平方根與立方根

平方根

國小學過「正方形的面積＝邊長×邊長」，可以表示成「正方形的面積＝邊長的平方」或寫成「正方形的面積＝(邊長)^2」。因此只要知道正方形的邊長就可以算出它的面積。如果反過來問，只知道正方形的面積，我們能不能算出正方形的邊長呢？

例如：邊長是 4 公分的正方形，面積是 16 平方公分。反過來說，面積是 16 平方公分的正方形，則邊長是 4 公分。試問正方形面積是 20 平方公分，我們要如何求出其邊長呢？這就是我們這一節所要學的平方根。

1. <u>認識平方根</u>：

我們知道 $6^2=36$，$11^2=121$……，那麼多少的平方等於 49 呢？

倒過來給定一數 a，如果有一數 x 會使得 $x^2=a$，則此 x 稱為 a 的平方根。

例如：我們給一個數為 49，那麼那些 x 滿足 $x^2=49$ 呢？

我們知道 $x=7$ 或是 $x=-7$ 滿足 $x^2=49$，在此 7 與 -7 我們稱為 49 的平方根。

【範例】：求下列各數的平方根：

(1) 100　(2) 81　(3) 10　(4) 15。

解：(1) $10^2=10\times10=100$，$(-10)^2=(-10)\times(-10)=100$，

故 100 的平方根為 ±10。

(2) $9^2=9\times9=81$，$(-9)^2=(-9)\times(-9)=81$，故 81 的平方根為 ±9。

(3) $10=1\times10=2\times5$，在此我們無法利用學過的，相同的兩個整數相乘為 10。

所以 10 的平方根要利用『根號』來表示。

(4) $15=1\times15=3\times5$，在此我們無法利用學過的，相同的兩個整數相乘為 15。

所以 15 的平方根要利用『根號』來表示。

【範例】：列出 1 到 18 的平方根。

解：

1 $\longrightarrow$ 1×1，$(-1)\times(-1)$，故 1 的平方根為 ±1。

2 $\longrightarrow$

3 $\longrightarrow$

4 $\longrightarrow$ 2×2，$(-2)\times(-2)$，故 4 的平方根為 ±2。

5 $\longrightarrow$

6 $\longrightarrow$

7 $\longrightarrow$

8 $\longrightarrow$

9 $\longrightarrow$ 3×3，(-3)×(-3)，故 9 的平方根為±3。
10 $\longrightarrow$
11 $\longrightarrow$
12 $\longrightarrow$
13 $\longrightarrow$
14 $\longrightarrow$
15 $\longrightarrow$
16 $\longrightarrow$ 4×4，(-4)×(-4)，故 16 的平方根為±4。
17 $\longrightarrow$
18 $\longrightarrow$

2.平方根的意義：

（1）平方根：

設a、x 都是實數,若$x^2=a$，則x就叫做a的平方根，一般我們有兩個x會滿足$x^2=a$分別以$x=\pm\sqrt{a}$來表示，讀作x等於正負根號a。

例如： 9 的平方根為±3。　　10 的平方根為$\pm\sqrt{10}$。
15 的平方根為$\pm\sqrt{15}$。　　16 的平方根為±4。

（2）平方根的表示法：

a. $\sqrt{a}$(讀做根號a)表示正數a的正平方根。
b. $-\sqrt{a}$ (讀做負根號a)表示正數a的負平方根。
c. 零的平方還是為零，所以零的平方根以$\sqrt{0}$(讀做根號零)表示，即$\sqrt{0}=0$。
d. $\sqrt{a}$為一個整數，則a為完全平方數。也就是$a=x^2$，其中x為整數，
則稱a為完全平方數。

【範例】：列出 1 到 25 的平方根。

解：

1 $\longrightarrow$ ±1。
2 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$；$(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})=2$。
3 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$；$(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})=3$。
4 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{4}=\pm2$，4 為完全平方數。
5 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{5}$，$\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$；$(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{5})=5$。
6 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{6}$，$\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$；$(-\sqrt{6})\times(-\sqrt{6})=6$。
7 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{7}$，$\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$；$(-\sqrt{7})\times(-\sqrt{7})=7$。
8 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{8}$，$\sqrt{8}\times\sqrt{8}=8$；$(-\sqrt{8})\times(-\sqrt{8})=8$。
9 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{9}=\pm3$，9 為完全平方數。
10 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{10}$，$\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$；$(-\sqrt{10})\times(-\sqrt{10})=10$。
11 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{11}$，$\sqrt{11}\times\sqrt{11}=11$；$(-\sqrt{11})\times(-\sqrt{11})=11$。

12 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{12}$，$\sqrt{12}\times\sqrt{12}=12$；$(-\sqrt{12})\times(-\sqrt{12})=12$。

13 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{13}$，$\sqrt{13}\times\sqrt{13}=13$；$(-\sqrt{13})\times(-\sqrt{13})=13$。

14 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{14}$，$\sqrt{14}\times\sqrt{14}=14$；$(-\sqrt{14})\times(-\sqrt{14})=14$。

15 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{15}$，$\sqrt{15}\times\sqrt{15}=15$；$(-\sqrt{15})\times(-\sqrt{15})=15$。

16 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{16}=\pm4$，16 為完全平方數。

17 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{17}$，$\sqrt{17}\times\sqrt{17}=17$；$(-\sqrt{17})\times(-\sqrt{17})=17$。

18 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{18}$，$\sqrt{18}\times\sqrt{18}=18$；$(-\sqrt{18})\times(-\sqrt{18})=18$。

19 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{19}$，$\sqrt{19}\times\sqrt{19}=19$；$(-\sqrt{19})\times(-\sqrt{19})=19$。

20 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{20}$，$\sqrt{20}\times\sqrt{20}=20$；$(-\sqrt{20})\times(-\sqrt{20})=20$。

21 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{21}$，$\sqrt{21}\times\sqrt{21}=21$；$(-\sqrt{21})\times(-\sqrt{21})=21$。

22 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{22}$，$\sqrt{22}\times\sqrt{22}=22$；$(-\sqrt{22})\times(-\sqrt{22})=22$。

23 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{23}$，$\sqrt{23}\times\sqrt{23}=23$；$(-\sqrt{23})\times(-\sqrt{23})=23$。

24 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{24}$，$\sqrt{24}\times\sqrt{24}=24$；$(-\sqrt{24})\times(-\sqrt{24})=24$。

25 $\longrightarrow$ $\pm\sqrt{25}=\pm5$，25 為完全平方數。

【範例】：常用的完全平方數列表：

$(\pm1)^2=1$，1 的平方根為±1。	$(\pm11)^2=121$，121 的平方根為±11。
$(\pm2)^2=4$，4 的平方根為±2。	$(\pm12)^2=144$，144 的平方根為±12。
$(\pm3)^2=9$，9 的平方根為±3。	$(\pm13)^2=169$，169 的平方根為±13。
$(\pm4)^2=16$，16 的平方根為±4。	$(\pm14)^2=196$，196 的平方根為±14。
$(\pm5)^2=25$，25 的平方根為±5。	$(\pm15)^2=225$，225 的平方根為±15。
$(\pm6)^2=36$，36 的平方根為±6。	$(\pm16)^2=256$，256 的平方根為±16。
$(\pm7)^2=49$，49 的平方根為±7。	$(\pm17)^2=289$，289 的平方根為±17。
$(\pm8)^2=64$，64 的平方根為±8。	$(\pm18)^2=324$，324 的平方根為±18。
$(\pm9)^2=81$，81 的平方根為±9。	$(\pm19)^2=361$，361 的平方根為±19。
$(\pm10)^2=100$，100 的平方根為±10。	$(\pm20)^2=400$，400 的平方根為±20。

【範例】：利用質因數分解求下列各數的平方根：

(1) 169　(2) 324　(3) 0

解：(1) $169=13\times13$

169 的平方根為 $\pm\sqrt{169}=\pm\sqrt{13\times13}=\pm13$。

(2) $324=2^2\times3^4=(3^2\times2)\times(3^2\times2)=18\times18$

324 的平方根為 $\pm\sqrt{324}=\pm\sqrt{18\times18}=\pm18$。

(3) 0 的平方根為 $\pm\sqrt{0}=0$。

【範例】：下列那些是完全平方數：24、25、37、100、121、256、300、400。

解　：$\sqrt{24}=\sqrt{2\times2\times2\times3}=2\sqrt{2\times3}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{25}=\sqrt{5\times5}=5$

$\sqrt{37}$，37 為質數不能再分解

$\sqrt{100}=\sqrt{10\times10}=10$

$\sqrt{121}=\sqrt{11\times11}=11$

$\sqrt{256}=\sqrt{16\times16}=16$

$\sqrt{300}=\sqrt{10\times10\times3}=10\sqrt{3}$

$\sqrt{400}=\sqrt{10\times10\times2\times2}=20$

所以完全平方數有：25、100、121、256、400。

【範例】：利用質因數分解求下列各數的平方根：

（1）98　（2）72　（3）$\frac{4}{9}$　（4）$\frac{121}{144}$

解　：（1）$98=7\times7\times2=7\times7\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(7\sqrt{2})\times(7\sqrt{2})=(-7\sqrt{2})\times(-7\sqrt{2})$，

所以 98 的平方根為$\pm7\sqrt{2}$。

（2）$72=2\times2\times2\times3\times3=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\times2\times3\times3=(2\times3\times\sqrt{2})\times(2\times3\times\sqrt{2})$

$=(6\sqrt{2})\times(6\sqrt{2})=(-6\sqrt{2})\times(-6\sqrt{2})$，

所以 72 的平方根為$\pm6\sqrt{2}$。

（3）$\frac{4}{9}$的平方根為$\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\sqrt{\frac{2\times2}{3\times3}}=\pm\frac{2}{3}$

（4）$\frac{121}{144}$的平方根為$\pm\sqrt{\frac{121}{144}}=\pm\sqrt{\frac{11\times11}{12\times12}}=\pm\frac{11}{12}$

（3）負數沒有實數的平方根。

【範例】：-4 沒有平方根。若 x 為-4 的平方根，則 $x^2=-4$(不可能)，故-4 沒有平方根。

【註】：$\sqrt{-4}$ 在國中的課程中我們不考慮，我們只考慮$\sqrt{x}$，其中 $x\geqq0$。

（4）設 a 是實數，則$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\text{, 當}a>0\\-a\text{, 當}a<0\\0\text{, 當}=0\end{cases}$。

也就是在此 $x\geqq0$，則我們有$\sqrt{x}\geqq0$。

【範例】：$\sqrt{(-9)^2}=|-9|=-(-9)=9$，

$\sqrt{(-12)^2}=|-12|=-(-12)=12$。

$\sqrt{(25)^2}=|25|=25$。

【範例】： $\sqrt{(x-3)}+\sqrt{(y-4)}=0$， 則 $\sqrt{(x-3)}=0$，$\sqrt{(y-4)}=0$

$\because\ \sqrt{(x-3)}\geqq 0$，$\sqrt{(y-4)}\geqq 0$

$\therefore\ \sqrt{(x-3)}=0$，$\sqrt{(y-4)}=0$

$\therefore\ x-3=0$，$y-4=0$。

即 $x=3$，$y=4$。

（5）特殊的"無理數" $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$：

$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，經常使用，請同學熟記。

注意：$14=2\times7=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}$

$=(\sqrt{2}\times\sqrt{7})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{7})$

$=(-\sqrt{2}\times\sqrt{7})\times(-\sqrt{2}\times\sqrt{7})$

14 的平方根為 $\pm\sqrt{2}\times\sqrt{7}$，

前面也有提到 14 的平方根為 $\pm\sqrt{14}$，所以 $\pm\sqrt{14}=\pm\sqrt{2\times7}=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{7}$。

詳細的平方根號運算規則，我們在下個部份介紹。

3. 平方根運算常用公式：

（1）$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。$(a\geq 0, b\geq 0)$

$\because\ (\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})$

$\therefore(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=a\times b=ab\quad\therefore\ \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

（2）$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。$(a\geq 0, b>0)$

$\because\ \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{a}{b}\quad\therefore\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

（3）$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$。$(a\geq 0, b>0)$

【範例】：$\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{6\times2}=\sqrt{12}$。

【範例】：$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$。

【範例】：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2\times7}}{\sqrt{7^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$。

4. 最簡根式：

一個二次方根，根號內的數，其因數不再含有大於 1 的完全平方數，且分母不含根號，即無法再進一步化簡，此種方根叫做最簡根式。

例如：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ 不是最簡根式，$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ 是最簡根式。

【範例】：$\sqrt{18}$ 與 $3\sqrt{2}$ 那個為最簡根式？

解　：$\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$ 即為 $\sqrt{18}$ 的最簡根式。

