# 多項式的四則運算

【範例】：王老先生打算在河岸邊用 40 公尺長的鐵絲圍成一個矩形菜圃(河岸邊不圍)，
請問：這塊菜圃的面積為多少平方公尺？

解　：設寬為 $x$ 公尺，則長為 $(40-2x)$ 公尺。

菜圃面積 $= x(40-2x) = 40x-2x^2$ (平方公尺)。

答：當寬為 $x$ 公尺時，菜圃面積為 $40x-2x^2$ (平方公尺)。

在上面的範例中，$(40x-2x^2)$ 是我們這一節所要學的多項式。

現在讓我們先來認識一下多項式。

**多項式的定義**：

**1. 多項式：**

像 $x^2+2x+2$ 這類由數和文字符號 $x$ 進行加法和乘法運算所構成的式子，
稱為 $x$ 的多項式。

**2. 一元一次式：**

當一個式子只含有一個未知數(一元)，而此未知數的次方是一次，
我們稱為一元一次多項式，例如：$-3x-5$，$y+3$。

**3. 一元二次式：**

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 2 時，
我們稱為一元二次多項式，例如：$f(x)=x^2+3x+2$ 為一元二次多項式。

**4. 一元三次式：**

當一個式子只含有一個未知數，而此未知數的最高次數為 3 時，
我們稱為一元三次多項式，例如：$f(x)=2x^3-3x^2+x+2$ 為一元三次多項式。

**5. 項：**

多項式中，被加、減號分開的每一部份，包括其前面的符號叫做項。

例如：多項式 $5x^2+2x-1$ 寫成 $5x^2+2x+(-1)$ 有三個項 $5x^2$、$2x$、$(-1)$。

**6. 常數項：**

多項式中的項，如果只是一個數，而不含任何其他文字符號 $x$，叫做常數項。

**7. 次數：**

a. 含一個文字的多項式；此文字的最高指數叫做此多項式的次數(次方)。

b. 含多文字的多項式；各項中，諸文字次數之最高者叫做這多項式的次數(次方)。

例如：$x^2+2x+2$ 文字 $x$ 的最高次數是 2，則此多項式為二次多項式簡稱二次式。

**8. 升冪排列或升次排列：**

把多項式的各項按 $x$ 的次數由小到大排列，如果有常數項時，把它放在最前面。

例如：$-2x-3x^2+4$ 的升冪排列是 $4-2x-3x^2$。

**9. 降冪排列或降次排列：**

把多項式的各項按 $x$ 的次數由大到小排列，如果有常數項時，把它放在最後面。

例如：$-2x-3x^2+4$ 的升冪排列是 $-3x^2-2x+4$。

**10. 同類項：**

在多項式中，$x$ 的次數相同的項，稱為同類項;常數項也是同類項。

例如：$3x^2-2x+4$ 與 $5x^2+2x-1$，3 和 5 是 $x^2$ 的同類項係數，$-2$ 和 2 是 $x$ 的同類項係數，4 和 $-1$ 是常數項係數。

**多項式的加、減運算：**

有關多項式的加減運算，基本上就是將同類項的係數對應相加或相減，所以需要將同類項對齊，再將係數相加或相減。通常我們會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

1. 在用橫式做多項式的加法、減法運算時，事實上就是將同類項的係數相加或相減。

**【範例】**：請化簡 $(-x+2x^2+2)+(1+2x+3x^2)$。

**解**：

$$
\begin{aligned}
& (-x+2x^2+2)+(1+2x+3x^2) \\
=\ & (2x^2-x+2)+(3x^2+2x+1) \\
=\ & (2+3)x^2+(-1+2)x+(2+1) \\
=\ & 5x^2+x+3
\end{aligned}
$$

2. 在用直式做多項式的加法、減法運算時，須將同類項對齊，再將係數相加或相減。

**【範例】**：請化簡 $(2x^2-x+2)+(3x^2+2x+1)$。

**解**：

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2-x+2 \\
+ & 3x^2+2x+1 \\
\hline
 & 5x^2+x+3
\end{array}
$$

