

■ 利用十字交乘法因式分解

(1) 利用十字交乘法因式分解：

上一章所學的是將兩個 x 的一次式乘積展開後成為 x 的二次三項式，

$$\text{例如: } (x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

$$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$$

$$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$$

$$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$$

這一節我們要學的是將 x 的二次三項式分解成兩個 x 的一次式相乘，

$$\text{例如: } x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

由上面的例子可以發現，二次三項式的 x^2 係數是兩個一次式的 x 係數的乘積，二次三項式的常數項係數是兩個一次式常數項係數的乘積，而二次三項式的中間項係數是兩個一次式常數項係數的和或差。

如右圖：

$$\begin{array}{r} x \diagup \quad \diagdown 2 \\ x \diagup \quad \diagdown 3 \\ \hline x^2 + (2+3)x + 6 \\ = x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \diagup \quad \diagdown -2 \\ x \diagup \quad \diagdown 3 \\ \hline x^2 + (-2+3)x - 6 \\ = x^2 + x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \diagup \quad \diagdown 2 \\ x \diagup \quad \diagdown -3 \\ \hline x^2 + (2-3)x - 6 \\ = x^2 - x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \diagup \quad \diagdown -2 \\ x \diagup \quad \diagdown -3 \\ \hline x^2 - 2 - 3x + 6 \\ = x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

【範例】：因式分解下列各式：(1) $x^2-2x-24$ (2) $x^2+7ax-18a^2$

解：

$$(1) \quad \begin{array}{r} 1 \diagup \quad \diagdown -6 \\ 1 \diagup \quad \diagdown +4 \\ \hline -6 + 4 = -2 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 1 \diagup \quad \diagdown +9a \\ 1 \diagup \quad \diagdown -2a \\ \hline +9a - 2a = +7a \end{array}$$

$$x^2-2x-24=(x-6)(x+4) \quad x^2+7ax-18a^2=(x+9a)(x-2a)$$

【範例】：因式分解下列各式：(1) $3x^2 - 6x - 24$ (2) $12x^2 - 16x + 5$

解：

$$(1) \quad \begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ \hline +6 \end{array} \quad \begin{array}{r} +6 \\ -4 \\ \hline +6 -12 = -6 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 6 \\ 2 \\ \hline -5 \\ -1 \\ \hline -6 -10 = -16 \end{array}$$

$$3x^2 - 6x - 24 = (3x + 6)(x - 4) \quad 12x^2 - 16x + 5 = (6x - 5)(2x - 1)$$

【範例】：因式分解下列各式：(1) $8x^6 - 7x^3 - 1$ (2) $x^5 - 2x^3 - 8x$

解：(1)

$$\begin{array}{r} 8x^3 \\ 1x^3 \\ \hline +1 \\ -1 \\ \hline -8x^3 + 1x^3 = -7x^3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 8x^6 - 7x^3 - 1 &= (8x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^5 - 2x^3 - 8x = x(x^4 - 2x^2 - 8)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2 \\ \hline -4 \\ +2 \\ \hline +2x^2 - 4x^2 = -2x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } x^5 - 2x^3 - 8x &= x(x^2 + 2)(x^2 - 4) \\ &= x(x^2 + 2)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

【範例】：因式分解多項式 $6a^2b^2 - abc - 15c^2$ 。

解： $6a^2b^2 - abc - 15c^2 = 6(ab)^2 - ab \cdot c - 15c^2$

$$\begin{array}{r} 2ab \\ 3ab \\ \hline +3c \\ -5c \\ \hline -10abc + 9abc = -abc \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 6a^2b^2 - abc - 15c^2 &= 6(ab)^2 - ab \cdot c - 15c^2 \\ &= (2ab + 3c)(3ab - 5c) \end{aligned}$$