∴ 答：$3\sqrt{2}$ 為最簡根式。

【範例】：判斷下列何者為最簡根式：

（1）$\sqrt{\dfrac{64}{289}}$　（2）$\sqrt{34}$　（3）$\sqrt{68}$　（4）$\sqrt{252}$

解　：（1）$\sqrt{\dfrac{64}{289}}=\dfrac{8}{17}$　（2）$\sqrt{34}=\sqrt{2\times 17}$

（3）$\sqrt{68}=2\sqrt{17}$　（4）$\sqrt{252}=6\sqrt{7}$

∴ 答：$\sqrt{34}$ 為最簡根式。

【範例】：化簡下列各式：

（1）$\sqrt{125}$　（2）$\sqrt{48}$　（3）$\sqrt{216}$　（4）$\sqrt{\dfrac{16}{27}}$。

解　：（1）$\sqrt{125}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}$。

（2）$\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times 3}=4\sqrt{3}$。

（3）$\sqrt{216}=\sqrt{6^2\times 6}=6\sqrt{6}$。

（4）$\sqrt{\dfrac{16}{27}}=\sqrt{\dfrac{4^2}{3^2\times 3}}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3\times 3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$。

5. 平方根四則運算：平方根四則運算的結果務必化為最簡方根

同類根號：兩個或兩個以上的根式，經化簡後它們根號內的數相同，且開方次數也相同，此種根號叫做同類方根或同類根號，否則為不同類根號。同類根號一定是同次根號，同類根式可以做加、減、乘、除運算。

例如：$2\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{2}$ 都有 $\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{2}$ 是同類根號。

例如：$2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{5}$ 其根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{5}$ 不是同類根號。

【範例】：判斷下列何者為同類根號：

(1) $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{12}$ 與 $3\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{6}$ 與 $\sqrt{24}$ 。

解　：(1) $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 其根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 不是同類根號。

(2) $\because \sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ，$\therefore \sqrt{12}$ 與 $3\sqrt{3}$ 是同類根號。

(3) $\because \sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ，$\therefore \sqrt{6}$ 與 $\sqrt{24}$ 是同類根號。

【範例】：判斷下列何者為同類根號：$\sqrt{32}$，$\sqrt{42}$，$\sqrt{48}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{75}$ 。

解　：$\because$ $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，$\sqrt{42}=\sqrt{2\times3\times7}$，$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$，$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ 。

$\therefore$ $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$，$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$，為同類根號。

(1) 根號的加減運算：

先將方根化為最簡方根，再將同類根號的最簡方根作加減運算，即對最簡方根的係數作加減即可。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$　(2) $4\sqrt{3}-\sqrt{12}$ 。

解　：(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4\times2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

答：$\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}$ 。

(2) $4\sqrt{3}-\sqrt{12}=4\sqrt{3}-\sqrt{4\times3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

答：$4\sqrt{3}-\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{48}+\sqrt{75}$　(2) $2\sqrt{7}-3\sqrt{63}$

解　：(1) $\sqrt{48}+\sqrt{75}=\sqrt{16\times3}+\sqrt{25\times3}=4\sqrt{3}+5\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

答：$\sqrt{48}+\sqrt{75}=9\sqrt{3}$ 。

(2) $2\sqrt{7}-3\sqrt{63}=2\sqrt{7}-3\sqrt{9\times7}=2\sqrt{7}-3\times3\sqrt{7}=2\sqrt{7}-9\sqrt{7}=-7\sqrt{7}$

答：$2\sqrt{7}-3\sqrt{63}=-7\sqrt{7}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{48}+\sqrt{12}=$？

解　：$\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{48}+\sqrt{12}=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$=(2+5)\sqrt{2}-(4-2)\sqrt{3}$

$=7\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{18}+\sqrt{125}+\sqrt{8}-\sqrt{20}=$？

解　：$\sqrt{18}+\sqrt{125}+\sqrt{8}-\sqrt{20}=3\sqrt{2}+5\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

$=(3+2)\sqrt{2}+(5-2)\sqrt{5}$

$=5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ 。

【範例】：化簡 $\sqrt{16}+\sqrt{100}-\sqrt{25}-\sqrt{\dfrac{1}{9}}=$？

解　：$\sqrt{16}+\sqrt{100}-\sqrt{25}-\sqrt{\dfrac{1}{9}}=4+10-5-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$ 。

【範例】：化簡 $3\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}=$？

解　：$3\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$ 。

(2) 根號的乘除法運算及有理化：

1. $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=a\times c\sqrt{b\times d}$ ，($b\geq 0$，$d\geq 0$)。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}$　(2) $2\sqrt{6}\times\sqrt{27}$

解　：(1) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}=2\times 3\sqrt{3\times 2}=6\sqrt{6}$

(2) $2\sqrt{6}\times\sqrt{27}=2\sqrt{6}\times 3\sqrt{3}=2\times 3\sqrt{6\times 3}=6\sqrt{18}=6\times 3\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

【範例】：化簡 $\sqrt{16}\times\sqrt{8}\times\sqrt{\dfrac{1}{6}}=$？

解　：$\sqrt{16}\times\sqrt{8}\times\sqrt{\dfrac{1}{6}}=4\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{4\sqrt{12}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

2. $m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=m\sqrt{a}\times\dfrac{1}{n\sqrt{b}}=\dfrac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}$ ，($a\geq 0$，$b>0$，m、n 為實數)。

有理化：使分母不含根號，且分子為最簡根式，此過程即為分母有理化。

通常我們會將 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 給有理化：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$ ，($a\geq 0$，$b>0$)。

【範例】：化簡下列各平方根：(1) $\sqrt{3}\div\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}$　(3) $3\sqrt{5}\div 2\sqrt{6}$ 。

解　：(1) $\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 。

(2) $\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{18}}{2\times 3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(3) $3\sqrt{5}\div 2\sqrt{6}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{5\times 6}}{2\times 6}=\dfrac{3\sqrt{30}}{12}=\dfrac{\sqrt{30}}{4}$ 。

【範例】：求解 $3\sqrt{8}x=2\sqrt{3}$

解　：$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【範例】：化簡 $\sqrt{125}\times\sqrt{75}\div\sqrt{54}=$？

解　：$\sqrt{125}\times\sqrt{75}\div\sqrt{54}=5\sqrt{5}\times5\sqrt{3}\div3\sqrt{6}=\dfrac{25}{3}\sqrt{\dfrac{15}{6}}=\dfrac{25\sqrt{10}}{6}$

【範例】：化簡 $\dfrac{1}{2}\sqrt{48}-5\sqrt{\dfrac{1}{3}}=$？

解　：$\dfrac{1}{2}\sqrt{48}-5\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}-5\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【範例】：化簡 $\dfrac{1}{3}\sqrt{72}-\sqrt{4\dfrac{1}{6}}=$？

解　：$\dfrac{1}{3}\sqrt{72}-\sqrt{4\dfrac{1}{6}}=\dfrac{1}{3}\times6\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{25}{6}}=2\sqrt{2}-5\sqrt{\dfrac{6}{6\times6}}=2\sqrt{2}-\dfrac{5}{6}\sqrt{6}=\dfrac{12\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{6}$

【範例】：化簡 $\sqrt{20}\times\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{3}=$？

解　：$\sqrt{20}\times\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{3}=\sqrt{20\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{10}{3}$

【範例】：化簡 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}\div\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}}=$？

解　：$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}\div\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\dfrac{5}{18}\times\dfrac{2}{9\times5}\times\dfrac{15}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{36}$

【範例】：化簡 $\sqrt{36}\div\sqrt{2}\div\sqrt{6}\div\sqrt{1\dfrac{1}{2}}=$？

解　：$\sqrt{36}\div\sqrt{2}\div\sqrt{6}\div\sqrt{1\dfrac{1}{2}}=\sqrt{36\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2}$

【範例】：將 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 化成 $\sqrt{2}+1$。

解　：利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

【範例】：將$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$有理化。

解　：　利用乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$ 。

【範例】：將$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$有理化。

解　：　利用乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$ 。

6. 商高定理：

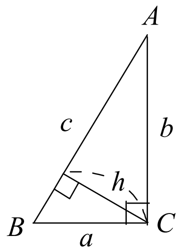
若有一個直角三角形三邊長為a、b、c，其中c為斜邊，則：$c^2=a^2+b^2$

如右圖，△ABC 中，∠C＝90^o，

則：(1) 斜邊$c=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) 一股$a=\sqrt{c^2-b^2}$

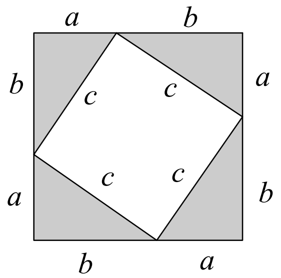
(3) 另一股$b=\sqrt{c^2-a^2}$



直角三角形斜邊上的高＝$\dfrac{\text{兩股長的乘積}}{\text{斜邊長}}\rightarrow h=\dfrac{a\times b}{c}$ 。

【範例】：如右圖，試利用面積公式推導出商高定理。

解　：中間的正方形面積＝c^2



$c^2=(a+b)^2-4\times a\times b\times\dfrac{1}{2}$

$=a^2+2ab+b^2-2ab$

$=a^2+b^2$

因此可推得商高定理：$a^2+b^2=c^2$ 。

【範例】：請利用商高定理，判斷下列各組，哪些組為直角三角形？

(1) 3、4、5　(2) 4、5、6　(3) 6、8、10 。

解　：(1) $5^2=3^2+4^2$，∴ 3、4、5 為直角三角形的三邊長。

(2) $6^2\neq4^2+5^2$，∴ 4、5、6 不是直角三角形的三邊長。

(3) $10^2=6^2+8^2$，∴ 6、8、10 為直角三角形的三邊長。

【範例】：若直角三角形的兩股長分別為 1、1，那斜邊長為多少？

解　：利用商高定理：斜邊 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ 斜邊 $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　　答：斜邊長為 $\sqrt{2}$。

【範例】：設直角三角形的三邊長為 8、15、x，請問 x 為多少？

解　：(1) 當 x 為斜邊時，$x=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17$

(2) 當 x 為一股時，$x=\sqrt{15^2-8^2}=\sqrt{225-64}=\sqrt{161}$

答：$x=17$ 或 $\sqrt{161}$。

【範例】：直立在地面的竹竿，有一條繩子由竿頂垂下，繩子比竿子長 1 公尺，把繩子往竿底的地面外拉了 7 公尺後，繩子才拉直，求竿子的高度為多少公尺？

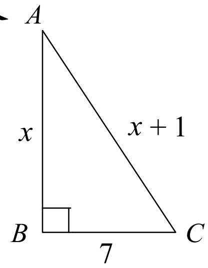
解　：設竿子的高度為 x 公尺，則繩子的長度為 $(x+1)$ 公尺

依題意可列式為：　$(x+1)^2=x^2+7^2$

$x^2+2x+1=x^2+49$

$2x=48$

$x=24$

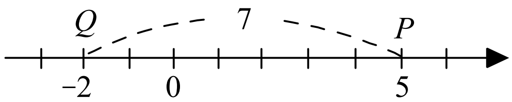


答：竿子的高度為 24 公尺。

7. **座標平面上兩點間的距離公式：**

在介紹座標平面上兩點間的距離公式之前，讓我們先來介紹利用絕對值來表示數線上兩點之間的距離。

【範例】：如圖，求出 $P(5)$ 和 $Q(-2)$ 是數線上的兩點，這兩點之間的距離為多少？



解　：$\because$ $5-(-2)=7$，$(-2)-5=-7$。

且 $|7|=|-7|=7$，

$\therefore$ $\overline{PQ}=|5-(-2)|=|(-2)-5|=7$。

則 P 與 Q 兩點的距離等於它們的座標差的絕對值。

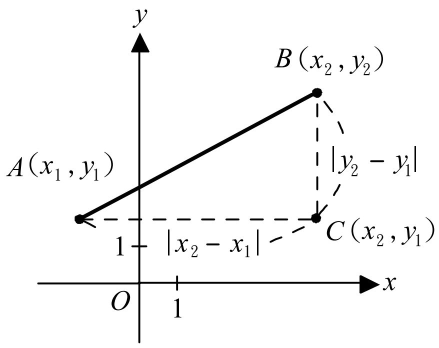
在上面的範例中，$P(a)$與$Q(b)$是一數線上的兩點，不論a、b是何數，P與Q兩點的距離都是等於它們的座標差的絕對值，即：

$$\overline{PQ}=|b-a|。$$

至於座標平面上任意兩點的距離與兩點的座標之間又有什麼關係呢？

以下就來討論座標平面上任意兩點的距離與兩點的座標之間的關係。

若$A(x_1，y_1)$和$B(x_2，y_2)$是座標平面上的兩點，從A、B分別作y軸與x軸的垂直線，設其交點為C，如圖所示：



因為△ABC是直角三角形，$\overline{AB}$為其斜邊，由商高定理可知：

$$(\overline{AB})^2=(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$$
$$=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

