

■ 多項式的四則運算

【範例】：王老先生打算在河岸邊用 40 公尺長的鐵絲圍成一個矩形菜圃(河岸邊不圍)，
請問：這塊菜圃的面積為多少平方公尺？

解：設寬為 x 公尺，則長為 $(40-2x)$ 公尺。

菜圃面積 $= x(40-2x) = 40x - 2x^2$ (平方公尺)。

答：當寬為 x 公尺時，菜圃面積為 $40x - 2x^2$ (平方公尺)。

在上面的範例中， $(40x - 2x^2)$ 是我們這一節所要學的多項式。

現在讓我們先來認識一下多項式。

多項式的定義：

1. 多項式：

像 $x^2 + 2x + 2$ 這類由數和文字符號 x 進行加法和乘法運算所構成的式子，
稱為 x 的多項式。

2. 一元一次式：

當一個式子只含有一個未知數(一元)，而此未知數的次方是一次，
我們稱為一元一次多項式，例如： $-3x-5$ ， $y+3$ 。

3. 一元二次式：

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 2 時，
我們稱為一元二次多項式，例如： $f(x) = x^2 + 3x + 2$ 為一元二次多項式。

4. 一元三次式：

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 3 時，
我們稱為一元三次多項式，例如： $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ 為一元三次多項式。

5. 項：

多項式中，被加、減號分開的每一部份，包括其前面的符號叫做項。

例如：多項式 $5x^2 + 2x - 1$ 寫成 $5x^2 + 2x + (-1)$ 有三個項 $5x^2$ 、 $2x$ 、 (-1) 。

6. 常數項：

多項式中的項，如果只是一個數，而不含任何其他文字符號 x ，叫做常數項。

7. 次數：

a. 含一個文字的多項式；此文字的最高指數叫做此多項式的次數(次方)。

b. 含多文字的多項式；各項中，諸文字次數之最高者叫做這多項式的次數(次方)。

例如： $x^2 + 2x + 2$ 文字 x 的最高次數是 2，則此多項式為二次多項式簡稱二次式。

8. 升冪排列或升次排列：

把多項式的各項按 x 的次數由小到大排列，如果有常數項時，把它放在最前面。

例如： $-2x - 3x^2 + 4$ 的升冪排列是 $4 - 2x - 3x^2$ 。

9. 降冪排列或降次排列：

把多項式的各項按 x 的次數由大到小排列，如果有常數項時，把它放在最後面。

例如： $-2x - 3x^2 + 4$ 的升冪排列是 $-3x^2 - 2x + 4$ 。

10. 同類項：

在多項式中， x 的次數相同的項，稱為同類項；常數項也是同類項。

例如： $3x^2 - 2x + 4$ 與 $5x^2 + 2x - 1$ ，3 和 5 是 x^2 的同類項係數， -2 和 2 是 x 的同類項係數，4 和 -1 是常數項係數。

多項式的加、減運算：

有關多項式的加減運算，基本上就是將同類項的係數對應相加或相減，所以需要將同類項對齊，再將係數相加或相減。通常我們會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

1. 在用橫式做多項式的加法、減法運算時，事實上就是將同類項的係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(-x + 2x^2 + 2) + (1 + 2x + 3x^2)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} : & (-x + 2x^2 + 2) + (1 + 2x + 3x^2) \\ &= (2x^2 - x + 2) + (3x^2 + 2x + 1) \\ &= (2+3)x^2 + (-1+2)x + (2+1) \\ &= 5x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

2. 在用直式做多項式的加法、減法運算時，須將同類項對齊，再將係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(2x^2 - x + 2) + (3x^2 + 2x + 1)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad 2x^2 - x + 2 \\ \quad + 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline \quad 5x^2 + x + 3 \end{array}$$