3. 分離係數法是將直式中各項的係數與文字符號分離開，只寫出係數作運算的一種方法。在寫出係數時，遇到缺項，通常都補 0。

**【範例】**：請化簡 $(5x^2-2x+1)+(2x^2+4x+3)$。

**解**：

$$
\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 5 & -2 & 1 \\
+) & 2 & 4 & 3 \\
\hline
 & 7 & 2 & 4
\end{array}
$$

所以 $(5x^2-2x+1)+(2x^2+4x+3)=7x^2+2x+4$

【範例】：請化簡$(7x^2+3x+1)-(4x^2-2x+5)$。

解　：

| | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|
| | 7 | 3 | 1 |
| $-$) | 4 | $-2$ | 5 |
| | 3 | 5 | $-4$ |

所以$(7x^2+3x+1)-(4x^2-2x+5)=3x^2+5x-4$

【範例】：請化簡$(5x^2+2)-(x^2-3x-7)$。

解　：

| | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 2 |
| $-$) | 1 | $-3$ | $-7$ |
| | 4 | 3 | 9 |

所以$(5x^2+2)-(x^2-3x-7)=4x^2+3x+9$

【範例】：請化簡$(1+x+3x^2)-(7x^2+5)$。

解　：

| | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 1 |
| $-$) | 7 | 0 | 5 |
| | $-4$ | 1 | $-4$ |

所以$(1+x+3x^2)-(7x^2+5)=-4x^2+x-4$

**多項式的乘法：**

我們會採升冪或降冪排列，兩多項式相乘我們會使用下列規則：

1. 交換律：$a\times b=b\times a$
2. 結合律：$a\times b\times c=a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
3. 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

$(a+b)\times(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$

$a\times(b+c+d)=a\times b+a\times c+a\times d$

$(a+b)\times(c+d+e)=a\times c+a\times d+a\times e+b\times c+b\times d+b\times e$

通常我們也會將符號或係數分開，只寫出係數作運算，這樣計算上比較簡單。

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $-x(2x+5)$　(2) $x(2x^2-x+3)$　(3) $(3x^2-2x+1)\times 2x$

解　：(1) $-x(2x+5)=(-x)\times 2x+(-x)\times 5$

$=-2x^2-5x$

(2) $x(2x^2-x+3)=x\times(2x^2)-x\times(x)+x\times 3$

$=2x^3-x^2+3x$

(3) $(3x^2-2x+1)\times 2x=3x^2\times 2x-2x\times 2x+1\times 2x$

$=6x^3-4x^2+2x$

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $(x+3)(x+2)$　(2) $(x-2)(x+3)$ 。

解　：(1) $(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)$

$=x^2+2x+3x+6$

$=x^2+5x+6$

(2) $(x-2)(x+3)=x(x+3)-2(x+3)$

$=x^2+3x-2x-6$

$=x^2+x+6$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr} & & x & 3 \\ \times) & & x & 2 \\ \hline & & 2x & +6 \\ +) & x^2 & +3x & \\ \hline & x^2 & +5x & +6 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr} & & x & -2 \\ \times) & & x & 3 \\ \hline & & 3x & -6 \\ +) & x^2 & -2x & \\ \hline & x^2 & +\ x & -6 \end{array}$$

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

(1)

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & x^1 & x^0 \\ & & 1 & 3 \\ \times) & & 1 & 2 \\ \hline & & 2 & +6 \\ +) & 1 & +3 & \\ \hline & 1 & +5 & +6 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & x^1 & x^0 \\ & & 1 & -2 \\ \times) & & 1 & 3 \\ \hline & & 3 & -6 \\ +) & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & +1 & +6 \end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

(1) $(2x-3)(3x-5)$　(2) $(x+6)(3x-4)$

解　：(1) $(2x-3)(3x-5)=2x(3x-5)-3(3x-5)$

$=6x^2-10x-9x+15$

$=6x^2-19x+15$

(2) $(x+6)(3x-4)=x(3x-4)+6(3x-4)$

$=3x^2-4x+18x-24$

$=3x^2+14x-24$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

(1)
$$\begin{array}{rrrr}
 & & 2x & -3 \\
\times) & & 3x & -5 \\ \hline
 & & -10x & +15 \\
+) & 6x^2 & -9x & \\ \hline
 & 6x^2 & -19x & +15
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrr}
 & & x & 6 \\
\times) & & 3x & -4 \\ \hline
 & & -4x & -24 \\
+) & 3x^2 & +18x & \\ \hline
 & 3x^2 & +14x & -24
\end{array}$$