$$\text{答: } 6a^2b^2 - abc - 15c^2 = (2ab + 3c)(3ab - 5c)$$



小試身手

【例題一】《 x 項係數是 1、常數項為正數》

$$(1) \text{ 分解 } x^2 + 12x + 20 = (x + 2)(x + 10)$$

$$(2) \text{ 分解 } x^2 + 4x + 3 = (x + 2)(x + 10)$$

【練習一】《 x 項係數是 1、常數項為正數》

$$(1) \text{ 分解 } x^2 - 16x + 15 = (x - 1)(x - 15)$$

$$(2) \text{ 分解 } x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

【例題二】《 x 項係數是 1、常數項為負數》

$$(1) \text{ 分解 } x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$$

$$(2) \text{ 分解 } x^2 + 19x - 20 = (x + 20)(x - 1)$$

【練習二】《 x 項係數是 1、常數項為負數》

$$(3) \text{ 分解 } x^2 - 7x - 30 = (x + 3)(x - 10)$$

$$(4) \text{ 分解 } -18 - 7x + x^2 = (x + 2)(x - 9)$$

【例題三】《先整理再利用十字交乘法因式分解》

$$(1) \text{ 分解 } (x + 1)(x - 2) - 4$$

$$(2) \text{ 分解 } 5x^3y - 25x^2y^2 + 30xy^3$$

$$\text{解: (1)} \quad (x + 1)(x - 2) - 4$$

$$(2) \quad 5x^3y - 25x^2y^2 + 30xy^3$$

$$= x^2 - 2x + x - 2 - 4$$

$$= 5xy(x^2 - 5xy + 6y^2)$$

$$= x^2 - x - 6$$

$$= 5xy(x - 2y)(x - 3y)$$

$$= (x + 2)(x - 3)$$

【練習三】《先整理再利用十字交乘法因式分解》

$$(1) \text{ 分解 } (a + b)^2 - (a + b) - 6$$

$$(2) \text{ 分解 } (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) - 32$$

$$\text{解: (1)} \quad (a + b)^2 - (a + b) - 6$$

$$(2) \quad (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) - 32$$

$$= (a + b + 2)(a + b - 3)$$

$$= (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 8)$$

$$= (x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

【例題四】

- (1) 分解 $8x^6 + 7x^3 - 1$
 (2) 分解 $6x^5 - 11x^3 + 4x$

解：(1) $8x^6 + 7x^3 - 1$
 $= (x^3 + 1)(8x^3 - 1)$
 $= (x + 1)(x^2 - x + 1) [(2x)^3 - 1^3]$
 $= (x + 1)(x^2 - x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
 (2) $6x^5 - 11x^3 + 4x$
 $= x(6x^4 - 11x^2 + 4)$
 $= x(3x^2 - 4)(2x^2 - 1)$

【練習四】

- (1) 分解 $6x^8 - 13x^4 + 6$
 (2) 分解 $6x^6 + 17x^4 + 7x^2$
 解：(1) $6x^8 - 13x^4 + 6$
 $= (2x^4 - 3)(3x^4 - 2)$
 (2) $6x^6 + 17x^4 + 7x^2$
 $= x^2(6x^4 + 17x^2 + 7)$
 $= x^2(2x^2 + 1)(3x^2 + 7)$

【例題五】

- (1) 分解
- $6x^2 + xy - 35y^2$

- (2) 分解
- $3x^2 - 4xy - 7y^2$

解：(1) $6x^2 + xy - 35y^2$
 $= (2x + 5y)(3x - 7y)$

(2) $3x^2 - 4xy - 7y^2$
 $= (x + y)(3x - 7y)$

【練習五】

- (1) 分解
- $10a^2 + ab - 21b^2$

- (2) 分解
- $14a^2 + 33ab - 5b^2$

解：(1) $10a^2 + ab - 21b^2$
 $= (2a + 3b)(5a - 7b)$

(2) $14a^2 + 33ab - 5b^2$
 $= (2a + 5b)(7a - b)$

【例題六】

因式分解 $(x + y)^2 - 3(x + y) - 4$

解： $(x + y)^2 - 3(x + y) - 4$
 $= (x + y + 1)(x + y - 4)$

【練習六】

因式分解 $6(x + y)^2 - (x + y) - 15$

解： $6(x + y)^2 - (x + y) - 15$
 $= [2(x + y) + 3][3(x + y) - 5]$
 $= (2x + 2y + 3)(3x + 3y - 5)$

