$



【例題十】

計算 $15.02^2-2\times15.02\times0.02=$ 224.9996 。

解：$15.02^2-2\times15.02\times0.02+0.02^2-0.02^2$

$=(15.02-0.02)^2-0.0004$

$=225-0.0004=224.9996$

【練習十】

利用乘法公式求得 $998^2=1000^2+m+2^2$，

則 $m=$__ –4000____。

解：$\because 998^2=(1000-2)^2$

$=1000^2-4000+2^2=1000^2+m+2^2$，

$\therefore m=-4000$

立方公式

立方公式

1. **立方和與立方差：**

【公式 1】：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

我們可利用分配律來展開一次式與二次式的乘積。

例如，展開 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 即可得到：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

因此，得到立方和公式：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a+b)\times(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

【範例】：利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$ (2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

解 ：(1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$=x^3-2^3$
$=x^3-8$

(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$
$=(2a+5b)[(2a)^2-(2a)(5b)+(5b)^2]$
$=(2a)^3+(5b)^3$
$=8a^3+125b^3$

【公式 2】：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

同樣的，我們可以展開 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 並經合併化簡後，

可得到立方差公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

其實，只要把公式 1 中的 b 以 $-b$ 代入，即可得上式。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$(a-b)\times(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

【範例】：利用公式 7 展開下列各式：

(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$　　(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})$

解：(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)[(2x)^2+(2x)\cdot 1+1^2]$

$=(2x)^3-1^3$

$=8x^3-1$

(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})=(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})[(\frac{a}{3})^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2]$

$=(\frac{a}{3})^3-(\frac{b}{2})^3$

$=\frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}$

2. 完全立方公式：

【公式 3】：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

在展開 $(a+b)^3$，如同在做立方和與立方差一樣，可先將 $(a+b)^3$

寫成 $(a+b)(a+b)^2$，

再利用和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

由此，我們可得到和的完全立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$(a+b)\times(a+b)^2=(a+b)\times(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

【範例】：展開下列各式：

(1) $(x+2)^3$　　(2) $(3x+2y)^3$

解：(1) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(3x+2y)^3=(3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3$

$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

【公式 4】：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

同樣的，展開 $(a-b)^3$ 的乘積，可先將 $(a-b)^3$ 寫成 $(a-b)(a-b)^2$，

再利用和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

可得到差的完全立方公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

其實，只要將公式 3 中的 b 以 $-b$ 代入，同樣可得上式。

此結果可利用下圖來幫助記憶：

$$
\begin{aligned}
(a-b)\times(a-b)^2 &= (a-b)\times(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

【範例】：展開下列各式：

(1) $(x-1)^3$　　　(2) $(4a-5b)^3$

解：(1) $(x-1)^3=x^3-3(x)^2(1)+3(x)(1)^2-1^3$

$=x^3-3x^2+3x-1$

(2) $(4a-5b)^3=(4a)^3-3(4a)^2(5b)+3(4a)(5b)^2-(5b)^3$

$=64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3$

※立方公式整理及補充：

1. 立方和：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$。
2. 立方差：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$。
3. 完全立方和：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。
4. 完全立方差：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。
5. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$。
6. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+ab+b^4$。

有關$(a+b)^n$的展開式：(巴斯卡三角形)

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

這個像金字塔一樣的數字三角形，一般叫做「巴斯卡三角形」，在中國叫做「賈憲三角」或「楊輝三角」。巴斯卡是十七世紀的一位法國數學家，他造出「巴斯卡三角形」的方法是這樣的：

先在紙上寫出一行和一列的「1」，然後在各個位置中填入數字，每一個位置上的數字都是它上面一個數和左邊一個數的和。接下來，把這個表右轉 45°，放正了，就得到上面的數字三角形了！

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

現在的數學書裡，都把這個三角形稱為「巴斯卡三角形」，事實上，在南宋楊輝所寫的數學書裡面，早就介紹了由北宋賈憲所創造出來的相同三角形了（所以在中國稱為「賈憲三角」或「楊輝三角」），時間可要比巴斯卡早了約六百年呢！

到底這個三角形有什麼用處呢？其實，這個三角形的每一列數字，剛好就是乘法公式學到的$(a+b)^n$的展開式的係數表：

第 n 列	$(a+b)^n$	將$(a+b)^n$展開	巴斯卡三角形
$n=0$	$(a+b)^0$	1	1
$n=1$	$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$n=2$	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$n=3$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$n=4$	$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$n=5$	$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1
⋮	⋮	⋮	⋮