3. 分離係數法是將直式中各項的係數與文字符號分離開，只寫出係數作運算的一種方法。在寫出係數時，遇到缺項，通常都補 0。

【範例】：請化簡 $(5x^2 - 2x + 1) + (2x^2 + 4x + 3)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad 5 \quad -2 \quad 1 \\ +) \quad 2 \quad 4 \quad 3 \\ \hline \quad 7 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

$$\text{所以 } (5x^2 - 2x + 1) + (2x^2 + 4x + 3) = 7x^2 + 2x + 4$$

【範例】：請化簡 $(7x^2 + 3x + 1) - (4x^2 - 2x + 5)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad \quad 7 \quad 3 \quad 1 \\ -) \quad 4 \quad -2 \quad 5 \\ \hline \quad \quad 3 \quad 5 \quad -4 \end{array}$$

$$\text{所以}(7x^2 + 3x + 1) - (4x^2 - 2x + 5) = 3x^2 + 5x - 4$$

【範例】：請化簡 $(5x^2 + 2) - (x^2 - 3x - 7)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad \quad 5 \quad 0 \quad 2 \\ -) \quad 1 \quad -3 \quad -7 \\ \hline \quad \quad 4 \quad 3 \quad 9 \end{array}$$

$$\text{所以}(5x^2 + 2) - (x^2 - 3x - 7) = 4x^2 + 3x + 9$$

【範例】：請化簡 $(1 + x + 3x^2) - (7x^2 + 5)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ -) \quad 7 \quad 0 \quad 5 \\ \hline \quad -4 \quad 1 \quad -4 \end{array}$$

$$\text{所以}(1 + x + 3x^2) - (7x^2 + 5) = -4x^2 + x - 4$$

多項式的乘法：

我們會採升幂或降幂排列，兩多項式相乘我們會使用下列規則：

1. 交換律： $a \times b = b \times a$

2. 結合律： $a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

3. 分配律： $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$$

$$a \times (b + c + d) = a \times b + a \times c + a \times d$$

$$(a + b) \times (c + d + e) = a \times c + a \times d + a \times e + b \times c + b \times d + b \times e$$

通常我們也會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

$$(1) -x(2x+5) \quad (2) x(2x^2-x+3) \quad (3) (3x^2-2x+1)\times 2x$$

解：(1) $-x(2x+5) = (-x)\times 2x + (-x)\times 5$
 $= -2x^2 - 5x$

(2) $x(2x^2-x+3) = x\times(2x^2) - x\times(x) + x\times 3$
 $= 2x^3 - x^2 + 3x$

(3) $(3x^2-2x+1)\times 2x = 3x^2\times 2x - 2x\times 2x + 1\times 2x$
 $= 6x^3 - 4x^2 + 2x$

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

$$(1) (x+3)(x+2) \quad (2) (x-2)(x+3)。$$

解：(1) $(x+3)(x+2) = x(x+2) + 3(x+2)$
 $= x^2 + 2x + 3x + 6$
 $= x^2 + 5x + 6$

(2) $(x-2)(x+3) = x(x+3) - 2(x+3)$
 $= x^2 + 3x - 2x - 6$
 $= x^2 + x - 6$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

<p>(1)</p> $\begin{array}{r} \\ \\ \times) \\ \hline \\ +) \\ \hline \end{array}$	<p>(2)</p> $\begin{array}{r} \\ \\ \times) \\ \hline \\ +) \\ \hline \end{array}$
---	--

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

<p>(1)</p> $\begin{array}{r} \\ \\ \times) \\ \hline \\ +) \\ \hline \end{array}$	<p>(2)</p> $\begin{array}{r} \\ \\ \times) \\ \hline \\ +) \\ \hline \end{array}$
---	---

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

$$(1) (2x-3)(3x-5) \quad (2) (x+6)(3x-4)$$

解：(1) $(2x-3)(3x-5) = 2x(3x-5) - 3(3x-5)$

$$= 6x^2 - 10x - 9x + 15$$

$$= 6x^2 - 19x + 15$$

(2) $(x+6)(3x-4) = x(3x-4) + 6(3x-4)$

$$= 3x^2 - 4x + 18x - 24$$

$$= 3x^2 + 14x - 24$$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

<p>(1)</p> $ \begin{array}{r} \begin{array}{cc} 2x & -3 \\ \uparrow & \uparrow \\ \times) 3x & -5 \end{array} \\ \hline -10x & +15 \\ +) 6x^2 - 9x & \\ \hline 6x^2 - 19x & +15 \end{array} $	<p>(2)</p> $ \begin{array}{r} \begin{array}{cc} x & 6 \\ \uparrow & \uparrow \\ \times) 3x & -4 \end{array} \\ \hline -4x & -24 \\ +) 3x^2 + 18x & \\ \hline 3x^2 + 14x & -24 \end{array} $
--	--