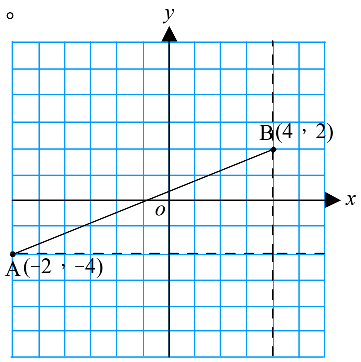
因為$\overline{AB}$是正數，所以：

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

這就是座標平面上兩點間的**距離公式**，此公式即使在$x_2=x_1$或$y_2=y_1$時也會成立。

【範例】：(1) 已知$A(-2，-6)$和$B(4，2)$兩點，求$\overline{AB}$的長。

(2) 已知$C(3，1)$和$D(4，-3)$兩點，求$\overline{CD}$的長。



解：(1) 由兩點距離公式可得知：

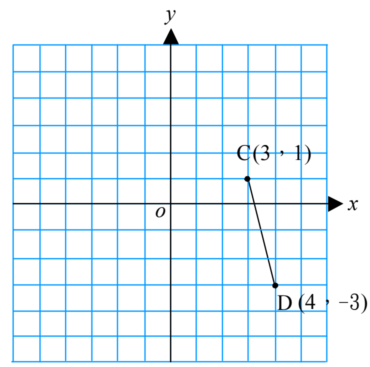
$$\overline{AB}=\sqrt{[4-(-2)]^2+[(2-(-6)]^2}$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}$$
$$=\sqrt{100}$$
$$=10$$

答：$\overline{AB}=10$。

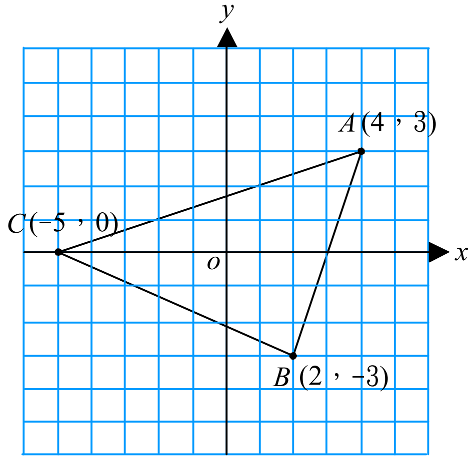
(2) 由兩點距離公式可得知：

$$\overline{CD}=\sqrt{(4-3)^2+[(-3)-1]^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{1+16}$$
$$=\sqrt{17}$$

答：$\overline{CD}=\sqrt{17}$。



【範例】：座標平面上有一個三角形，其三個頂點的座標為 $A(4，3)$、$B(2，-3)$、$C(-5，0)$，如下圖。請利用座標平面上兩點間的距離公式，分別求出三角形的三邊長為何？



解　：∵ $A(4，3)$、$B(2，-3)$，

∴由兩點距離公式可得知：

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+[(-3)-3]^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\text{。}$$

∵ $A(4，3)$、$C(-5，0)$，

∴由兩點距離公式可得知：

$$\overline{AC}=\sqrt{[(-5)-4]^2+(0-3)^2}=\sqrt{(-9)^2+(-3)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\text{。}$$

∵ $B(2，-3)$、$C(-5，0)$，

∴由兩點距離公式可得知：

$$\overline{BC}=\sqrt{[(-5)-2]^2+[0-(-3)]^2}=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$$

答：三邊長分別是 $\overline{AB}=2\sqrt{10}$，$\overline{AC}=3\sqrt{10}$，$\overline{BC}=\sqrt{58}$。

8. 方根的應用：

【範例】：$3x-5$ 的平方根是 ±7，則 x 是多少？

解　：∵ $3x-5=(\pm7)^2$

∴ $3x-5=49$

∴ $3x=54$

∴ $x=18$

【範例】：比較 $3\sqrt{5}$、$2\sqrt{7}$、$\sqrt{23}$ 之大小。

解　：∵ $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$

$2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\times7}=\sqrt{28}$

∴ $3\sqrt{5}>2\sqrt{7}>\sqrt{23}$

【範例】：(1) 如果$\sqrt{a}$為正整數且$a<30$，則$a=$？

(2) 如果$\sqrt{a}$為兩位數的正整數，則a的最小值＝？

(3) 承第(2)題，滿足$\sqrt{a}$為兩位正整數的a值共有幾個？

解　：(1) $\because \sqrt{a}$為正整數，$\therefore a$一定為完全平方數，

又 $\because a<30$，$\therefore a=1$，4，9，16，25。

(2) $\sqrt{a}=10$，$\therefore a=100$為最小值。

(3) $\because \sqrt{a}$為兩位數的正整數，

$\therefore \sqrt{a}$可能是 10，11，12，…，99。

則a值為 100，121，144，…，9801，

共有 99－10＋1＝90(個)。

答：(1) $a=1$，4，9，16，25　(2) a的最小值為 100　(3) 90(個)。

【範例】：設下列各方根之值為整數，求x的最小正整數值：

(1) $\sqrt{30x}$　　(2) $\sqrt{150x}$　　(3) $\sqrt{540x}$

解　：(1) $\because \sqrt{30x}=\sqrt{2\times3\times5\times x}$為整數，

$\therefore\ x=2\times3\times5=30$

(2) $\because \sqrt{150x}=\sqrt{2\times3\times5^2\times x}$為整數，

$\therefore\ x=2\times3=6$

(3) $\because \sqrt{540x}=\sqrt{2^2\times3^3\times5\times x}$為整數，

$\therefore\ x=3\times5=15$

答：(1) $x=30$　(2) $x=6$　(3) $x=15$。

9. 平方根的近似值計算：

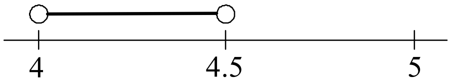
十分逼近法：利用“十等分”的方法在數線上逐步逼近根號內的數，這種逼近的方法叫做**十分逼近法**。

【範例】：求$\sqrt{18}$的近似值，以四捨五入法取到小數第二位。

解　：由 $4^2=16<18<25=5^2$，

$\because\ 18<20.25=(4.5)^2$，

$\therefore\ \sqrt{18}$應在 4.0 到 4.5 之間

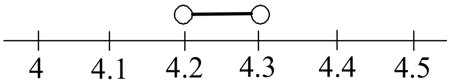


$4.1^2=16.81<18$，

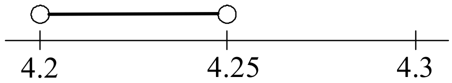
$4.2^2=17.64<18$，

$4.3^2=18.49>18$，

$17.64<18<18.49$。



$\therefore\ 4.2<\sqrt{18}<4.3$



$\because$ 18＜18.0625＝(4.25)^2，

$\therefore$ $\sqrt{18}$應在 4.20 到 4.25 之間

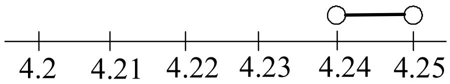
4.21^2＝17.7241＜18，

4.22^2＝17.8084＜18，

4.23^2＝17.8929＜18，

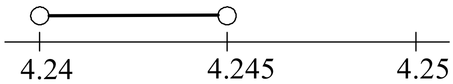
4.24^2＝17.9776＜18，

4.25^2＝18.0625＞18，



$\therefore$ 4.24＜$\sqrt{18}$＜4.25

又 18＜4.245^2＝18.020025。



$\therefore$ 4.24$\sqrt{18}$＜4.245

$\therefore$ $\sqrt{18}$≒4.24（取四捨五入到小數第二位）。

查表法：利用乘方開方表找出平方根與立方根的值，此種查表的方法就叫做**查表法**。

將根號內的數化為$\sqrt{N}$，$\sqrt{10N}$ 或$\sqrt{a^2N}=a\sqrt{N}$，在查表則可得。

【範例】：

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	$\sqrt{N^3}$	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
28	784	5.291503	16.73320	219.52	3.036589	6.542133	14.09460

則由上表可得知，$\sqrt{28}$＝5.291503，$\sqrt{280}$＝16.73320，

$\sqrt{2800}$＝10$\sqrt{28}$＝52.91503。

【範例】：利用上一個範例中的表格，求出下列平方根的值。

（1）$\sqrt{252}=?$　　（2）$\sqrt{2.8}=?$

解　：（1）$\sqrt{252}=\sqrt{9\times28}=3\sqrt{28}=3\times5.291503=15.874509$。

（2）$\sqrt{2.8}=\sqrt{\dfrac{28}{10}}=\sqrt{\dfrac{280}{100}}=\dfrac{\sqrt{280}}{10}=\dfrac{16.7332}{10}=1.67332$。

小 試 身 手

【例題一】

求出下列各式的值，並且化簡之：

(1) $\sqrt{\frac{9}{4}}=$ ____$\frac{3}{2}$____

(2) $\sqrt{0.04}=$ ___0.2____

(3) $\sqrt{\frac{1}{9}}=$ ___$\frac{1}{3}$____

(4) $-\sqrt{(-3.2)^2}=$ __−3.2___

【練習一】

求出下列各式的值，並且化簡之：

(1) $\sqrt{\frac{49}{25}}=$ ___$\frac{7}{5}$______

(2) $\sqrt{0.64}=$ ___0.8____

(3) $\sqrt{\frac{100}{289}}=$ ___$\frac{10}{17}$____

(4) $-\sqrt{(-5.6)^2}=$ ___−5.6____

【例題二】

(1) 求 $\sqrt{16}$ 的平方根＝__±2____

(2) 求 $\sqrt{\sqrt{81}}=$ ___3___

(3) 求 $\sqrt{0.0081}$ 的平方根＝___±0.3___

(4) 求 $2\frac{1}{4}$ 的平方根＝___$\pm\frac{3}{2}$___

(5) $\sqrt{(-16)^2}$ 的平方根＝___±4____

(6) $\sqrt{39\frac{1}{16}}$ 的平方根＝___$\pm\frac{5}{2}$_____

【練習二】

(1) 求 $\sqrt{\frac{16}{625}}$ 的平方根＝__$\pm\frac{2}{5}$___

(2) 求 $\sqrt{\sqrt{256}}=$ ____4____

(3) 求 1.21 的平方根＝___±1.1___

(4) 求 $2\frac{7}{9}$ 的平方根＝___$\pm\frac{5}{3}$____

(5) $\sqrt{(-23)^2}$ 的平方根＝__$\pm\sqrt{23}$___

(6) $\sqrt{3\frac{13}{81}}$ 的平方根＝___$\pm\frac{4}{3}$__

【例題三】

求$\sqrt{100}+\sqrt{0.09}+\sqrt{\frac{1}{25}}-\sqrt{784}-\sqrt{64}=$__－25.5____。

解：$\sqrt{100}+\sqrt{0.09}+\sqrt{\frac{1}{25}}-\sqrt{784}-\sqrt{64}$

$=10+0.3+\frac{1}{5}-28-8$

$=-25.5$

【練習三】

求$\sqrt{400}+\sqrt{0.09}+\sqrt{18\frac{1}{16}}-\sqrt{784}+\sqrt{64}=$___$\frac{91}{20}$___。

解：$\sqrt{400}+\sqrt{0.09}+\sqrt{18\frac{1}{16}}-\sqrt{784}+\sqrt{64}$

$=20+0.3+\sqrt{\frac{289}{16}}-28+8$

$=\frac{3}{10}+\frac{17}{4}$

$=\frac{6}{20}+\frac{85}{20}$

$=\frac{91}{20}$

【例題四】

化簡下列各式：

（1）$\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{49}-\sqrt{10^2}=?$　　（2）$\sqrt{16}-\sqrt{6^2}+\sqrt{(-5)^2}=?$

（3）$\sqrt{\frac{2}{5}}=?$　　（4）$\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{2\frac{2}{5}}=?$

解：（1）$\sqrt{(-3)^2}+\sqrt{49}-\sqrt{10^2}=3+7-10=0$

（2）$\sqrt{16}-\sqrt{6^2}+\sqrt{(-5)^2}=4-6+5=3$

（3）$\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

（4）$\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{2\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{1\times5}{5\times5}}+\sqrt{\frac{12}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}+\sqrt{\frac{4\times3\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{15}}{5}$

【練習四】

化簡下列各式：

（1）$\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{64}-\sqrt{11^2}=?$ （2）$\sqrt{144}-\sqrt{7^2}+\sqrt{(-13)^2}=?$

（3）$\sqrt{\frac{5}{7}}=?$ （4）$\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{3\frac{1}{6}}=?$

解：（1）$\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{64}-\sqrt{11^2}=5+8-11=2$

（2）$\sqrt{144}-\sqrt{7^2}+\sqrt{(-13)^2}=12-7+13=18$

（3）$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{5\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{35}}{7}$

（4）$\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{3\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1\times6}{6\times6}}+\sqrt{\frac{19}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}+\sqrt{\frac{19\times6}{6\times6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{114}}{6}$

【例題五】

化簡$\frac{1}{2}\sqrt{48}-5\sqrt{\frac{1}{3}}+2\sqrt{12}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$ 為最簡分式。