所以，想知道$(a+b)^n$展開後的係數，只要查一下巴斯卡三角形的第 n 列就行了。

【範例】：求$(x+2)^4$的展開式。

解：利用巴斯卡三角形，$n=4$的係數為：1、4、6、4、1。

則$(x+2)^4=x^4+4(x^3\cdot 2)+6(x^2\cdot 2^2)+4(x\cdot 2^3)+2^4$

$=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$。

【範例】：求$(x-2)^4$的展開式。

解：利用巴斯卡三角形，$n=4$的係數為：1、4、6、4、1。

則$(x-2)^4=x^4+4(x^3)\cdot(-2)+6(x^2)\cdot(-2)^2+4(x)\cdot(-2)^3+(-2)^4$

$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$。

【範例】：求$(2x+3y)^5$的展開式。

解：利用巴斯卡三角形，$n=5$的係數為：1、5、10、10、5、1。

則 $(2x+3y)^5=(2x)^5+5(2x)^4\cdot(3y)+10(2x)^3\cdot(3y)^2$

$+10(2x)^2\cdot(3y)^3+5(2x)\cdot(3y)^4+(3y)^5$

$=32x^5+5\cdot 16x^4\cdot 3y+10\cdot 8x^3\cdot 9y^2+10\cdot 4x^2\cdot 27y^3$

$+5\cdot 2x\cdot 81y^4+243y^5$

$=32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4$

$+243y^5$

【範例】：求$(2x-3y)^5$的展開式。

解：利用巴斯卡三角形，$n=5$的係數為：1、5、10、10、5、1。

則$(2x-3y)^5=(2x)^5+5(2x)^4\cdot(-3y)+10(2x)^3\cdot(-3y)^2$

$+10(2x)^2\cdot(-3y)^3+5(2x)\cdot(-3y)^4+(-3y)^5$

$=32x^5-5\cdot 16x^4\cdot 3y+10\cdot 8x^3\cdot 9y^2-10\cdot 4x^2\cdot 27y^3$

$+5\cdot 2x\cdot 81y^4-243y^5$

$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4$

$-243y^5$

小 試 身 手

【例題一】

試算出下列各式的值：

(1) 75^3+25^3

(2) $(65+35)(65^2-65\times35+35^2)$

解：

(1) 75^3+25^3

$=(75+25)\times(75^2-75\times25+25^2)$

$=100\times(5625-1875+625)$

$=100\times4375=437500$

(2) $(65+35)(65^2-65\times35+35^2)$

$=100\times(4225-2275+1225)$

$=100\times3175=317500$

【例題二】

試算出下列各式的值：

(1) $99^3+3\times99^2\times1+3\times99\times1^2+1^3$

解：$99^3+3\times99^2\times1+3\times99\times1^2+1^3$

$=(99+1)^3=100^3=1000000$

【練習一】

試算出下列各式的值：

(1) 75^3-25^3

(2) $(100-3)(100^2+100\times3+3^2)$

解：

(1) 75^3-25^3

$=(75-25)\times(75^2+75\times25+25^2)$

$=50\times(5625+1875+625)$

$=50\times8125=406250$

(2) $(100-3)(100^2+100\times3+3^2)$

$=1000^3-3^3=1000000000-27$

$=999973$

【練習二】

試算出下列各式的值：

(1) $1001^3-3\times1001^2+3\times1001-1$

解：$1001^3-3\times1001^2+3\times1001-1$

$=1001^3-3\times1001^2\times1+3\times1001\times1^2-1^3$

$=(1001-1)^3=1000^3=1000000000$

【例題三】

若 $a^2+b^2=13$ 且 $ab=6$，

試求 a^4+b^4 之值。

解：$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=13^2-2\times36=169-72=97$

【練習三】

若 $(a+b)^2=25$ 且 $ab=6$，

試求 a^4+b^4 之值。

解：$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=25-12=13$

$\therefore a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=13^2-2\times36=169-72=97$

【例題四】

已知 $a+b=10$ 且 $ab=15$，試求 a^3+b^3 之值。

解：$\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=100-30=70$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=10\times(70-15)=550$

【練習四】

已知 $a-b=15$ 且 $ab=30$，試求 a^3-b^3 之值。

解：$\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=225+60=285$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=15\times(285+30)=15\times315$

$=4725$