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

<p>(1)</p> $ \begin{array}{r} \begin{array}{ccc} x^2 & x^1 & x^0 \\ & 2 & -3 \\ & \uparrow & \uparrow \\ \times) & 3 & -5 \end{array} \\ \hline & -10 & +15 \\ +) 6 & -9 & \\ \hline 6 & -19 & +15 \end{array} $	<p>(2)</p> $ \begin{array}{r} \begin{array}{ccc} x^2 & x^1 & x^0 \\ & 1 & 6 \\ & \uparrow & \uparrow \\ \times) & 3 & -4 \end{array} \\ \hline & -4 & -24 \\ +) 3 & +18 & \\ \hline 3 & +14 & -24 \end{array} $
---	--

【範例】：利用乘法運算展開 $(x+1) \times (3x+7) \times (2x-4)$ 。

解：

$$\begin{aligned}
 & (x+1) \times (3x+7) \times (2x-4) \\
 &= [x(3x+7) + (3x+7)] \times (2x-4) \\
 &= [3x^2 + 7x + 3x + 7] \times (2x-4) \\
 &= (3x^2 + 10x + 7) \times (2x-4) \\
 &= 2x(3x^2 + 10x + 7) - 4(3x^2 + 10x + 7) \\
 &= 6x^3 + 20x^2 + 14x - 12x^2 - 40x - 28 \\
 &= 6x^3 + 8x^2 - 26x - 28
 \end{aligned}$$

【範例】：利用乘法運算展開 $(2x+1)\times(x^2-2x+1)$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解} : & (2x+1)\times(x^2-2x+1) \\
 &= x^2(2x+1)-2x(2x+1)+(2x+1) \\
 &= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1 \\
 &= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1 \\
 &= 2x^3-3x^2+1
 \end{aligned}$$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x^2 & x & 2 \\ \times) & & & & & \\ \hline & -3x^2 & -3x & & -6 & \\ +) & x^3 & x^2 & +2x & & \\ \hline & x^3 & -2x^2 & -x & -6 & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ 1 & 1 & 2 \\ \times) & & & & & \\ \hline & -3 & -3 & & -6 & \\ +) & 1 & 1 & +2 & & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -6 & \end{array}
 \end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開 $(2x+1)\times(x^2-2x+1)$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解} : & (2x+1)\times(x^2-2x+1) \\
 &= x^2(2x+1)-2x(2x+1)+(2x+1) \\
 &= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1 \\
 &= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1 \\
 &= 2x^3-3x^2+1
 \end{aligned}$$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x^2 & -2x & +1 \\ \times) & & & & & \\ \hline & +x^2 & -2x & +1 & & \\ +) & 2x^3 & -4x^2 & +2x & & \\ \hline & 2x^3 & -3x^2 & & +1 & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ 1 & -2 & +1 \\ \times) & & & & & \\ \hline & +1 & -2 & +1 & & \\ +) & 2 & -4 & +2 & & \\ \hline & 2 & -3 & 0 & +1 & \end{array}
 \end{array}$$

【範例】：若 $x^2 + x + 1 = 0$ ，則多項式 $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2)^2 + 2$ 之值為：

解：∵ $x^2 + x + 1 = 0$ ，∴ $x^2 + x = -1$ 。

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x^2 + x - 2)^3 + 7(x^2 + x + 3)^2 + 2 &= (-1 - 2)^3 + 7(-1 + 3)^2 + 2 \\ &= (-3)^3 + 7(2)^2 + 2 = -27 + 28 + 2 = 3 \end{aligned}$$

【範例】：設利用乘法公式展開 $(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ 得展開式為

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 恰有一個為負數，

此負數為：

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad &(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1) \\ &= (x^3 - x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x^4 - x^3 + x^2 - x + x^3 - x^2 + x - 1 \\ &= x^5 + 0x^4 + x^3 - x^2 + 0x - 1 = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1 \\ \Rightarrow &a = 0, b = 1, c = -1, d = 0 \end{aligned}$$

【範例】：設 A 、 B 為兩多項式且 $A+B=3x^3-x^2-x+1$ ， $A-B=x^3+3x^2-x+5$ ，

則 $2A-4B$ 為何？

$$\text{解：} \begin{cases} A+B=3x^3-x^2-x+1 & \Lambda (1) \\ A-B=x^3+3x^2-x+5 & \Lambda (2) \end{cases}$$