解：

$$\frac{1}{2}\sqrt{48}-5\sqrt{\frac{1}{3}}+2\sqrt{12}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}-5\times\frac{\sqrt{3}}{3}+2\times2\sqrt{3}-\sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}+4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$=3\sqrt{3}$$

【練習五】

化簡$\frac{1}{3}\sqrt{72}-4\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{8}-\sqrt{4\frac{1}{6}}$ 為最簡分式。

解：

$$\frac{1}{3}\sqrt{72}-4\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{8}-\sqrt{4\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\times6\sqrt{2}-4\times\frac{\sqrt{6}}{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{\frac{25}{6}}$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{6}}{6}+2\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{6}$$

$$=4\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

【例題六】

先把 27225 作質因數分解，再求 27225 的平方根。

解：∵ $27225 = 3^2 \times 5^2 \times 11^2$

∴ 27225 的平方根

$= \pm 3\times5\times11 = \pm165$

【練習六】

先把 1296 作質因數分解，再求 1296 的平方根。

解：∵ $1296 = 2^4 \times 3^4$

∴ 1296 的平方根

$= \pm 2^2 \times 3^2 = \pm36$

【例題六】

若 $2x-7$ 的平方根是 ±5，則

(1) $x=$__16__；　(2) $\sqrt{x}=$__4___。

解：(1) ∵ $2x-7$ 的平方根是 ±5

∴ $2x-7=25 \Rightarrow 2x=32$

∴ $x=16$

(2) $\sqrt{x}=\sqrt{16}=4$

【練習六】

若 $2x-3$ 的平方根是 ±3，則

(1) $x=$__6___；

(2) $4x+1$ 的平方根是__±5___。

(1) ∵ $2x-3$ 的平方根是 ±3

∴ $2x-3=9 \Rightarrow 2x=122$

∴ $x=6$

(2) $4x+1=25$ 的平方根是 $\pm\sqrt{25}=\pm5$

【例題七】

(1) 若 $2x-1$ 的平方根為 ±7，

求 $3x+6$ 的平方根。

(2) 若 $(3x+2)^2$ 的平方根為 ±13，

求 $x=$？

解：(1) ∵ $2x-1$ 的平方根是 ±7

∴ $2x-1=49 \Rightarrow 2x=50$

∴ $x=25$

∴ $3x+6=81$ 的平方根 $=\pm9$

(2) ∵ $(3x+2)^2$ 的平方根為 ±13

∴ $3x+2=\pm13$

∴ $3x=11$ 或 $3x=-15$

∴ $x=\dfrac{11}{3}$ 或 $x=-5$

【練習七】

(1) 若 -5 是 $3x-2$ 的平方根，

求 $3x-11$ 的平方根。

(2) 若 $(2x+3)^2$ 的平方根為 ±5，求 $x=$？

解：(1) ∵ -5 是 $3x-2$ 的平方根

∴ $3x-2=25 \Rightarrow 3x=27$

∴ $x=9$

∴ $3x-11=16$ 的平方根 $=\pm4$

(2) ∵ $(2x+3)^2$ 的平方根為 ±5

∴ $2x+3=\pm5$

∴ $2x=2$ 或 $2x=-8$

∴ $x=1$ 或 $x=-4$

【例題八】

設a 、b 為整數，若 $\sqrt{(a+b-3)^2}+\sqrt{(2a+b-5)^2}=0$，求 4a ＋ b 之平方根。

解： ∵ a＋b－3＝0 ∴ a＋b＝3……①

∵ 2a＋b－5＝0 ∴ 2a＋b＝5……②

將 ②－①得到 a＝2 代入①，得到 b＝1

∴ 4a＋b＝9 之平方根為±3

【練習八】

設a 、b 、c 為整數，若 $\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a+b-1)^2}+\sqrt{2a-b+c+5}=0$，則

a＝____－2____，b＝___3____，c＝____2___，則 $\sqrt{a+b+c}$ ＝___ $\sqrt{3}$ ___

解： ∵ a＋2＝0 ∴ a＝－2

∵ a＋b－1＝0 ∴ －2＋b－1＝0 ⇒ b＝3

∵ 2a－b＋c＋5＝0 ∴ －4－3＋c＋5＝0 ⇒ c＝2

∴ $\sqrt{a+b+c}=\sqrt{-2+3+2}=\sqrt{3}$

【例題九】

按照下列各種情形，分別求 $\sqrt{(2x-1)^2}$ 的值：

(1) $x<\frac{1}{2}$。 (2) $x=\frac{1}{2}$。 (3) $x>\frac{1}{2}$。

解： (1) ∵ $x<\frac{1}{2}$ ⇒ $2x<1$ ⇒ $2x-1<0$。

∴ $\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=1-2x$

(2) ∵ $x=\frac{1}{2}$ ⇒ $2x=1$ ⇒ $2x-1=0$。

∴ $\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=0$

(3) ∵ $x>\frac{1}{2}$ ⇒ $2x>1$ ⇒ $2x-1>0$。

∴ $\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=2x-1$

【練習九】

按照下列各種情形，分別求$\sqrt{(4x-1)^2}$ 的值：

（1）$x<\frac{1}{4}$。　（2）$x=\frac{1}{4}$。　（3）$x>\frac{1}{4}$。

解：（1）$\because\ x<\frac{1}{4} \Rightarrow 4x<1 \Rightarrow 4x-1<0$。

$\therefore\ \sqrt{(4x-1)^2}=|4x-1|=1-4x$

（2）$\because\ x=\frac{1}{4} \Rightarrow 4x=1 \Rightarrow 4x-1=0$。

$\therefore\ \sqrt{(4x-1)^2}=|4x-1|=0$

（3）$\because\ x>\frac{1}{4} \Rightarrow 4x>1 \Rightarrow 4x-1>0$。

$\therefore\ \sqrt{(4x-1)^2}=|4x-1|=4x-1$

【例題十】

已知 $-3<x<2$，則$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}=$？

解：$\because\ -3<x<2\quad \therefore\ -5<x-2<0$

$\because\ -3<x<2\quad \therefore\ 0<x+3<5$

$\because\ \sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}=|x-2|+|x+3|=2-x+x+3=5$

【練習十】

已知 $-1<x<6$，則$\sqrt{(x-6)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=$？

解：$\because\ -1<x<6\quad \therefore\ -7<x-6<0$

$\because\ -1<x<6\quad \therefore\ 0<x+1<7$

$\because\ \sqrt{(x-6)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=|x-6|+|x+1|=6-x+x+1=7$

【例題十一】

若 a＝$2\sqrt{7}$，b＝$3\sqrt{5}$，c＝$\sqrt{37}$，比較 a、b、c 的大小為何？

解： ∵ a＝$2\sqrt{7}=\sqrt{28}$，

b＝$3\sqrt{5}=\sqrt{45}$，

c＝$\sqrt{37}$

∴ b＞c＞a

【練習十一】

若 a＝$2\sqrt{5}$，b＝$3\sqrt{2}$，c＝$\sqrt{23}$，比較 a、b、c 的大小為何？

解： ∵ a＝$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$，

b＝$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$，

c＝$\sqrt{23}$

∴ c＞a＞b

【例題十二】

計算下列各式：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$？

(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{8})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$？

(3) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2=$？

解：(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2=1$

(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{8})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2]$

$=2\times1=2$

(3) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2$

$=15+2\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}+3$

$=18+6\sqrt{5}$

【練習十二】

計算下列各式：

(1) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50}\right)\times\sqrt{2}=$？

(2) $(\sqrt{18}-\sqrt{8})^2=$？

(3) $\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\right)^2=$？

解：(1) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50}\right)\times\sqrt{2}$

$=4-6+10=8$

(2) $(\sqrt{18}-\sqrt{8})^2$

$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{2})^2=2$

(3) $\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$=\dfrac{7+2\sqrt{35}+5}{4}+\dfrac{7-2\sqrt{35}+5}{4}$

$=\dfrac{24}{4}=6$

【例題十三】

設 a、b、c、d 皆為正整數，若$\sqrt{360}$≒18.9…，欲使$\sqrt{360a}$、$\sqrt{\dfrac{360}{b}}$、$\sqrt{360+c}$、$\sqrt{360-d}$均為正整數，當 a、b、c、d 均為最小正整數時，求$\sqrt{a+b+c+d-8}$＝？

解：∵ 360＝$2^3\times3^2\times5$

∴ $\sqrt{360a}=\sqrt{2^3\times3^2\times5\times a}$　　∴ $a=3\times5^2=75$

$\sqrt{\dfrac{360}{b}}=\sqrt{\dfrac{2^3\times3^2\times5}{b}}$　　∴ $b=3^2\times5=45$

∵ $18^2=324$，$19^2=361$

∴ $\sqrt{360+c}=\sqrt{361}$　　∴ c＝1

$\sqrt{360-d}=\sqrt{324}$　　∴ d＝36

∴ $\sqrt{a+b+c+d-8}=\sqrt{49}=7$

【練習十三】

設$\sqrt{720}$≒26.8…，欲使$\sqrt{720a}$、$\sqrt{\dfrac{720}{b}}$、$\sqrt{720+c}$、$\sqrt{720-d}$均為正整數，

當 a、b、c、d 均為最小正整數時，求$\sqrt{a+b+c+d+1}$＝？

解：∵ $\sqrt{720a}=\sqrt{4^2\times3^2\times5\times a}$為正整數　∴ $a=5$

$\sqrt{\dfrac{720}{b}}=\sqrt{\dfrac{4^2\times3^2\times5}{b}}$為正整數　∴ $b=5$

∵ $\sqrt{720}=26.8\cdots\Rightarrow\ 27^2=729$，$26^2=676$

當$\sqrt{720+c}$為正整數，則 $c=729-720=9$

當$\sqrt{720-d}$為正整數，則 $d=720-676=44$

∴ $\sqrt{a+b+c+d+1}=\sqrt{5+5+9+44+1}=\sqrt{64}=8$

【例題十四】

設 a 為正整數，且 1＜a＜50，則滿足$\sqrt{4+a}$為整數之 a 共有幾個？

解：∵ 1＜a＜50 ⇒ 5＜4＋a＜54 ⇒ 2＜$\sqrt{5}$＜$\sqrt{4+a}$＜$\sqrt{54}$＜8

∴ 滿足$\sqrt{4+a}$為整數有 3、4、5、6、7，

∴ a 可為 5、12、21、32、45，共有 5 個

【練習十四】

設$\sqrt{10-a}$為正整數，且 a 為正整數，則 a 可為多少？

解：∵ $\sqrt{10-a}$為正整數，且 a 為正整數

∴ $\sqrt{10-a}=\sqrt{1}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{9}$

∴ a 可為 9、6、1

【例題十五】

下列各方根的值，何者介於 6 與 7 之間？

$\sqrt{35}$、$\sqrt{36}$、$\sqrt{37}$、$\sqrt{41}$、$\sqrt{43}$、$\sqrt{45}$、$\sqrt{47}$、$\sqrt{49}$、$\sqrt{50}$。

解：∵ $6^2=36$ ， $7^2=49$

∴ 大於$\sqrt{36}$而小於$\sqrt{49}$的有$\sqrt{37}$、$\sqrt{41}$、$\sqrt{43}$、$\sqrt{45}$、$\sqrt{47}$

【練習十五】

下列各方根的值，何者介於 12 與 13 之間？

$\sqrt{110}$、$\sqrt{120}$、$\sqrt{130}$、$\sqrt{140}$、$\sqrt{150}$、$\sqrt{160}$、$\sqrt{170}$、$\sqrt{180}$、$\sqrt{190}$。

解：∵ $12^2=144$ ， $13^2=169$

∴ 大於$\sqrt{144}$而小於$\sqrt{169}$的有$\sqrt{150}$、$\sqrt{160}$

【例題十六】

滿足 $10\leqq\sqrt{n}\leqq15$ 的正整數 n 共有多少個？

解：∵ $10\leqq\sqrt{n}\leqq15 \Rightarrow 100\leqq n\leqq225$

∴ n 可為 100~225 ∴ 225－100＋1＝126

∴ 共有 126 個

【練習十六】

滿足 20≦$\sqrt{n}$＜25 的自然數共有多少個？

解： ∵ 20≦$\sqrt{n}$＜25 ⇒ 400≦n＜625

∴ n 可為 400~624 ∴ 624－400＋1＝225

∴ 共有 225 個

【例題十七】

【範例】：(1) 已知 $A(0，0)$和 $B(-8，-6)$兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。

(2) 已知 $C(-2，0)$和 $D(-7，-12)$兩點，求 $\overline{CD}$ 的長。

解：(1) 已知 $A(0，0)$和 $B(-8，-6)$兩點，由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{[(-8)-0]^2+[(-6)-0]^2}\\&=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\\&=\sqrt{64+36}\\&=\sqrt{100}=10。\end{aligned}$$

答：$\overline{AB}=10$。

(2) 已知 $C(-2，0)$和 $D(-7，-12)$兩點，由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{CD}&=\sqrt{[(-7)-(-2)]^2+[(-12)-0]^2}\\&=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}\\&=\sqrt{25+144}\\&=\sqrt{169}=13。\end{aligned}$$