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

(1)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 2 & -3 \\
\times) & & 3 & -5 \\ \hline
 & & -10 & +15 \\
+) & 6 & -9 & \\ \hline
 & 6 & -19 & +15
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & 6 \\
\times) & & 3 & -4 \\ \hline
 & & -4 & -24 \\
+) & 3 & +18 & \\ \hline
 & 3 & +14 & -24
\end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開$(x+1)\times(3x+7)\times(2x-4)$。

解　：　$(x+1)\times(3x+7)\times(2x-4)$

$=[x(3x+7)+(3x+7)]\times(2x-4)$

$=[3x^2+7x+3x+7]\times(2x-4)$

$=(3x^2+10x+7)\times(2x-4)$

$=2x(3x^2+10x+7)-4(3x^2+10x+7)$

$=6x^3+20x^2+14x-12x^2-40x-28$

$=6x^3+8x^2-26x-28$

【範例】：利用乘法運算展開$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$。

解　：　$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$

$= x^2\ (2x+1)-2x\ (2x+1)+(2x+1)$

$= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1$

$= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1$

$= 2x^3-3x^2+1$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{lrrrr}
 & & x^2 & x & 2 \\
\times) & & & x & -3 \\
\hline
 & & -3x^2 & -3x & -6 \\
+) & x^3 & x^2 & +2x & \\
\hline
 & x^3 & -2x^2 & -\ x & -6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
\times) & & & 1 & -3 \\
\hline
 & & -3 & -3 & -6 \\
+) & 1 & 1 & +2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & -6
\end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$。

解　：　$(2x+1)\times(x^2-2x+1)$

$= x^2\ (2x+1)-2x\ (2x+1)+(2x+1)$

$= 2x^3+x^2-4x^2-2x+2x+1$

$= 2x^3+(1-4)x^2+(-2+2)x+1$

$= 2x^3-3x^2+1$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{lrrrr}
 & & x^2 & -2x & +1 \\
\times) & & & 2x & +1 \\
\hline
 & & +x^2 & -2x & +1 \\
+) & 2x^3 & -4x^2 & +2x & \\
\hline
 & 2x^3 & -3x^2 & & +1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & & 1 & -2 & +1 \\
\times) & & & 2 & +1 \\
\hline
 & & +1 & -2 & +1 \\
+) & 2 & -4 & +2 & \\
\hline
 & 2 & -3 & 0 & +1
\end{array}$$

**【範例】**：若 $x^2+x+1=0$，則多項式 $(x^2+x-2)^2+3(x^2+x-2)^2+2$ 之值為：

**解**　：　$\because x^2+x+1=0$　，　$\therefore x^2+x=-1$。

$$\Rightarrow\ (x^2+x-2)^3+7(x^2+x+3)^2+2=(-1-2)^3+7(-1+3)^2+2$$

$$=(-3)^3+7(2)^2+2=-27+28+2=3$$

**【範例】**：設利用乘法公式展開 $(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ 得展開式為

$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-1$，其中 $a$、$b$、$c$、$d$ 恰有一個為負數，

此負數為：

**解**　：

$$(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$$

$$=(x^3-x^2+x-1)(x^2+x+1)$$

$$=x^5-x^4+x^3-x^2+x^4-x^3+x^2-x+x^3-x^2+x-1$$

$$=x^5+0x^4+x^3-x^2+0x-1=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-1$$

$$\Rightarrow\ a=0,b=1,c=-1,d=0$$

**【範例】**：設 $A$、$B$ 為兩多項式且 $A+B=3x^3-x^2-x+1$，$A-B=x^3+3x^2-x+5$，

則 $2A-4B$ 為何？

**解**　：

$$\begin{cases} A+B=3x^3-x^2-x+1 & \Lambda\ (1) \\ A-B=x^3+3x^2-x+5 & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