【例題七】

因式分解 $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) - 6$

解： $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) - 6$
 $= (x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 6$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 3)$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x - 1)(x + 3)$
 $= (x - 1)(x + 3)(x^2 + 2x + 2)$

【練習七】

因式分解 $(x^2 - 7x + 5)(x^2 - 7x - 3) + 16$

解： $(x^2 - 7x + 5)(x^2 - 7x - 3) + 16$
 $= (x^2 - 7x)^2 + 2(x^2 - 7x) - 15 + 16$
 $= (x^2 - 7x)^2 + 2(x^2 - 7x) + 1$
 $= (x^2 - 7x + 1)^2$

【例題八】

$$\text{分解 } x^5 - 8x^3 - 9x$$

$$\text{解: } x^5 - 8x^3 - 9x$$

$$= x(x^4 - 8x^2 - 9)$$

$$= x(x^4 - 8x^2 - 9)$$

$$= x(x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= x(x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$= x(x + 3)(x - 3)(x^2 + 1)$$

【練習八】

$$\text{分解 } x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 4x + 8$$

$$\text{解: } x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 4x + 8$$

$$= (x^5 + 3x^3 - 4x) - (2x^4 + 6x^2 - 8)$$

$$= x(x^4 + 3x^2 - 4) - 2(x^4 + 3x^2 - 4)$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 4)(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 - 1)(x^2 + 4)$$

$$= (x - 2)(x + 1)(x - 1)(x^2 + 4)$$

【例題九】《先整理再十字交乘法》

$$\text{分解 } 2(x+1)^2 - (x+79)$$

$$\text{解: } 2(x+1)^2 - (x+79)$$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - x - 79$$

$$= 2x^2 + 4x + 2 - x - 79$$

$$= 2x^2 + 3x - 77$$

$$= (x+7)(2x-11)$$

【練習九】《先整理再十字交乘法》

$$\text{分解 } 10a^3bc - 3a^2b^2c - 18ab^3c$$

$$\text{解: } 10a^3bc - 3a^2b^2c - 18ab^3c$$

$$= abc(10a^2 - 3ab - 18b^2)$$

$$= abc(2a - 3b)(5a + 6b)$$

【例題十】《分組後再提出公因式》

$$\text{分解 } 2x^2 - x - xy + y - y^2$$

解:

$$2x^2 - x - xy + y - y^2$$

$$= (x^2 - y^2) + (x^2 - xy) - (x - y)$$

$$= (x + y)(x - y) + x(x - y) - (x - y)$$

$$= (x - y)(x + y + x - 1)$$

$$= (x - y)(2x + y - 1)$$

【練習十】《分組後再提出公因式》

$$\text{分解 } x^2y - x^2 + 3xy - 2x + 2y$$

$$\text{解: } x^2y - x^2 + 3xy - 2x + 2y$$

$$= (x^2y - x^2 + xy) + (2xy - 2x + 2y)$$

$$= (x^2y - x^2 + xy) + (2xy - 2x + 2y)$$

$$= x(xy - x + y) + 2(xy - x + y)$$

$$= (x + 2)(xy - x + y)$$

【例題十一】《令相同項=A》

$$\text{分解 } (x^2 - 5x + 8)(x^2 - 5x + 2) + 8$$

$$\text{解: 令 } A = x^2 - 5x$$

$$\therefore (A + 8)(A + 2) + 8$$

$$= A^2 + 10A + 16 + 8$$

$$= A^2 + 10A + 24$$

$$= (A + 4)(A + 6)$$

$$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

【練習十一】《令相同項=A》

$$\text{分解 } (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 7x + 7) - 3x^2$$

$$\text{解: 令 } A = x^2 + 7$$

$$\therefore (A + 5x)(A + 7x) - 3x^2$$

$$= A^2 + 12xA + 35x^2 - 3x^2$$

$$= A^2 + 12xA + 32x^2$$

$$= (A + 4x)(A + 8x)$$

$$= (x^2 + 7 + 4x)(x^2 + 7 + 8x)$$

$$= (x^2 + 4x + 7)(x^2 + 8x + 7)$$

$$= (x^2 + 4x + 7)(x + 1)(x + 7)$$

$$= (x + 1)(x + 7)(x^2 + 4x + 7)$$