答：$\overline{CD}=\sqrt{17}$ 。

【練習十七】

【範例】：(1) 已知 $A(5，-3)$和 $B(-2，21)$兩點，求 $\overline{AB}$ 的長。

(2) 已知 $C(1，1)$和 $D(2，3)$兩點，求 $\overline{CD}$ 的長。

解：(1) 已知 $A(5，-3)$和 $B(-2，21)$兩點，由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{[(-2)-5]^2+[(21-(-3)]^2}\\&=\sqrt{(-7)^2+24^2}\\&=\sqrt{49+576}\\&=\sqrt{625}=25。\end{aligned}$$

答：$\overline{AB}=25$。

(2) 已知 $C(1，1)$和 $D(2，3)$兩點，由兩點距離公式可得知：

$$\begin{aligned}\overline{CD}&=\sqrt{(2-1)^2+[3-1]^2}\\&=\sqrt{1^2+2^2}\\&=\sqrt{1+4}\\&=\sqrt{5}。\end{aligned}$$

答：$\overline{CD}=\sqrt{5}$ 。

【例題十八】

試利用右表乘方開方表回答問題：

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
18	324	4.242	13.416
23	529	4.795	15.165
29	841	5.385	17.029

(1) $\sqrt{290}=$？

(2) $\sqrt{1.8}=$？

(3) $\sqrt{261}=$？

解：

(1) $\sqrt{290}=17.029$

(2) $\sqrt{1.8}=\sqrt{\frac{18}{10}}=\sqrt{\frac{180}{100}}=\frac{\sqrt{180}}{10}=\frac{13.416}{10}=1.3416$

(3) $\sqrt{261}=3\sqrt{29}=3\times5.385=64.621$

【練習十八】

試利用右表乘方開方表回答問題：

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
17	289	4.123	13.038
21	441	4.582	14.491
22	484	4.690	14.832

(1) $\sqrt{210}=$？

(2) $\sqrt{880}=$？

(3) $\sqrt{1.7}=$？

解：

(1) $\sqrt{210}=14.491$

(2) $\sqrt{880}=2\sqrt{220}=2\times14.832=29.664$

(3) $\sqrt{1.7}=\sqrt{\frac{17}{10}}=\sqrt{\frac{170}{100}}=\frac{\sqrt{170}}{10}=\frac{13.038}{10}=1.3038$

【例題十九】

設$\sqrt{65}$的整數部份為 a，$\sqrt{300}$的整數部份為 b，求(1) $\sqrt{a+b}=$？(2) $b-a$ 的平方根=？

解：$\because\ 8<\sqrt{65}<9$　　$\therefore\ a=8$

$\because\ 17<\sqrt{300}<18$　　$\therefore\ b=17$

$\therefore\ \sqrt{a+b}=\sqrt{8+17}=5$

$b-a=17-8=9$ 的平方根$=\pm\sqrt{9}=\pm3$

【練習十九】

設 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n^{\,2}}$，且 $a_1=\sqrt{10}$ 則 a_1、a_2、a_3、………、a_{1000} 當中是整數的有多少個？

解： 當 $a_1=\sqrt{10}$ ， $a_2=\sqrt{1+a_1^{\,2}}=\sqrt{11}$

$a_3=\sqrt{1+a_2^{\,2}}=\sqrt{12}$ ， $a_4=\sqrt{1+a_3^{\,2}}=\sqrt{13}\cdots\cdots a_{1000}=\sqrt{1+a_{999}^{\,2}}=\sqrt{1009}$

∴ $a_7=\sqrt{1+a_6^{\,2}}=\sqrt{16}=4$ ， $a_{16}=\sqrt{1+a_{15}^{\,2}}=\sqrt{25}=5$，

$a_{27}=\sqrt{1+a_{26}^{\,2}}=\sqrt{36}=6$，……$\sqrt{900}=30$，$\sqrt{961}=31$，$\sqrt{1024}=32$

∴ 整數的有 4~31 31－4＋1＝28 個

【例題二十】

（1）已知 $\sqrt{2}=1.414$，求下列各數的值：

a. $\sqrt{0.0072}=$___0.08484____；

b. $\sqrt{8000000}=$___2828____ 。

（2）由表查知 $\sqrt{875}=29.58$，

$\sqrt{8750}=93.54$，求 $\sqrt{\dfrac{7}{8}}=$

__0.9354__。

解：（1）a. $\sqrt{0.0072}=\sqrt{\dfrac{72}{10000}}$

$=\dfrac{6\sqrt{2}}{100}=0.08484$

b. $\sqrt{8000000}=2000\sqrt{2}=2828$

（2） $\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\sqrt{0.875}=\sqrt{\dfrac{875}{1000}}$

$=\sqrt{\dfrac{8750}{10000}}=\dfrac{\sqrt{8750}}{100}$

$=\dfrac{93.54}{100}=0.9354$

【練習二十】

（1）已知 $\sqrt{21}=4.5826$，$\sqrt{210}=14.4914$

求下列各數的值：

a. $\sqrt{210000}=$___458.26___；

b. $\sqrt{21000}=$___144.914___ 。

c. $\sqrt{2.1}=$___1.4914___ 。

d. $\sqrt{0.0021}=$__0.045826___ 。

解：

a. $\sqrt{210000}=100\sqrt{21}=100\times 4.5826$

$=458.26$

b. $\sqrt{21000}=10\sqrt{210}=10\times 14.4914$

$=144.914$

c. $\sqrt{2.1}=\sqrt{\dfrac{21}{10}}=\sqrt{\dfrac{210}{100}}=\dfrac{\sqrt{210}}{10}$

$=\dfrac{14.4914}{10}=1.44914$

d. $\sqrt{0.0021}=\sqrt{\dfrac{21}{10000}}=\dfrac{\sqrt{21}}{100}$

$=\dfrac{4.5826}{100}=0.045826$

立方根

1. 認識立方根：

我們知道 $3^3=27$，$5^3=125$……，那麼多少的立方等於 343 呢？

倒過來給定一數 a，如果有一數 x 會使得 $x^3=a$，則此 x 稱為 a 的立方根。

例如：我們可以用 $x^3=343$ 來表示，那些 x 滿足 $x^3=343$ 呢？

我們知道 $x=7$ 滿足 $x^3=343$，在此 7 我們稱為 343 的立方根，

但是，$(-7)^3=-343$，所以 (-7) 不是 343 的立方根。

【範例】：求下列各數的立方根：

(1) 512　(2) -216　(3) 36　(4) 242。

解：(1) $512=8\times8\times8=8^3$，故 512 的立方根為 8。

(2) $(-216)=(-6)\times(-6)\times(-6)=(-6)^3$，故 (-216) 的立方根為 (-6)。

(3) $36=2\times3\times3$，在此我們無法利用相同的三個整數相乘，找出 36 的立方根。所以 36 的立方根要利用『立方根號』來表示。

(4) $242=2\times11\times11$，在此我們無法利用相同的三個整數相乘為 242，找出 242 的立方根。所以 242 的立方根要利用『立方根號』來表示。

2. 立方根的意義：

(1) 立方根：

設 a、x 都是實數，若 $x^3=a$，則 x 就叫做 a 的立方根，以 $x=\sqrt[3]{a}$ 來表示，讀作 x 等於正負根號 a。

例如：$4^3=64$，就稱「4 是 64 的立方根」。

$(-4)^3=(-64)$，就稱「(-4) 是 (-64) 的立方根」。

【範例】：試找出 9 的平方根和 27 的立方根。

解：9 的平方根是 (-3) 和 3，因為 $(-3)^2=3^2=9$。

27 的立方根是 3，因為 $3^3=27$。

此範例中，27 是正數，所以立方根也是正數。

因為 $(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=(-27)$，

所以 (-27) 的立方根是 (-3)。

※結論：若 $x^3=a$，則 x 就叫做 a 的立方根。a 只會有一個立方根，以 $x=\sqrt[3]{a}$ 來表示。

若 $x^2=a$，則 x 就叫做 a 的平方根。a 會有二個平方根，以 $x=\pm\sqrt{a}$ 來表示。

（2）立方根的表示法：

a. 一個數 a 的立方根記作 $\sqrt[3]{a}$，讀做『三次根號 a』。

b. 設 a 是任意數，a 可以是正數或負數，則 $\sqrt[3]{a^3}=a$ 或 $\sqrt[3]{(-a)^3}=-a$。

c. 零的立方還是為零，所以零的立方根以 $\sqrt[3]{0}$（讀做三次根號零)表示，即 $\sqrt[3]{0}=0$。

d. 若 $\sqrt[3]{a}$ 為一個整數，則 a 為完全立方數。也就是 $a=x^3$，其中 x 為整數，則稱 a 為完全立方數。

【範例】：一個數 8 的立方根記作 $\sqrt[3]{8}$，讀做『三次根號 8』。

【範例】：（1）$\sqrt[3]{5^3}=5$　（2）$\sqrt[3]{10^3}=10$　（3）$\sqrt[3]{(-7)^3}=-7$。

【範例】：2 是否為 8 的立方根？

解：∵ $8=2\times2\times2=2^3$，∴ 2 是為 8 的立方根。

【範例】：－3 是否為 27 的立方根？

解：∵ $(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-27$，

∴ －3 不是 27 的立方根。

【範例】：利用質因數分解求出下列各式的立方根：

（1）27　（2）－512　（3）125　（4）－1000　（5）0。

解：（1）$27=3\times3\times3$，27 的立方根為 $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3\times3\times3}=3$。

（2）$-512=(-5)\times(-5)\times(-5)$，

$-512=$的立方根為 $\sqrt[3]{-512}=\sqrt[3]{(-8)\times(-8)\times(-8)}=-8$。

（3）$125=5\times5\times5$，125 的立方根為 $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5\times5\times5}=5$。

（4）$-1000=(-10)\times(-10)\times(-10)$，

$-1000=$的立方根為 $\sqrt[3]{-1000}=\sqrt[3]{(-10)\times(-10)\times(-10)}=-10$。

（5）0 的立方根為 $\sqrt[3]{0}=0$。

【範例】：下列為 1 到 27 的立方根列表：

$1\longrightarrow\sqrt[3]{1}=1$，1 為完全立方數。

$2\longrightarrow\sqrt[3]{2}$；$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=2$。

$3\longrightarrow\sqrt[3]{3}$；$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}=3$。

$4\longrightarrow\sqrt[3]{4}$；$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4}=4$。

$5\longrightarrow\sqrt[3]{5}$；$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}=5$。

$6\longrightarrow\sqrt[3]{6}$；$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6}=6$。

$7\longrightarrow\sqrt[3]{7}$；$\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{7}=7$。

$8\longrightarrow 2$；∵ $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2\times2\times2}=2$，∴8 為完全立方數。

$9\longrightarrow\sqrt[3]{9}$；$\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{9}=9$。

$10\longrightarrow\sqrt[3]{10}$；$\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{10}=10$。

$11\longrightarrow\sqrt[3]{11}$；$\sqrt[3]{11}\times\sqrt[3]{11}\times\sqrt[3]{11}=11$。

$12 \longrightarrow \sqrt[3]{12}$ ；$\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{12}=12$。

$13 \longrightarrow \sqrt[3]{13}$ ；$\sqrt[3]{13}\times\sqrt[3]{13}\times\sqrt[3]{13}=13$。

$14 \longrightarrow \sqrt[3]{14}$ ；$\sqrt[3]{14}\times\sqrt[3]{14}\times\sqrt[3]{14}=14$。

$15 \longrightarrow \sqrt[3]{15}$ ；$\sqrt[3]{15}\times\sqrt[3]{15}\times\sqrt[3]{15}=15$。

$16 \longrightarrow \sqrt[3]{16}$ ；$\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{16}=16$。

$17 \longrightarrow \sqrt[3]{17}$ ；$\sqrt[3]{17}\times\sqrt[3]{17}\times\sqrt[3]{17}=17$。

$18 \longrightarrow \sqrt[3]{18}$ ；$\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{18}=18$。

$19 \longrightarrow \sqrt[3]{19}$ ；$\sqrt[3]{19}\times\sqrt[3]{19}\times\sqrt[3]{19}=19$。

$20 \longrightarrow \sqrt[3]{20}$ ；$\sqrt[3]{20}\times\sqrt[3]{20}\times\sqrt[3]{20}=20$。

$21 \longrightarrow \sqrt[3]{21}$ ；$\sqrt[3]{21}\times\sqrt[3]{21}\times\sqrt[3]{21}=21$。

$22 \longrightarrow \sqrt[3]{22}$ ；$\sqrt[3]{22}\times\sqrt[3]{22}\times\sqrt[3]{22}=22$。

$23 \longrightarrow \sqrt[3]{23}$ ；$\sqrt[3]{23}\times\sqrt[3]{23}\times\sqrt[3]{23}=23$。

$24 \longrightarrow \sqrt[3]{24}$ ；$\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{24}=24$。