由 (1)-(2) 可得

$$\begin{aligned} 2A &= 4x^3 + 2x^2 - 2x + 6 \Rightarrow A = 2x^3 + x^2 - x + 3 \\ &\Rightarrow B = (3x^3 - x^2 - x + 1) - (2x^3 + x^2 - x + 3) = x^3 - 2x^2 - 2 \\ \therefore 2A - 4B &= 2(A - 2B) = 2[(2x^3 + x^2 - x + 1) - 2(x^3 - 2x^2 - 2)] = 2(5x^2 - x + 7) \\ &= 10x^2 - 2x + 14 \end{aligned}$$

【範例】：在 $(x^3 + 3x^2 - ax + 4)(2x^2 - 4x + 1)$ 的乘積展開式中， x^2 項的係數為 -9 ，

則 $a = ?$

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad &3 \times 1 + (-a) \times (-4) + 4 \times 2 = -9 \\ \Rightarrow &3 + 4a + 8 = -9 \\ \Rightarrow &a = -5 \end{aligned}$$

多項式的除法：

在小學時，我們會以下面的長除法（直式計算法）來求出 58 除以 13 得到商數 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 13 \overline{) 58} \\ \underline{52} \\ 6 \end{array}$$

同時，我們也知道： $58 = 13 \times 4 + 6$ 。

事實上，在自然數的除法中，我們有下列的規則：

$$\text{被除數} = \text{除數} \times \text{商數} + \text{餘數}，$$

其中，商數和餘數為非負整數，且餘數小於除數。

同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}，$$

其中，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數。

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式計算法（長除法）。為了簡化計算，也常使用分離係數法。這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

【範例】：求 $(x^2 + x + 1) \div x$ 的商式及餘式。

解：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x \overline{) x^2 + x + 1} \\ \underline{x^2} \\ x + 1 \\ \underline{x} \\ 1 \end{array}$$

商式為 $(x + 1)$ ，餘式為 1。

$$\because (x^2 + x + 1) \div x = (x + 1) \cdots \cdots 1，$$

$$\therefore (x^2 + x + 1) = x \cdot (x + 1) + 1。$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} 1 + 1 \\ 1 \overline{) 1 + 1 + 1} \\ \underline{1} \\ 1 + 1 \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}$$

【範例】：求 $(2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2) \div (x^2 + 0x - 1)$ 的商式及餘式。

解：步驟 a. 將原式改變成降冪排列，且缺項部分補零：

$$(2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2) \div (x^2 + 0x - 1)$$

步驟 b.

$$\begin{array}{r} \text{首商} \\ \textcircled{2x^2} \longrightarrow \\ x^2 + 0x - 1 \overline{) 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2} \\ \underline{2x^4 + 0x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 \end{array}$$

步驟 c.

$$\begin{array}{r} \text{次商} \\ \textcircled{-2} \longrightarrow \\ x^2 + 0x - 1 \overline{) 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2} \\ \underline{2x^4 + 0x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + 0x + 2 \\ \underline{-2x^2 + 0x + 2} \\ 0 \end{array}$$

故可知 $(-4x^2 + 2 + 2x^4) \div (-1 + x^2) = 2x^2 - 2$ 。

【範例】：求 $(6x^4 + 7x^3 - x^2 - 5x - 2) \div (2x^3 + x^2 - x - 1)$ 的商式及餘式。

解：

$$\begin{array}{r} \text{商式} \\ 3x + 2 \\ 2x^3 + x^2 - x - 1 \overline{) 6x^4 + 7x^3 - x^2 - 5x - 2} \\ \underline{6x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x} \\ 4x^3 + 2x^2 - 2x - 2 \\ \underline{4x^3 + 2x^2 - 2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

故可知 $(6x^4 + 7x^3 - x^2 - 5x - 2) \div (2x^3 + x^2 - x - 1)$ 的商式為 $3x + 2$ ，餘式為 0 。