由 $(1)-(2)$ 可得

$$2A=4x^3+2x^2-2x+6\Rightarrow A=2x^3+x^2-x+3$$

$$\Rightarrow B=(3x^3-x^2-x+1)-(2x^3+x^2-x+3)=x^3-2x^2-2$$

$$\therefore\ 2A-4B=2(A-2B)=2[(2x^3+x^2-x+1)-2(x^3-2x^2-2)]=2(5x^2-x+7)$$

$$=10x^2-2x+14$$

**【範例】**：在 $(x^3+3x^2-ax+4)(2x^2-4x+1)$ 的乘積展開式中，$x^2$ 項的係數為 $-9$，

則 $a=$？

**解**　：

$$3\times1+(-a)\times(-4)+4\times2=-9$$

$$\Rightarrow\ 3+4a+8=-9$$

$$\Rightarrow\ a=-5$$

**多項式的除法：**

在小學時，我們會以下面的長除法（直式計算法）來求出 58 除以 13 得到商數 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 13\,\overline{)\,58} \\ 52 \\ \hline 6 \end{array}$$

同時，我們也知道：$58=13\times4+6$。

事實上，在自然數的除法中，我們有下列的規則：

**被除數＝除數 × 商數＋餘數，**

其中，商數和餘數為非負整數，且餘數小於除數。

同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

**被除式＝除式 × 商式＋餘式，**

其中，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數。

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式計算法（長除法)。為了簡化計算，也常使用分離係數法。這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

**【範例】**：求$(x^2+x+1)\div x$的商式及餘式。

**解**　：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} x\ +1 \\ x\,\overline{)\,x^2+x+1} \\ x^2\qquad\ \ \\ \hline x+1 \\ x\quad\ \\ \hline 1 \end{array}$$

商式為$(x+1)$，餘式為 1。

$\because$ $(x^2+x+1)\div x=(x+1)\cdots\cdots1$，

$\therefore$ $(x^2+x+1)=x\cdot(x+1)+1$。

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} 1+1 \\ 1\,\overline{)\,1+1+1} \\ 1\qquad\ \ \\ \hline 1+1 \\ 1\quad\ \\ \hline 1 \end{array}$$

**【範例】**：求$(2x^4+0x^3-4x^2+0x+2)\div(x^2+0x-1)$的商式及餘式。

**解**　：步驟 a. 將原式改變成降冪排列，且缺項部分補零:

$$(2x^4+0x^3-4x^2+0x+2)\div(x^2+0x-1)$$

步驟 b.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \longrightarrow \text{首商} \\ \cline{2-2}
x^2+0x-1 & 2x^4+0x^3-4x^2+0x+2 \\
 & 2x^4+0x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -2x^2
\end{array}$$

步驟 c.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \qquad -2 \longrightarrow \text{次商} \\ \cline{2-2}
x^2+0x-1 & 2x^4+0x^3-4x^2+0x+2 \\
 & 2x^4+0x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -2x^2+0x+2 \\
 & \qquad\qquad -2x^2+0x+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

故可知$(-4x^2+2+2x^4)\div(-1+x^2) = 2x^2-2$ 。

**【範例】**：求$(6x^4+7x^3-x^2-5x-2) \div (2x^3+x^2-x-1)$的商式及餘式。

**解　**：

$$\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad 3x+2 \\ \cline{2-2}
2x^3+x^2-x-1 & 6x^4+7x^3-x^2-5x-2 \\
 & 6x^4+3x^3-3x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 4x^3+2x^2-2x-2 \\
 & \qquad\quad 4x^3+2x^2-2x-2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

故可知$(6x^4+7x^3-x^2-5x-2) \div (2x^3+x^2-x-1)$

的商式為 $3x+2$，餘式為 0。

**【範例】**：求$(x^2+4x+2) \div (x+1)$的商式及餘式。

**解　**：

方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r|l}
 & \qquad x+3 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^2+4x+2 \\
 & x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \qquad 3x+2 \\
 & \qquad 3x+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -1
\end{array}$$

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+3 \\ \cline{2-2}
1+1 & 1+4+2 \\
 & 1+1 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3+2 \\
 & \quad 3+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -1
\end{array}$$