$25 \longrightarrow \sqrt[3]{25}$ ；$\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{25}=25$。

$26 \longrightarrow \sqrt[3]{26}$ ；$\sqrt[3]{26}\times\sqrt[3]{26}\times\sqrt[3]{26}=26$。

$27 \longrightarrow 3$；$\because \sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3\times3\times3}=3$，$\therefore 27$ 為完全立方數。

【範例】：$125=5^3$，5 是 125 的立方根，則 125 即為完全立方數。

【範例】：常用的完全立方數列表。

解：

$1^3=1$，1 是 1 的立方根，則 1 為完全立方數。

$2^3=8$，2 是 8 的立方根，則 8 為完全立方數。

$3^3=27$，3 是 27 的立方根，則 27 為完全立方數。

$4^3=64$，4 是 64 的立方根，則 64 為完全立方數。

$5^3=125$，5 是 125 的立方根，則 125 為完全立方數。

$6^3=216$，6 是 216 的立方根，則 216 為完全立方數。

$7^3=343$，7 是 343 的立方根，則 343 為完全立方數。

$8^3=512$，8 是 512 的立方根，則 512 為完全立方數。

$9^3=729$，9 是 729 的立方根，則 729 為完全立方數。

$10^3=1000$，10 是 1000 的立方根，則 8 為完全立方數。

【範例】：下列哪些是完全立方數：(－64)、121、192、500、1331、1728。

解　：$\sqrt[3]{(-64)}=\sqrt[3]{(-4)\times(-4)\times(-4)}=(-4)$。

$\sqrt[3]{121}=\sqrt[3]{11\times11}$，121 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{2^6\times3}$，192 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{5^3\times2^2}$，500 的立方根不是整數。

$\sqrt[3]{1331}=\sqrt[3]{11\times11\times11}=11$。

$\sqrt[3]{1728}=\sqrt[3]{2^6\times3^3}=\sqrt[3]{(2\times2\times3)^3}=12$。

所以完全立方數有：(－64)、1331、1728。

(3)負數有一個實數的立方根：

不同於平方根的被開方數必須是非負的整數，立方根的被開方數可以是任意實數。

例如：$27=3^3$ 及 $-8=(-2)^3$，所以 $\sqrt[3]{27}=3$ 及 $\sqrt[3]{-8}=-2$。

顯然的，被開方數與它的立方根同號。

【範例】：求出－125 以及－64 的立方根。

解　：(－125)＝(－5)×(－5)×(－5)，∴(－125)的立方根為(－5)。

(－64)＝(－4)×(－4)×(－4)，∴(－64)的立方根為(－4)。

(4) 設 a 是實數，則 $\sqrt[3]{a^3}=\begin{cases}a\text{, 當}a>0\\-a\text{, 當}a<0\\0\text{, 當}a=0\end{cases}$。

【範例】：$\sqrt[3]{(-27)^3}=(-3)$。

$\sqrt[3]{(-12)^3}=(-12)$。

$\sqrt[3]{(25)^3}=25$。

3. **<u>立方根運算常用公式</u>**：

(1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。

$\because\ (\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})^3=(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})\times(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})\times(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})$

$=(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a})\times(\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b})$

$=ab$

$\therefore\ \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。

（2）$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$。（ $b\neq 0$ ）

$\because\ (\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}})^3=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a}{b}$。

$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$。

（3）$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$。（ $b\neq 0$ ）

【範例】： $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3\times 2}$。

【範例】：$\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[3]{\dfrac{6}{10}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$。

【範例】： $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3\times 2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$。

4. <u>最簡立方根式</u>：

一個三次方根，根號內的數，其因數不再含有大於 1 的完全立方數，

且分母不含立方根號，即無法再進一步化簡，此種立方根叫做最簡立方根式。

例如：$\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3}}$不是最簡根式，$\dfrac{\sqrt[3]{63}}{3}$是最簡根式。

【範例】：$\sqrt[3]{135}$與$\sqrt[3]{225}$哪個為最簡立方根？

解　：$\because\ \sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{3^3\times 5}=3\sqrt[3]{5}$。

$\sqrt[3]{225}=\sqrt[3]{3^2\times 5^2}$。

$\therefore\ \sqrt[3]{225}$為最簡立方根。

【範例】：判斷下列何者為最簡立方根：

（1）$\sqrt[3]{\dfrac{4}{27}}$　（2）$\sqrt[3]{81}$　（3）$\sqrt[3]{68}$　（4）$\sqrt[3]{56}$。

解　：（1）$\sqrt[3]{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$。

（2）$\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}$。

（3）$\sqrt[3]{68}=\sqrt[3]{4\times 17}$。

（4）$\sqrt[3]{56}=2\sqrt[3]{7}$。

所以$\sqrt[3]{68}$為最簡立方根。

【範例】：化簡下列各式：

（1）$\sqrt[3]{(-125)}$　（2）$\sqrt[3]{375}$　（3）$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ 。

解　：（1）$\sqrt[3]{(-125)}=\sqrt[3]{(-5)\times(-5)\times(-5)}=(-5)$。

（2）$\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3\times5^3}=5\sqrt[3]{3}$ 。

（3）$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}$ 。

5. 立方根的四則運算：

同類立方根號：兩個或兩個以上的立方根式，經化簡後它們根號內的數相同，且開方次數也相同，此種立方根號叫做同類立方根或同類立方根號，否則為不同類立方根號。同類立方根號一定是同次根號，同類立方根式可以做加、減、乘、除運算。

例如：$2\sqrt[3]{3}$ 與 $5\sqrt[3]{3}$ 都有 $\sqrt[3]{3}$ ，所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $5\sqrt[3]{3}$ 是同類立方根號。

例如：$2\sqrt[3]{3}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 其立方根號內的數都不相同，所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $\sqrt[3]{5}$ 不是同類立方根號。

【範例】：判斷下列何者為同類立方根號：

（1）$2\sqrt[3]{3}$ 與 $3\sqrt[3]{5}$　（2）$\sqrt[3]{24}$ 與 $3\sqrt[3]{3}$　（3）$\sqrt[3]{7}$ 與 $\sqrt[3]{56}$ 。

解　：（1）$2\sqrt[3]{3}$ 與 $3\sqrt[3]{5}$ 其立方根號內的數都不相同，

所以 $2\sqrt[3]{3}$ 與 $3\sqrt[3]{5}$ 不是同類立方根號。

（2）$\because\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times3}=2\sqrt[3]{3}$ ，$\therefore\sqrt[3]{24}$ 與 $3\sqrt[3]{3}$ 是同類立方根號。

（3）$\because\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{2^3\times7}=2\sqrt[3]{7}$ ，$\therefore\sqrt[3]{7}$ 與 $\sqrt[3]{56}$ 是同類立方根號。

【範例】：判斷下列何者為同類立方根號：$\sqrt[3]{32}$ ，$\sqrt[3]{168}$ ，$\sqrt[3]{375}$ ，$\sqrt[3]{108}$ ，$\sqrt[3]{432}$ 。

解　：$\because$ $\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$ ，$\sqrt[3]{168}=2\sqrt[3]{21}$ ，$\sqrt[3]{375}=5\sqrt[3]{3}$ ，$\sqrt[3]{108}=3\sqrt[3]{4}$ ，$\sqrt[3]{432}=6\sqrt[3]{2}$ 。

$\therefore$ $\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$ ，$\sqrt[3]{108}=3\sqrt[3]{4}$ 為同類立方根號。

（1）立方根的加減運算：

先將立方根化為最簡立方根，再將同類立方根號的最簡立方根作加減運算，即對最簡立方根的係數作加減即可。

【範例】：化簡下列各立方根：（1）$\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}$　（2）$5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}$ 。

解　：（1）$\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}=(1+4)\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$ 。

（2）$5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=(5-2)\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ 。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{3}$ (2) $\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{16}$ 。

解 ：(1) $\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\times3}-2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=0$。

(2) $\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{125\times2}-2\sqrt[3]{8\times2}=5\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$ 。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{40}+5\sqrt[3]{6}$ (2) $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{7}$ 。

解 ：(1) $\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{40}+5\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2^3\times6}+\sqrt[3]{2^3\times5}+5\sqrt[3]{6}$

$=2\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{5}+5\sqrt[3]{6}$

$=(2+5)\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{5}$

$=7\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{5}$ 。

(2) $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3\times7}+\sqrt[3]{2^3\times9}-3\sqrt[3]{7}$

$=2\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{7}$

$=2\sqrt[3]{9}+(2-3)\sqrt[3]{7}$

$=2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7}$ 。

(2) 根號的乘除法運算及有理化：

1. $a\sqrt[3]{b}\times c\sqrt[3]{d}=a\times c\sqrt[3]{b\times d}$ 。

2. $m\sqrt[3]{a}\div n\sqrt[3]{b}=m\sqrt[3]{a}\times\dfrac{1}{n\sqrt[3]{b}}=\dfrac{m\sqrt[3]{a}}{n\sqrt[3]{b}}=\dfrac{m}{n}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ ，$(b\neq0)$。

有理化：使分母不含根號，且分子為最簡根式，此過程即為分母有理化。

通常我們會將 $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 有理化：$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$ ，$(a\geq0，b>0)$。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $-3\sqrt[3]{2}\times2\sqrt[3]{2}$ (2) $2\sqrt[3]{6}\times5\sqrt[3]{3}$

解 ：(1) $-3\sqrt[3]{2}\times2\sqrt[3]{2}=-3\times2\sqrt[3]{2\times2}=-6\sqrt[3]{4}$ 。

(2) $2\sqrt[3]{6}\times5\sqrt[3]{3}=2\times5\sqrt[3]{6\times3}=10\sqrt[3]{18}$ 。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{72}\times2\sqrt[3]{21}$ (2) $\sqrt[3]{96}\times\sqrt[3]{108}$

解 ：(1) $\sqrt[3]{72}\times2\sqrt[3]{21}=\sqrt[3]{8\times9}\times2\sqrt[3]{21}=2\sqrt[3]{9}\times2\sqrt[3]{21}=2\times2\sqrt[3]{9\times21}$

$=4\sqrt[3]{3\times3\times3\times7}=4\times3\sqrt[3]{7}=12\sqrt[3]{7}$ 。

(2) $\sqrt[3]{96}\times\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{2^5\times3}\times\sqrt[3]{2^2\times3^3}=2\sqrt[3]{2^2\times3}\times3\sqrt[3]{2^2}=6\sqrt[3]{2^2\times3\times2^2}$

$=6\times2\sqrt[3]{2\times3}=12\sqrt[3]{6}$ 。

【範例】：請化簡：$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})=$？

解　：$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})[(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2]$

$=(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3$

$=2+3$

$=5$。

【範例】：請化簡：$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$？

解　：$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2]$

$=(\sqrt[3]{2})^3-(\sqrt[3]{3})^3$

$=2-3$

$=-1$。

【範例】：化簡下列各立方根：(1) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{9}$　(2) $\sqrt[3]{25}\div\sqrt[3]{15}$　(3) $3\sqrt[3]{25}\div\sqrt[3]{4}$

解　：(1) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{9}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\times3}\times\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4\times3}}{\sqrt[3]{3\times3\times3}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{3}$。

(2) $\sqrt[3]{25}\div\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{\dfrac{25}{15}}=\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{5\times3\times3}{3\times3\times3}}=\sqrt[3]{\dfrac{45}{9}}=\dfrac{\sqrt[3]{45}}{3}$。

(3) $3\sqrt[3]{25}\div\sqrt[3]{4}=\dfrac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3\sqrt[3]{25\times2}}{\sqrt[3]{4\times2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{3\sqrt[3]{50}}{2}$。

【範例】：有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$　。

解　：(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{3\times3}}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$。

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2\times2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2\times2}\times\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$。

【範例】：有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$　。

解　：(1) 由立方公式，我們知道$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})^3+1^3=2+1=3$。

所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$即可。

因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}\text{ 。}$$

（2） 由立方公式，我們知道

$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3=3-2=1$。

所以，我們對分子與分母同乘以$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$，即得：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1\times(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\text{ 。}$$

【範例】：請試著將$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$有理化。

解　：由立方公式，我們知道：

$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3=5-2=3$。

所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以$(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$即可。

因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}=\frac{(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}{3}\text{ 。}$$

【範例】：請試著將$\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$有理化。

解　：由立方公式，我們知道：

$(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{7})^3+(\sqrt[3]{3})^3=7+3=10$。

所以，若將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以$(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})$即可。

因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}=\frac{(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})}=\frac{(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})}{10}\text{ 。}$$

【範例】：請化簡下列各式：(1) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=?$ (2) $\sqrt[3]{54}=?$ (3) $\sqrt[3]{\frac{7}{12}}=?$

解　：(1) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=\sqrt[3]{\frac{3\times5^2}{5\times5^2}}=\sqrt[3]{\frac{75}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{75}}{5}$ 。

(2) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times2}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$ 。