【範例】：求 $(x^2 + 4x + 2) \div (x + 1)$ 的商式及餘式。

解：

方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} \text{商式} \\ x + 3 \\ x + 1 \overline{) x^2 + 4x + 2} \\ \underline{x^2 + x} \\ 3x + 2 \\ \underline{3x + 3} \\ -1 \end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} \text{商式} \\ 1 + 3 \\ 1 + 1 \overline{) 1 + 4 + 2} \\ \underline{1 + 1} \\ 3 + 2 \\ \underline{3 + 3} \\ -1 \end{array}$$

商式為 $x + 3$ ，餘式為 -1 。

※注意：在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述的概念來驗算。例如：

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3) + (-1) && \text{(除式} \times \text{商式} + \text{餘式)} \\ & = x^2 + 4x + 3 - 1 \\ & = x^2 + 4x + 2 && \text{(被除式)} \end{aligned}$$

【範例】：求 $(2x^3 + 5x^2 + x + 5) \div (x + 2)$ 的商式及餘式。

解：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 1 \\ x + 2 \overline{) 2x^3 + 5x^2 + x + 5} \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ x^2 + x \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -x + 5 \\ \underline{-x - 2} \\ 7 \end{array}$$

商式為 $2x^2 + x - 1$ ，餘式為 7。

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} 2 + 1 - 1 \\ 1 + 2 \overline{) 2 + 5 + 1 + 5} \\ \underline{2 + 4} \\ 1 + 1 \\ \underline{1 + 2} \\ -1 + 5 \\ \underline{-1 - 2} \\ 7 \end{array}$$

【範例】：求 $(3x^2 + 2) \div (2x - 1)$ 的商式及餘式。

解：因為 $(3x^2 + 2) = 3x^2 + 0 \cdot x + 2$ ，所以用 $3 + 0 + 2$ 來表示 $3x^2 + 2$ 。

方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \\ 2x - 1 \overline{) 3x^2 + 0x + 2} \\ \underline{3x^2 - \frac{3}{2}x} \\ \frac{3}{2}x + 2 \\ \underline{\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}} \\ 2\frac{3}{4} \end{array}$$

商式為 $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ，餘式為 $-2\frac{3}{4}$ 。

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\ 2 - 1 \overline{) 3 + 0 + 2} \\ \underline{3 - \frac{3}{2}} \\ \frac{3}{2} + 2 \\ \underline{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} \\ 2\frac{3}{4} \end{array}$$

【範例】：求 $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) \div (x^2 + x + 1)$ 的商式及餘式。

解：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x^2 + x + 1 \overline{) x^3 + 2x^2 - 3x + 2} \\ \underline{x^3 + x^2 + x} \\ x^2 - 4x + 2 \\ \underline{x^2 + x + 1} \\ -5x + 1 \end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \overline{) 1 + 2 - 3 + 2} \\ \underline{1 + 1 + 1} \\ 1 - 4 + 2 \\ \underline{1 + 1 + 1} \\ -5 + 1 \end{array}$$

所以 $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) \div (x^2 + x + 1)$ 的商式是 $(x + 1)$ ，餘式是 $(-5x + 1)$ 。

【範例】：一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 x^2+x+1 ，試求 $A \div B$ 。」，某生誤將「 $A \div B$ 」看成「 $A+B$ 」，結果求出答案為「 x^3+x^2+x 」，則 $A \div B$ 正確的答案為何？

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because A+(x^2+x+1)=x^3+x^2+x \\ & \therefore A=(x^3+x^2+x)-(x^2+x+1)=x^3-1 \\ & \text{即 } A \div B=(x^3-1) \div (x^2+x+1)=x-1。 \end{aligned}$$

【範例】：一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 $2x^2+x-1$ ，試求 $A-B$ 。」，某生誤將「 $A-B$ 」看成「 $A+B$ 」，結果求出的答案為「 $5x^2-3x-7$ 」，則 $A-B$ 的正確答案為何？

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because A+B=5x^2-3x-7, \quad A+(2x^2+x-1)=5x^2-3x-7 \\ \Rightarrow & A=(5x^2-3x-7)-(2x^2+x-1)=3x^2-4x-6 \\ \therefore & A-B=(3x^2-4x-6)-(2x^2+x-1)=x^2-5x-5 \end{aligned}$$

【範例】：多項式 $\frac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4} - (8x^7+9x^4+2x-8)$ 是多少次式