商式為 $x+3$ ，餘式為$-1$。

**※注意**：在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述的概念來驗算。例如：

$(x+1)(x+3)+(-1)$　　（除式×商式＋餘式）

$= x^2+4x+3-1$

$= x^2+4x+2$　　（被除式）

【範例】：求$(2x^3+5x^2+x+5)\div(x+2)$的商式及餘式。

解　：方法一：直式計算法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x^2+x-1 \\
\hline
x+2 & 2x^3+5x^2+x+5 \\
 & 2x^3+4x^2 \\
\hline
 & \qquad\quad x^2+x \\
 & \qquad\quad x^2+2x \\
\hline
 & \qquad\qquad -x+5 \\
 & \qquad\qquad -x-2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 7
\end{array}
$$

方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2+1-1 \\
\hline
1+2 & 2+5+1+5 \\
 & 2+4 \\
\hline
 & \quad 1+1 \\
 & \quad 1+2 \\
\hline
 & \qquad -1+5 \\
 & \qquad -1-2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 7
\end{array}
$$

商式為$2x^2+x-1$，餘式為7。

【範例】：求$(3x^2+2)\div(2x-1)$的商式及餘式。

解　：因為$(3x^2+2)=3x^2+0\cdot x+2$，所以用$3+0+2$來表示$3x^2+2$。

方法一：直式計算法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad \frac{3}{2}x+\frac{3}{4} \\
\hline
2x-1 & 3x^2+0x+2 \\
 & 3x^2-\frac{3}{2}x \\
\hline
 & \qquad \frac{3}{2}x+2 \\
 & \qquad \frac{3}{2}x-\frac{3}{4} \\
\hline
 & \qquad\qquad 2\frac{3}{4}
\end{array}
$$

方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{3}{2}+\frac{3}{4} \\
\hline
2-1 & 3+0+2 \\
 & 3-\frac{3}{2} \\
\hline
 & \quad \frac{3}{2}+2 \\
 & \quad \frac{3}{2}-\frac{3}{4} \\
\hline
 & \qquad 2\frac{3}{4}
\end{array}
$$

商式為$\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$，餘式為－$2\frac{3}{4}$。

【範例】：求$(x^3+2x^2-3x+2)\div(x^2+x+1)$的商式及餘式。

解　：方法一：直式計算法

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x+1 \\
\hline
x^2+x+1 & x^3+2x^2-3x+2 \\
 & x^3+x^2+x \\
\hline
 & \qquad x^2-4x+2 \\
 & \qquad x^2+x+1 \\
\hline
 & \qquad\quad -5x+1
\end{array}
$$

方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 1 & +1 & & \\
\hline
1+1+1 & 1 & +2 & -3 & +2 \\
 & 1 & +1 & +1 & \\
\hline
 & & 1 & -4 & +2 \\
 & & 1 & +1 & +1 \\
\hline
 & & & -5 & +1
\end{array}
$$

所以$(x^3+2x^2-3x+2)\div(x^2+x+1)$的商式是$(x+1)$，餘式是$(-5x+1)$。

【範例】：一數學題「兩多項式$A$、$B$；$B$為$x^2+x+1$，試求$A\div B$。」，某生誤將「$A\div B$」看成「$A+B$」，結果求出答案為「$x^3+x^2+x$」，則$A\div B$正確的答案為何？

解　：　$\because A+(x^2+x+1)=x^3+x^2+x$

$\therefore A=(x^3+x^2+x)-(x^2+x+1)=x^3-1$

即$A\div B=(x^3-1)\div(x^2+x+1)=x-1$。

【範例】：一數學題「兩多項式$A$、$B$；$B$為$2x^2+x-1$，試求$A-B$。」，某生誤將「$A-B$」看成「$A+B$」，結果求出的答案為「$5x^2-3x-7$」，則$A-B$的正確答案為何？

解　：　$\because A+B=5x^2-3x-7$，$A+(2x^2+x-1)=5x^2-3x-7$

$\Rightarrow\ A=(5x^2-3x-7)-(2x^2+x-1)=3x^2-4x-6$

$\therefore A-B=(3x^2-4x-6)-(2x^2+x-1)=x^2-5x-5$

【範例】：多項式$\dfrac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4}-(8x^7+9x^4+2x-8)$是多少次式