(3) $\sqrt[3]{\frac{7}{12}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2^2\times3}}=\sqrt[3]{\frac{7\times2\times3^2}{2^2\times3\times2\times3^2}}=\sqrt[3]{\frac{7\times2\times3^2}{(2\times3)^3}}=\frac{\sqrt[3]{126}}{2\times3}=\frac{\sqrt[3]{126}}{6}$ 。

【範例】：求解 $3\sqrt[3]{9}x=6\sqrt[3]{15}$ 。

解　：$x=\frac{6\sqrt[3]{15}}{3\sqrt[3]{9}}=\frac{2\sqrt[3]{15\times3}}{\sqrt[3]{9\times3}}=\frac{2\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2\sqrt[3]{45}}{3}$ 。

答：$x=\frac{2\sqrt[3]{45}}{3}$ 。

【範例】：化簡 $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}}\div\frac{2\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}=?$

解　：
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}}\div\frac{2\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}}\times\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{15}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{5}{18}\times\frac{2}{8\times15}\times\frac{4}{9}}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{5\times2^3}{2^4\times3^5\times5}}$$
$$=\frac{2}{2\times3}\sqrt[3]{\frac{1}{2\times3^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2^2\times3}{2\times3^2\times2^2\times3}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt[3]{12}}{6}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{12}}{18}$$ 。

6.平方根與立方根的比較大小：

（1）將根號前的係數移入根號內。

（2）化不同次方根為同次方根。

（3）比較被開方數的大小順序,即為方根的大小順序。

【範例】： 試比較 $2\sqrt{3}$ 與 $3\sqrt{2}$ 的大小順序。

解　： $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{12}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$

因為 $12<18$，所以 $\sqrt{12}<\sqrt{18}$，故可知 $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$。

【範例】： 試比較 $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt[3]{3}$ 的大小順序。

解　： $\sqrt{2}=(2^{\frac{1}{2}})=(2^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$。

$\sqrt[3]{3}=(3^{\frac{1}{3}})=(3^2)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$。

因為 $8<9$，所以 $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$，故可知 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$。

【範例】： 試比較 $3\sqrt[3]{2}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$ 的大小順序。

解　： $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=\sqrt[3]{2\times 27}=\sqrt[3]{54}$。

$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\times 2^3}=\sqrt[3]{3\times 8}=\sqrt[3]{24}$。

因為 $54>24$，所以 $\sqrt[3]{54}>\sqrt[3]{24}$，故可知 $3\sqrt[3]{2}>2\sqrt[3]{3}$。

7.立方根的近似值計算：

查表法：利用乘方開方表找出平方根與立方根的值，此種查表的方法就叫做**查表法**。

將根號內的數化為 $\sqrt{N}$，$\sqrt{10N}$ 或 $\sqrt{a^2N}=a\sqrt{N}$，在查表則可得。

【範例】：

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	$\sqrt{N^3}$	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
28	784	5.291503	16.73320	219.52	3.036589	6.542133	14.09460

則由上表可得知，$\sqrt[3]{28}=3.036589$，$\sqrt[3]{280}=6.542133$，$\sqrt[3]{2800}=14.09460$。

【範例】： 利用上一個範例中的表格，求出下列立方根的值。

（1） $\sqrt[3]{224}=$？　（2） $\sqrt[3]{0.28}=$？

解　：（1） $\sqrt[3]{224}=\sqrt[3]{8\times 28}=2\sqrt{28}=2\times 3.036589=6.073178$。

（2） $\sqrt[3]{0.28}=\sqrt[3]{\frac{280}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{280}}{10}=\frac{6.542133}{10}=0.6542133$。

小　試　身　手

【例題一】

計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{27}=3$　(2) $\sqrt[3]{1}=1$　(3) $\sqrt[3]{-125}=-5$　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{343}}=\dfrac{4}{7}$

【練習一】

計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{0.008}=0.2$　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{1}{10}$　(3) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}=\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}=-\dfrac{3}{2}$

(4) $\sqrt[3]{(-0.3)^3}=-0.3$

【例題二】

$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{8000}=$__$-15$___

$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{8000}$

$=-2+7-20=-15$

【練習二】

$\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}-\sqrt[3]{(-0.3)^3}+\sqrt[3]{-0.064}=$__$-1.6$__

$\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}-\sqrt[3]{(-0.3)^3}+\sqrt[3]{-0.064}$

$=-\dfrac{3}{2}-(-0.3)+(-0.4)$

$=-1.5+0.3-0.4$

$=-1.6$

【例題三】

計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{-3}\times\sqrt[3]{9}=$ ___-3___　　(3) $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{-4}}=$ ___$-\dfrac{1}{2}$___

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}\times\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}=$ ___1___　　(4) $\sqrt[3]{-56}=$ ___$-2\sqrt[3]{7}$___

【練習三】

計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{-60}\times\sqrt[3]{18}=$ ___$-6\sqrt[3]{5}$___　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=$ ___$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$___

(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3}}\div\sqrt[3]{9}=$ ___$-\dfrac{1}{3}$___　　(4) $\sqrt[3]{250}=$ ___$5\sqrt[3]{2}$___

解：(1) $\sqrt[3]{-60}\times\sqrt[3]{18}=-\sqrt[3]{1080}=-\sqrt[3]{2^3\times3^3\times5}=-6\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3}}\div\sqrt[3]{9}=$(2) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3}}\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{1}{3}$

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1\times2}{4\times2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

(4) $\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$

【例題四】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{(-x)^6}=$ ___x^2___　　(2) $\sqrt[3]{x^9}=$ ___x^3___　　(3) $x<0$，$\sqrt[3]{(-x)^{15}}=$ ___$-x^5$___

(4) 設 $a>0$，$b<0$，求 $\sqrt[3]{-a^3b^3}+\sqrt{a^2b^2}=$ ___$-ab+(-ab)=-2ab$___

【練習四】

化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{(-x)^{15}}$ ＝__$-x^5$___ (2) $\sqrt[3]{x^{21}}$ ＝___ x^7___ (3) $x<0$，$\sqrt[3]{(-x)^{12}}$ ＝___ x^4____

(4) 設 $a<0$，$b>0$，求 $\sqrt[3]{-a^3b^3}-\sqrt{a^2b^2}$ ＝__$-ab-(-ab)=0$__

【例題五】

計算下列各式：

(1) 設 $x<0$，化簡 $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{-8x^6}-\sqrt{4x^4}$。

(2) 設 a 、 b 為任意數，化簡 $\sqrt[3]{-8a^3}-\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt[3]{(-8)(-b)^3}$

解：(1) $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{-8x^6}-\sqrt{4x^4}$

$=x+(-x)+(-2x^2)-2x^2$

$=-4x^2$

(2) $\sqrt[3]{-8a^3}-\sqrt[3]{(a-b)^3}+\sqrt[3]{(-8)(-b)^3}$

$=-2a-(a-b)+2b$

$=-2a-a+b+2b=-3a+3b$

【練習五】

計算下列各式：

(1) 設 $x<0$，化簡 $\sqrt[3]{x^6}+\sqrt{x^4}+\sqrt[3]{-64x^9}-\sqrt{9x^6}$。

(2) 設 a 、 b 為任意數，化簡 $\sqrt[3]{-27a^3}-\sqrt[3]{(a+b)^6}+\sqrt[3]{(-0.125)(-b)^6}$

解：(1) $\sqrt[3]{x^6}+\sqrt{x^4}+\sqrt[3]{-64x^9}-\sqrt{9x^6}$

$=x^2+x^2+(-4x^3)-(-3x^3)$

$=2x^2-x^3$

(2) $\sqrt[3]{-27a^3}-\sqrt[3]{(a+b)^6}+\sqrt[3]{(-0.125)(-b)^6}$

$=-3a-(a+b)^2+(-0.5b^2)$

$=-3a-(a^2+2ab+b^2)-0.5b^2$

$=-a^2-2ab-1.5b^2)-3a$

【例題六】

若 a＝$2\sqrt{3}$，b＝$3\sqrt{2}$，c＝$2\sqrt[3]{3}$，d＝$3\sqrt[3]{2}$，試比較 a、b、c、d 之大小順序。

解：∵ $a=2\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^6\times 3^3}=\sqrt[6]{64\times 27}=\sqrt[6]{1728}$

$b=3\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^6\times 2^3}=\sqrt[6]{729\times 8}=\sqrt[6]{5832}$

$c=2\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^6\times 3^2}=\sqrt[6]{64\times 9}=\sqrt[6]{576}$

$d=3\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{3^6\times 2^2}=\sqrt[6]{729\times 4}=\sqrt[6]{2916}$

∴ $b>d>a>c$

【練習六】

若 a＝$5\sqrt{3}$，b＝$3\sqrt{5}$，c＝$5\sqrt[3]{3}$，d＝$3\sqrt[3]{5}$，試比較 a、b、c、d 之大小順序。

解：∵ $a=5\sqrt{3}=\sqrt[6]{5^6\times 3^3}$

$b=3\sqrt{5}=\sqrt[6]{3^6\times 5^3}$

$c=5\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{5^6\times 3^2}$

$d=3\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{3^6\times 5^2}$

∴ $a>c>b>d$

【例題七】

設 $3x+2y$ 的平方根為±2，$2x-y+3$ 的立方根為 2，求：

(1) x、y 之值；

(2) $\sqrt{x+y}-\sqrt[3]{5x+2y}$ 之值。

解：(1) ∵ $3x+2y$ 的平方根為±2　∴ $3x+2y=4$……①

∵ $2x-y+3$ 的立方根為 2　∴ $2x-y+3=8 \Rightarrow 2x-y=5$……②

將②×2 得到： $4x-2y=10$……③

將①＋② 得到： $7x=14$　∴ $x=2$ 代入①，

得到： $6+2y=4$　∴ $y=-1$。

(2) $\sqrt{x+y}-\sqrt[3]{5x+2y}=\sqrt{2+(-1)}-\sqrt[3]{10+(-2)}=1-2=-1$

【練習七】

設 $5x-2y-1$ 的平方根為 ± 3，$3x+y-5$ 的立方根為 1，求：

(1) x、y 之值；

(2) $\sqrt{8x+5y}-\sqrt[3]{(4x+3y)^3}$ 之值。

解：(1) $\because$ $5x-2y-1$ 的平方根為 ± 3 ， $\therefore$ $5x-2y-1=9$ $\Rightarrow$ $5x-2y=10$……①

$\because$ $3x+y-5$ 的立方根為 1 ， $\therefore$ $3x+y-5=1$ $\Rightarrow$ $3x+y=6$……②

將②×2 得到： $6x+2y=12$……③

將①＋② 得到： $11x=22$ ， $\therefore$ $x=2$ 代入②

得到： $6+y=6$ ， $\therefore$ $y=0$。

(2) $\sqrt{8x+5y}-\sqrt[3]{(4x+3y)^3}=\sqrt{16}-\sqrt[3]{8}=4-2=2$。

【例題八】

若 -2 是 $2x-3y-4$ 的立方根，± 2 是 $2x-y$ 的平方根，求：

(1) x 、 y 之值 ；

(2) $\sqrt{3x+y}-\sqrt[3]{6x-4y}$ 之值 。

解：(1) $\because$ -2 是 $2x-3y-4$ 的立方根，$\therefore$ $2x-3y-4=-8$ $\Rightarrow$ $2x-3y=-4$……①

$\because$ ± 2 是 $2x-y$ 的平方根 ，$\therefore 2x-y=4$……②

將①－② 得到： $-2y=-8$ ， $\therefore$ $y=4$ 代入②

得到： $2x-4=4$ ， $\therefore x=4$。

(2) $\sqrt{3x+y}-\sqrt[3]{6x-4y}=\sqrt{16}-\sqrt[3]{8}=4-2=2$。

【練習八】

若 -3 是 $-2x-y+1$ 的立方根，± 1 是 $x-3y+1$ 的平方根，求：

(1) x 、 y 之值。

(2) $\sqrt{2x+3y}-\sqrt[3]{3x-y-5}$ 之值。

解：(1) $\because$ -3 是 $-2x-y+1$ 的立方根，$\therefore -2x-y+1=-27$ $\Rightarrow$ $2x+y=28$……①

$\because$ ± 1 是 $x-3y+1$ 的平方根，$\therefore$ $x-3y+1=1$ $\Rightarrow x-3y=0$……②

將②×2 得到： $2x-6y=0$……③

將①－② 得到： $7y=28$ ， $\therefore$ $y=4$ 代入①

得到： $2x+4=28$，$\therefore x=12$。

(2) $\sqrt{2x+3y}-\sqrt[3]{3x-y-5}=\sqrt{36}-\sqrt[3]{27}=6-3=3$。

【例題九】

若 $1<x<5$，則 $\dfrac{\sqrt[3]{(x-5)^3}}{\sqrt{(x-5)^2}}-\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x}=?$

解： $\because\ 1<x<5 \Rightarrow -4<x-5<0$

$\because\ 1<x<5 \Rightarrow 0<x-1<4$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{(x-5)^3}}{\sqrt{(x-5)^2}}-\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x}$