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because (x^2-x+1)^5 \text{ 為 } 10 \text{ 次式}、(x^3+1)^2 \text{ 為 } 6 \text{ 次式}、(5x^2+x+1)^4 \text{ 為 } 8 \text{ 次式} \\ \therefore & \frac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4} \text{ 為 } 10+6-8=8 \text{ 次式}，\text{ 而 } (8x^7+9x^4+2x-8) \text{ 為 } 7 \text{ 次式}。 \\ \therefore & \frac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4} - (8x^7+9x^4+2x-8) \text{ 為 } 8 \text{ 次式} \end{aligned}$$

【範例】： $(x^3+4x^2-19) = (x^2+6x+12) \times f(x) + 5$ ，則 $f(x)$ 為何？

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (x^2+6x+12) \times f(x) = (x^3+4x^2-19) - 5 = x^3+4x^2-24 \\ \Rightarrow & f(x) = \frac{x^3+4x^2-24}{(x^2+6x+12)} = x-2 \end{aligned}$$



小 試 身 手

【例題一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

$$(1) 5x^2 - 3x + 2 \quad (2) 3x^2 - 7。$$

答：(1) 最高次數為二次，

x^2 的係數為 5， x 的係數為 -3，
常數項為 2。

(2) 最高次數為二次，

x^2 的係數為 3， x 的係數為 0，
常數項為 -7。

【練習一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

$$(1) -7x^2 - x + 6 \quad (2) 6x^2 - 15。$$

答：(1) 最高次數為二次，

x^2 的係數為 -7， x 的係數為 -1，
常數項為 6。

(2) 最高次數為二次，

x^2 的係數為 6， x 的係數為 0，
常數項為 -15。

【例題二】

以橫式化簡：

$$(2x^2 - 3x + 4) + (x^2 + 5x - 2)。$$

$$\begin{aligned} \text{答：} & (2x^2 - 3x + 4) + (x^2 + 5x - 2) \\ & = 2x^2 - 3x + 4 + x^2 + 5x - 2 \\ & = 3x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

【練習二】

以橫式化簡：

$$(4x^2 - 7x + 10) + (2x^2 - 5)。$$

$$\begin{aligned} \text{答：} & (4x^2 - 7x + 10) + (2x^2 - 5) \\ & = 4x^2 - 7x + 10 + 2x^2 - 5 \\ & = 6x^2 - 7x + 5 \end{aligned}$$

【例題三】

利用直式及分離係數法：

$$\text{化簡：} (x^3 - 2x^2 + 6) - (7x^2 + 3)。$$

解：

直式：

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 0x + 6 \\ -) \quad 7x^2 + 0x + 3 \\ \hline x^3 - 9x^2 + 0x + 3 \end{array}$$

分離係數法：

$$\begin{array}{r} 1 - 2 + 0 + 6 \\ -) \quad 7 + 0 + 3 \\ \hline 1 - 9 + 0 + 3 \end{array}$$

【練習三】

利用直式及分離係數法：

$$\text{化簡：} (x^3 - 2x^2 + 6) + (7x^2 + 3)。$$

解：

直式：

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 0x + 6 \\ +) \quad 7x^2 + 0x + 3 \\ \hline x^3 + 5x^2 + 0x + 9 \end{array}$$

分離係數法：

$$\begin{array}{r} 1 - 2 + 0 + 6 \\ +) \quad 7 + 0 + 3 \\ \hline 1 + 5 + 0 + 9 \end{array}$$

【例題四】

設 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ ， $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$ ，試求 $f(x) - g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} f(x) - g(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) - (x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3 \\ &= -x^4 + 5x^3 + x^2 - 5x + 8 \end{aligned}$$

【練習四】

設 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 10$ ， $g(x) = 2x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 5x - 13$ ，試求 $f(x) + g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} f(x) + g(x) &= (4x^3 - 3x^2 - 6x + 10) + (2x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 5x - 13) \\ &= 2x^4 - 3x^3 + 9x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

【例題五】

展開下列各式：

- (1) $(2x - 5)(x^2 - 3x + 2)$ 。
 (2) $(3x + 1)(x^2 + 4x - 1)$ 。
 答：(1) $2x^3 - 11x^2 + 11x - 10$
 (2) $3x^3 + 13x^2 + x - 1$