解　：$\because (x^2-x+1)^5$為10次式、$(x^3+1)^2$為6次式、$(5x^2+x+1)^4$為8次式

$\therefore \dfrac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4}$為$10+6-8=8$次式，而$(8x^7+9x^4+2x-8)$為7次式。

$\therefore \dfrac{(x^2-x+1)^5(x^3+1)^2}{(5x^2+x+1)^4}-(8x^7+9x^4+2x-8)$為8次式

【範例】：$(x^3+4x^2-19)=(x^2+6x+12)\times f(x)+5$，則$f(x)$為何？

解　：$(x^2+6x+12)\times f(x)=(x^3+4x^2-19)-5=x^3+4x^2-24$

$\Rightarrow\ f(x)=\dfrac{x^3+4x^2-24}{(x^2+6x+12)}=x-2$

# 小　試　身　手

【例題一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

(1)$5x^2-3x+2$　　(2)$3x^2-7$。

答：(1) 最高次數為二次，

$x^2$的係數為 5，$x$的係數為$-3$，

常數項為 2。

(2) 最高次數為二次，

$x^2$的係數為 3，$x$的係數為 0，

常數項為$-7$。

【練習一】

寫出下列各式的最高次數，及其係數：

(1) $-7x^2-x+6$　　(2)$6x^2-15$。

答：(1) 最高次數為二次，

$x^2$的係數為$-7$，$x$的係數為$-1$，

常數項為 6。

(2) 最高次數為二次，

$x^2$的係數為 6，$x$的係數為 0，

常數項為$-15$。

【例題二】

以橫式化簡：

$(2x^2-3x+4)+(x^2+5x-2)$。

答：$(2x^2-3x+4)+(x^2+5x-2)$

$=2x^2-3x+4+x^2+5x-2$

$=3x^2+2x+2$

【練習二】

以橫式化簡：

$(4x^2-7x+10)+(2x^2-5)$。

答：$(4x^2-7x+10)+(2x^2-5)$

$=4x^2-7x+10+2x^2-5$

$=6x^2-7x+5$

【例題三】

利用直式及分離係數法：

化簡：$(x^3-2x^2+6)-(7x^2+3)$。

解：

直式：

$$\begin{array}{rr} & x^3-2x^2+0x+6 \\ -) & 7x^2+0x+3 \\ \hline & x^3-9x^2+0x+3 \end{array}$$

分離係數法：

$$\begin{array}{rr} & 1-2+0+6 \\ -) & 7+0+3 \\ \hline & 1-9+0+3 \end{array}$$

【練習三】

利用直式及分離係數法：

化簡：$(x^3-2x^2+6)+(7x^2+3)$。

解：

直式：

$$\begin{array}{rr} & x^3-2x^2+0x+6 \\ +) & 7x^2+0x+3 \\ \hline & x^3+5x^2+0x+9 \end{array}$$

分離係數法：

$$\begin{array}{rr} & 1-2+0+6 \\ +) & 7+0+3 \\ \hline & 1+5+0+9 \end{array}$$

【例題四】

設 $f(x)=2x^3+3x^2-4x+5$，$g(x)=x^4-3x^3+2x^2+x-3$，試求 $f(x)-g(x)$。

解：$f(x)-g(x)=(2x^3+3x^2-4x+5)-(x^4-3x^3+2x^2+x-3)$

$=2x^3+3x^2-4x+5-x^4+3x^3-2x^2-x+3$

$=-x^4+5x^3+x^2-5x+8$

【練習四】

設 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+10$，$g(x)=2x^4-7x^3+12x^2+5x-13$，試求 $f(x)+g(x)$。