$=\dfrac{x-5}{|x-5|}-\dfrac{|x-1|}{1-x}$

$=\dfrac{x-5}{5-x}-\dfrac{x-1}{1-x}$

$=-1-(-1)=0$

【練習九】

若 $-1<x<3$，則 $\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt{(x-3)^2}}-\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{1+x}=?$

解： $\because -1<x<3 \Rightarrow -4<x-3<0$

$\because -1<x<3 \Rightarrow 0<x+1<4$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt{(x-3)^2}}-\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{1+x}$

$=\dfrac{x-3}{|x-3|}-\dfrac{|x+1|}{1+x}$

$=\dfrac{x-3}{3-x}-\dfrac{x+1}{1+x}$

$=-1-1=-2$

【例題十】

先把 9261 作質因數分解，再求 $\sqrt[3]{9261}$ 的值。

解： $\because\ 9261=3^3\times7^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{9261}=3\times7=21$

【練習十】

先把 91125 作質因數分解，再求 91125 的立方根。

解： $\because\ 91125=3^6\times5^3$

$\therefore$ 91125 的立方根 $9\times5=45$

【例題十一】

某數的平方與它的一半的乘積是 27436，求某數＝？

解：設某數為 x，$\therefore x^2\times\dfrac{x}{2}=27436$

$\therefore\ x^3=54872=2^3\times19^3$

$\therefore\ x=38$

答：某數為 38。

【練習十一】

某數的立方的一半是 864，求某數＝？

解：設某數為 x，$\therefore x^3\times\dfrac{1}{2}=864$

$\therefore x^3=1728=2^6\times3^3$

$\therefore\ x=12$

答：某數為 12。

【例題十二】

欲使 540 為一完全立方數，則應乘最小正整數為 a，應除以最小正整數為 b，求 a、b 之值為何？

解： ∵ $540 = 2^2\times3^3\times5$

∴ a＝2×25＝10，

b＝4×5＝20。

【練習十二】

欲使 4725 化成一完全立方數，則應乘以最小正整數 a，或應除以最小正整數 b，求 a＋b＝？

解： ∵ $4725 = 5^2\times3^3\times7$

∴ a＝5×49＝245

b＝25×7＝175

則 a＋b＝245＋175＝420。

【例題十三】

滿足$10\le\sqrt[3]{n}<15$的正整數 n 共有幾個？

解：∵ $10\le\sqrt[3]{n}<15$

∴ $1000\le n<3375$

∴ 3374－1000＋1＝2375

【練習十三】

滿足$7\le\sqrt[3]{3n}<10$的正整數 n 共有幾個？

解：∵$7\le\sqrt[3]{3n}<10$

∴ $343\le 3n<1000$

$\Rightarrow\ 114\frac{1}{3}=\frac{343}{3}\le n<\frac{1000}{3}=333\frac{1}{3}$

∴ 333－115＋1＝219

【例題十四】

設下列各方根為整數求x的最小正整數值：(1) $\sqrt[3]{12x}$ (2) $\sqrt[3]{90x}$ (3) $\sqrt[3]{1575x}$

解：(1) ∵ $\sqrt[3]{12x}=\sqrt[3]{2^2\times3\times x}$ ∴ $x=2\times3^2=18$

(2) ∵ $\sqrt[3]{90x}=\sqrt[3]{2\times3^2\times5\times x}$ ∴ $x=2^2\times3\times5^2=300$

(3) ∵ $\sqrt[3]{1575x}=\sqrt[3]{3^2\times5^2\times7\times x}$ ∴$x=3\times5\times7^2=735$

【練習十四】

設下列各方根為整數求x的最小正整數值：(1) $\sqrt[3]{6x}$ (2) $\sqrt[3]{120x}$ (3) $\sqrt[3]{4356x}$

解：(1) ∵$\sqrt[3]{6x}=\sqrt[3]{2\times3\times x}$，∴ $x=2^2\times3^2=36$

(2) ∵ $\sqrt[3]{120x}=\sqrt[3]{2^3\times3\times5\times x}$，∴ $x=3^2\times5^2=225$

(3) ∵$\sqrt[3]{4356x}=\sqrt[3]{2^2\times3^2\times11^2\times x}$，∴ $x=2\times3\times11=66$

【例題十五】

設x為整數，求下列各方根中x的最小整數值與最大整數值：

(1) $2.5<\sqrt[3]{x}\le 3$　(2) $4\le\sqrt[3]{10x}\le 8$

解：(1) $\because\ 2.5<\sqrt[3]{x}\le 3$　$\therefore\ 15.625<x\le 27$

$\therefore\ x$的最小整數值為16，最大整數值為27。

(2) $\because\ 4\le\sqrt[3]{10x}\le 8$　$\therefore\ 64\le 10x\le 512\ \Rightarrow\ 6.4\le x\le 51.2$

$\therefore\ x$的最小整數值為7，最大整數值為51。

【練習十五】

設x為整數，求下列各方根中x的最小整數值與最大整數值：

(1) $3<\sqrt[3]{2x}\le 5$　(2) $-2\le\sqrt[3]{0.3x}\le 3$

解：(1) $\because\ 3<\sqrt[3]{2x}\le 5$　$\therefore\ 27<2x\le 125\ \Rightarrow\ 13.5<x\le 62.5$

$\therefore\ x$的最小整數值為14，最大整數值為62。

(2) $\because\ -2\le\sqrt[3]{0.3x}\le 3$　$\therefore\ -8\le 0.3x\le 27\ \Rightarrow\ -26\frac{2}{3}=-\frac{80}{3}\le x\le 90$

$\therefore\ x$的最小整數值為-26，最大整數值為90。

【例題十六】

設a、b、c、d皆為正整數，若$\sqrt[3]{392}=7.31\cdots\cdots$，欲使$\sqrt[3]{392+a}$、$\sqrt[3]{392-b}$、$\sqrt[3]{392\times c}$、$\sqrt[3]{\frac{392}{d}}$均為正整數，當$a$、$b$、$c$、$d$均為最小正整數時，求$a$、$b$、$c$、$d$之最小值。

解：$\because\ \sqrt[3]{392}=7.31\cdots\cdots\Rightarrow\ 8^3=512$，$7^3=343$

$\therefore$ 當$\sqrt[3]{392+a}$為正整數，則$a=512-392=120$

$\therefore$ 當$\sqrt[3]{392-b}$為正整數，則$b=392-343=49$

$\because\ 392=2^3\times 7^2$

$\therefore$ 當$\sqrt[3]{392\times c}$為正整數，$\therefore c=7$。

當$\sqrt[3]{\frac{392}{d}}$為正整數，$\therefore d=7^2=49$。

$\therefore\ a=120$、$b=49$、$c=7$、$d=49$。

【練習十六】

欲使$\sqrt[3]{360}$為正整數，則應乘的最小正整數為a，應除的最小正整數為b，則應加的最小正整數為c，應減的最小正整數為d，求$\sqrt[3]{a-b+c+2d}$之值。

解：∵ $360=2^3\times3^2\times5$

∴ 當$\sqrt[3]{360\times a}$為正整數，∴ $a=3\times5^2=75$

當$\sqrt[3]{\dfrac{360}{b}}$為正整數，∴ $b=3^2\times5=45$

∵ $7^3=343<360<512=8^3$

∴ 當$\sqrt[3]{360+c}$為正整數，則$c=512-360=152$。

∴ 當$\sqrt[3]{360-d}$為正整數，則$d=360-343=17$。

∴ $\sqrt[3]{a-b+c+2d}=\sqrt[3]{75-45+152+34}=\sqrt[3]{216}=6$。

【例題十七】

設$\sqrt[3]{70-a}$為正整數，且a為介於 20 與 70 之間的正整數，則a之值為何？

解：∵ $20<a<70$

$\Rightarrow -20>-a>-70$

$\Rightarrow 70-20>70-a>70-70$

$\Rightarrow 50>70-a>0$

∴ $4>\sqrt[3]{50}>\sqrt[3]{70-a}>0$

∴ $\sqrt[3]{70-a}=1$，2，3

∴ $a=69$，62 或 43。

【練習十七】

設$\sqrt[3]{150-a}$為正整數，且a為介於 20 與 50 之間的正整數，則a之值為何？

解：∵ $20<a<50$

$\Rightarrow -20>-a>-50$

$\Rightarrow 150-20>150-a>150-50$

$\Rightarrow 130>150-a>100$

∴ $6>\sqrt[3]{130}>\sqrt[3]{150-a}>\sqrt[3]{100}>4$

∴ $\sqrt[3]{150-a}=5$

∴ $a=25$。

【例題十八】

設$\sqrt[3]{3}=$p，$\sqrt[3]{5}=$q，$\sqrt[3]{7}=$r，

試以 p、q、r 表示$\sqrt[3]{0.00084}$之值

解：

$$\sqrt[3]{0.00084}=\sqrt[3]{\frac{84}{100000}}=\sqrt[3]{\frac{840}{1000000}}=\frac{\sqrt[3]{840}}{100}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2^3\times3\times5\times7}}{100}=\frac{2\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}}{100}=\frac{pqr}{50}$$ 。

【練習十八】

設$\sqrt[3]{2}=$p，$\sqrt[3]{3}=$q，$\sqrt[3]{5}=$r，

試以 p、q、r 表示$\sqrt[3]{810}$之值

解：

$$\sqrt[3]{810}=\sqrt[3]{2\times3^4\times5}=3\sqrt[3]{2\times3\times5}=3pqr$$ 。

【例題十九】

下列各方根的值，何者介於 4 與 5 之間？

$\sqrt[3]{47}$ 、$\sqrt[3]{54}$ 、$\sqrt[3]{75}$ 、$\sqrt[3]{95}$ 、$\sqrt[3]{130}$ 、$\sqrt[3]{110}$ 、$\sqrt[3]{145}$ 。

解： ∵ 43＝64，53＝125，

∴ 介於 4 與 5 之間有：

$\sqrt[3]{75}$ 、$\sqrt[3]{95}$ 、 $\sqrt[3]{110}$

【練習十九】

下列各方根的值，何者介於 3 與 4 之間？

$\sqrt[3]{7}$ 、$\sqrt[3]{17}$ 、$\sqrt[3]{30}$ 、$\sqrt[3]{45}$ 、$\sqrt[3]{55}$ 、$\sqrt[3]{60}$ 、$\sqrt[3]{70}$ 。

解： ∵ 33＝27，43＝64，

∴ 介於 3 與 4 之間有：

$\sqrt[3]{30}$ 、$\sqrt[3]{45}$ 、$\sqrt[3]{55}$ 、$\sqrt[3]{60}$

【例題二十】

由表查知 $\sqrt[3]{54}=3.779769$，$\sqrt[3]{540}=8.143253$，$\sqrt[3]{5400}=17.54411$

求(1) $\sqrt[3]{540000}$ (2) $\sqrt[3]{0.0054}$ (3) $\sqrt[3]{0.054}$

解：(1) $\sqrt[3]{540000}=10\sqrt[3]{540}=10\times 8.143253=81.43253$

(2) $\sqrt[3]{0.0054}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{10000}}=\dfrac{\sqrt[3]{5400}}{100}=\dfrac{17.54411}{100}=0.1754411$

(3) $\sqrt[3]{0.054}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{1000}}=\dfrac{\sqrt[3]{54}}{10}=\dfrac{3.779769}{10}=0.3779769$

【練習二十】

由表查知 $\sqrt[3]{33}=3.207534$，$\sqrt[3]{330}=6.910423$，$\sqrt[3]{3300}=14.88806$

求(1) $\sqrt[3]{330000}$ (2) $\sqrt[3]{0.0033}$ (3) $\sqrt[3]{0.033}$

解： (1) $\sqrt[3]{330000}=10\sqrt[3]{330}=10\times 6.910423=69.10423$

(2) $\sqrt[3]{0.0033}=\sqrt[3]{\dfrac{33}{10000}}=\dfrac{\sqrt[3]{3300}}{100}=\dfrac{14.88806}{100}=0.1488806$

(3) $\sqrt[3]{0.033}=\sqrt[3]{\dfrac{33}{1000}}=\dfrac{\sqrt[3]{33}}{10}=\dfrac{3.207534}{10}=0.3207534$

【例題二十一】

設 $\sqrt[3]{53}=3.756$，且 $\sqrt[3]{x}=75.12$，求 x 之值

解： ∵ $\sqrt[3]{x}=75.12=3.756\times 20=\sqrt[3]{53}\times 20$

∴ $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{20^3\times 53}=\sqrt[3]{8000\times 53}$

∴ $x=424000$。

【練習二十一】

設 $\sqrt[3]{50}=3.684$，且 $\sqrt[3]{x}=11.052$，求 x 之值

解： ∵ $\sqrt[3]{x}=11.052=3.684\times 3=\sqrt[3]{50}\times 3$

∴ $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{3^3\times 50}=\sqrt[3]{27\times 50}$

∴ $x=1350$。