【練習五】

展開下列各式：

- (1) $(x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 3)$ 。
 (2) $(2x^2 - 3)(x^3 + 2x^2 - x + 1)$ 。
 答：(1) $2x^4 - 10x^3 + x^2 + 5x - 3$
 (2) $2x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x - 3$

【例題六】

求 $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 1)$ 的商式及餘式。

解： \therefore 商式 $= x + 3$
 餘式 $= 1$

$$\begin{array}{r} 1+3 \\ 1+1 \overline{) 1+4+4} \\ \underline{1+1} \\ 3+4 \\ \underline{3+3} \\ 1 \end{array}$$

【練習六】

求 $(3x^2 + 5x + 7) \div (2x + 1)$ 的商式及餘式。

解： \therefore 商式 $= \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ ，餘式 $= \frac{21}{4}$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \\ 2+1 \overline{) 3+5+7} \\ \underline{3+\frac{3}{2}} \\ \frac{7}{2} + 7 \\ \underline{\frac{7}{2} + \frac{7}{4}} \\ \frac{21}{4} \end{array}$$

【例題七】

設 A 為多項式，且知 $\frac{x^2+3x+3}{A} = (x+2) + \frac{1}{A}$ ，求 A 。

$$\text{解：} \because A \times \frac{x^2+3x+3}{A} = A \times \left[(x+2) + \frac{1}{A} \right]$$

$$\therefore x^2+3x+3 = A(x+2) + 1$$

$$\therefore x^2+3x+2 = A(x+2)$$

$$\therefore A = (x^2+3x+2) \div (x+2) = x+1$$

答： $A = x+1$ 。

【練習七】

設 A 為多項式，且知 $\frac{2x^3-4}{A} = (x^2+x+1) - \frac{2}{A}$ ，求 A 。

$$\text{解：} \because A \times \frac{2x^3-4}{A} = A \times \left[(x^2+x+1) - \frac{2}{A} \right]$$

$$\therefore 2x^3-4 = A(x^2+x+1) - 2$$

$$\therefore 2x^3-2 = A(x^2+x+1)$$

$$\therefore A = (2x^3-2) \div (x^2+x+1) = 2x-2$$

答： $A = 2x-2$ 。

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \overline{) 2x^3+0x^2+0x-2} \\ \underline{2x^3+2x^2+2x} \\ -2x^2-2x-2 \\ \underline{-2x^2-2x-2} \\ 0 \end{array}$$

【例題八】

若 $3x^3-2x^2+ax+12$ 能被 x^2-2x+b 整除，試求 a 和 b 之值。

$$\text{解：} \therefore a-3b+8=0, \quad 12=4b$$

$$\therefore b=3, \quad a=1$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x+b \overline{) 3x^3-2x^2+ax+12} \\ \underline{3x^3-6x^2+3bx} \\ 4x^2+(a+3b)x+12 \\ \underline{4x^2-8x+4b} \\ 0 \end{array}$$

【練習八】

若 $4x^3+8x^2+ax+3$ 能被 $2x^2+x+b$ 整除，試求 a 和 b 之值。

$$\text{解：} \therefore a-2b=3, \quad 3=3b$$

$$\therefore b=1, \quad a=5$$

$$\begin{array}{r} 2x^2+x+b \overline{) 4x^3+8x^2+ax+3} \\ \underline{4x^3+2x^2+2bx} \\ 6x^2+(a-2b)x+3 \\ \underline{4x^2+3x+3b} \\ 0 \end{array}$$

【例題九】

若 $(2x^2 + x - 4) - B = 8x^2 - 2x + 2$ ，求 B

的值。

解：∵ $B = (2x^2 + x - 4) - (8x^2 - 2x + 2)$

$$\therefore B = 2x^2 + x - 4 - 8x^2 + 2x - 2$$

$$B = -6x^2 + 3x - 6$$

答： $B = -6x^2 + 3x - 6$ 。

【練習九】

若 $(x^2 + 5x - 2) - B = 2x^2 - 6x - 7$ ，求 B 的

值。

解：∵ $B = (x^2 + 5x - 2) - (2x^2 - 6x - 7)$

$$\therefore B = x^2 + 5x - 2 - 2x^2 + 6x + 7$$

$$B = -x^2 + 11x + 5$$

$$B = -x^2 + 11x + 5。$$