解：$f(x)+g(x)=(4x^3-3x^2-6x+10)+(2x^4-7x^3+12x^2+5x-13)$

$=2x^4-3x^3+9x^2-x-3$

【例題五】

展開下列各式：

(1) $(2x-5)(x^2-3x+2)$。

(2) $(3x+1)(x^2+4x-1)$。

答：(1) $2x^3-11x^2+11x-10$

(2) $3x^3+13x^2+x-1$

【練習五】

展開下列各式：

(1) $(x^2-1)(2x^2-5x+3)$。

(2) $(2x^2-3)(x^3+2x^2-x+1)$。

答：(1) $2x^4-10x^3+x^2+5x-3$

(2) $2x^5+4x^4-5x^3-4x^2+3x-3$

【例題六】

求 $(x^2+4x+4)\div(x+1)$ 的商式及餘式。

解：∴ 商式 $=x+3$

餘式 $=1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+3 \\
\hline
1+1 & 1+4+4 \\
 & 1+1 \\
\hline
 & \quad 3+4 \\
 & \quad 3+3 \\
\hline
 & \qquad\ 1
\end{array}
$$

【練習六】

求 $(3x^2+5x+7)\div(2x+1)$ 的商式及餘式。

解：∴ 商式 $=\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$，　餘式 $=\frac{21}{4}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{3}{2}+\frac{7}{4} \\
\hline
2+1 & 3+5+7 \\
 & 3+\frac{3}{2} \\
\hline
 & \quad \frac{7}{2}+7 \\
 & \quad \frac{7}{2}+\frac{7}{4} \\
\hline
 & \qquad \frac{21}{4}
\end{array}
$$

【例題七】

設 $A$ 為多項式，且知 $\dfrac{x^2+3x+3}{A}=(x+2)+\dfrac{1}{A}$，求 $A$。

解： $\because\ A\times\dfrac{x^2+3x+3}{A}=A\times〔(x+2)+\dfrac{1}{A}〕$

$\therefore\ x^2+3x+3=A(x+2)+1$

$\therefore\ x^2+3x+2=A(x+2)$

$\therefore\ A=(x^2+3x+2)\div(x+2)=x+1$

答： $A=x+1$。

【練習七】

設 $A$ 為多項式，且知 $\dfrac{2x^3-4}{A}=(x^2+x+1)-\dfrac{2}{A}$，求 $A$。

解： $\because\ A\times\dfrac{2x^3-4}{A}=A\times〔(x^2+x+1)-\dfrac{2}{A}〕$

$\therefore\ 2x^3-4=A(x^2+x+1)-2$

$\therefore\ 2x^3-2=A(x^2+x+1)$

$\therefore\ A=(2x^3-2)\div(x^2+x+1)=2x-2$

答： $A=2x-2$。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-2 \\ \hline
x^2+x+1 & 2x^3+0x^2+0x-2 \\
 & 2x^3+2x^2+2x \\ \hline
 & -2x^2-2x-2 \\
 & -2x^2-2x-2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

【例題八】

若 $3x^3-2x^2+ax+12$ 能被 $x^2-2x+b$ 整除，試求 $a$ 和 $b$ 之值。

解： $\therefore\ a-3b+8=0$， $12=4b$

$\therefore\ b=3$， $a=1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+4 \\ \hline
x^2-2x+b & 3x^3-2x^2+ax+12 \\
 & 3x^3-6x^2+3bx \\ \hline
 & 4x^2+(a+3b)x+12 \\
 & 4x^2-8x+4b \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

【練習八】

若 $4x^3+8x^2+ax+3$ 能被 $2x^2+x+b$ 整除，試求 $a$ 和 $b$ 之值。

解： $\therefore\ a-2b=3$， $3=3b$

$\therefore\ b=1$，$a=5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \\ \hline
2x^2+x+b & 4x^3+8x^2+ax+3 \\
 & 4x^3+2x^2+2bx \\ \hline
 & 6x^2+(a-2b)x+3 \\
 & 4x^2+3x+3b \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

【例題九】

若$(2x^2+x-4)-B=8x^2-2x+2$，求B

的值。

解：∵ $B=(2x^2+x-4)-(8x^2-2x+2)$

∴ $B=2x^2+x-4-8x^2+2x-2$

$B=-6x^2+3x-6$

答： $B=-6x^2+3x-6$。

【練習九】

若$(x^2+5x-2)-B=2x^2-6x-7$，求B的值。

解： ∵ $B=(x^2+5x-2)-(2x^2-6x-7)$

∴ $B=x^2+5x-2-2x^2+6x+7$

$B=-x^2+11x+5$

$B=-x^2+11x+5$。