

# 一元二次方程式

## 因式分解法解一元二次方程式

### 1. 一元二次方程式的定義：

#### (1) 一元二次方程式：

當一個方程式只有一個未知數，而此未知數的最高次數為 2 時，我們把它叫做一元二次方程式。

例如： $f(x) = x^2 + 3x + 2$  為一元二次式，(一元二次多項式)

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$  為一元二次方程式。

**【範例】**： $x^2 + 2x + 1 = 0$ ， $-3x^2 + 11x = 6$ ， $2x^2 = 5x$ ，這些都是一元二次方程式。

**【補充】**： $x^3 + 2x - 3 = 0$ ……一元三次方程式，

$x^2 + y^2 + 2x - y + 9 = 0$ ……二元二次方程式。

#### (2) 一元二次方程式的標準式：

$ax^2 + bx + c = 0$ ，其中  $a \neq 0$ 。

#### (3) 解(根)：

若  $x = x_0$  代入一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，滿足  $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ ，則稱  $x = x_0$  為此一元二次方程式的根。

**【範例】**：對於一元二次方程式  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ，

將  $x = 4$  代入原方程式得  $4^2 - 2 \times 4 - 8 = 0$ ，故  $x = 4$  為此方程式的根。

將  $x = -2$  代入原方程式  $(-2)^2 - 2 \times (-2) - 8 = 0$ ，故  $x = -2$  為此方程式的根。

在此  $x = 4$  或  $x = -2$  都為此方程式  $x^2 - 2x - 8 = 0$  之解或根。

#### (4) 一元二次方程式的次數與根的個數之關係：

一元一次多項式有一個根；一元二次多項式有兩個根；一元三次多項式有三個根；一般而言，一元  $n$  次多項式會有  $n$  個根。也就是說，多項式的根的個數會與多項式的次數相同。

**【範例】**： $x + 2 = 0$  為一元一次方程式，有一個解或稱有一個根。

**【範例】**： $x^2 - 3x + 2 = 0$  為一元二次方程式，將其分解成兩個一次式的乘積，

$(x - 2)(x - 1) = 0$ ，則其解為  $x = 1$  或  $x = 2$ ，

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$  有兩個解或稱有兩個根。

**【範例】**： $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  為一元三次方程式，將其分解成三個一次式的乘積，

$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ ，則其解為  $x = 1, 2, 3$ 。

$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  有三個解或稱有三個根。

(5) 解一元二次方程式的法則：

設法將一元二次式改寫為兩個一元一次式的乘積。

**【範例】**：如果將  $x^2 + x - 6 = 0$  改寫為  $(x - 2)(x + 3) = 0$ ，

則  $(x - 2) = 0$  或  $(x + 3) = 0$ ， $\therefore x = 2$  或  $x = -3$ 。

## 2. 一元二次方程式的解題步驟：

a. 移項：先把式中各項移到等號左邊，使等號右邊為 0，並且合併同類項

化成標準式： $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a > 0$ )。

b. 將多項式分解：等號左邊的二次式分解成兩個一次因式的乘積。

例如： $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 。

c. 再令兩個一次因式分別等於 0，即可解得  $x = \alpha$  及  $x = \beta$ 。

**【範例】**：求出方程式  $x^2 + x = 6$  的解。

解： $\therefore x^2 + x - 6 = 0$

$\therefore (x - 2)(x + 3) = 0$ ，則  $x - 2 = 0$  或  $x + 3 = 0$

$\therefore x = 2$  或  $-3$ 。

**【範例】**：求出方程式  $2x^2 + 5x = 3x^2 - x - 2$  的解。

解： $\therefore 5x^2 + 4x = 3x^2 - x - 2$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 3x^2 + x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\therefore (x + 2)(2x + 1) = 0$ ，則  $x + 2 = 0$  或  $2x + 1 = 0$ 。

$\therefore x = -2$  或  $-\frac{1}{2}$ 。

**【範例】**：求出方程式  $15x^2 - x - 2 = 0$  的解。

解： $\therefore (5x - 2)(3x + 1) = 0$ ，則  $5x - 2 = 0$  或  $3x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{2}{5}$  或  $-\frac{1}{3}$ 。

## 3. 在上面的步驟中，可能發生的情況：

(1) 若  $c = 0$ ，標準式  $ax^2 + bx + c = 0$  改寫為  $x(ax + b) = 0$ ：

$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$

$\therefore$  解為  $x = 0$  或  $x = -\frac{b}{a}$ 。

**【範例】**：解方程式： $2x^2 - 5x = 0$ 。

解： $2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0$

$\therefore$  解為  $x = 0$  或  $x = \frac{5}{2}$ 。

**【範例】**：解方程式： $4x^2 + 6x = 0$ 。

$$\text{解} : 4x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x + 3) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{3}{2}。$$

**【範例】**：解方程式： $-3x^2 + 6x = 0$ 。

$$\text{解} : -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = 2。$$

**【範例】**：解方程式： $5x^2 + 20x = 0$ 。

$$\text{解} : 5x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 5x(x + 4) = 0$$

$$\therefore \text{解為 } x = 0 \text{ 或 } x = -4。$$

(2) 若  $b = 0$ ，標準式  $ax^2 + bx + c = 0$  改寫為  $ax^2 + c = 0$ ：

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}，$$

$$\text{如果 } -\frac{c}{a} > 0，\text{則解為 } x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}。$$

$$\text{如果 } -\frac{c}{a} < 0，\text{則 } x \text{ 為無實數解。}$$

**【範例】**：解方程式： $4x^2 - 9 = 0$ 。

$$\text{解} : 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

**【範例】**：解方程式： $9x^2 - 4 = 0$ 。

$$\text{解} : 9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

**【範例】**：解方程式： $(2x - 3)^2 - 16 = 0$ 。

$$\text{解} : (2x - 3)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = \pm 4$$

$$\therefore \text{當 } 2x - 3 = 4 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\text{當 } 2x - 3 = -4 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{答：} x = \frac{7}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$



【範例】：解方程式： $x^2 + 3x - 10 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -2 \\ x \quad \quad \quad +5 \\ \hline -2x + 5x = 3x \end{array}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } -5。$$

【範例】：解方程式： $x^2 - 9x + 20 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -4 \\ x \quad \quad \quad -5 \\ \hline -4x - 5x = -9x \end{array}$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } 5。$$

【範例】：解方程式： $2x^2 + 7x + 6 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad \quad +3 \\ x \quad \quad \quad +2 \\ \hline 3x + 4x = 7x \end{array}$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } -2。$$

【範例】：解方程式： $3x^2 + 5x - 12 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +3 \\ 3x \quad \quad \quad -4 \\ \hline 9x - 4x = 5x \end{array}$$

$$3x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(3x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } \frac{4}{3}。$$

【範例】：解方程式： $5x^2 - 6x - 8 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 5x \quad \quad \quad + 4 \\ x \quad \quad \quad \quad - 2 \\ \hline 4x - 10x = -6x \end{array}$$

$$5x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(5x+4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } -\frac{4}{5}。$$

【範例】：解方程式： $6x^2 - 11x + 4 = 0$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad \quad - 1 \\ 3x \quad \quad \quad - 4 \\ \hline -3x - 8x = -11x \end{array}$$

$$6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow (2x-1)(3x-4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{4}{3}。$$



## 小 試 身 手

### 【例題一】

解下列各方程式的解。

(1)  $6x^2 - 4x = 0$

(2)  $9x^2 = 4x$

(3)  $x^2 + 4x = 0$

解：(1)  $6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 2) = 0$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

(2)  $9x^2 = 4x \Rightarrow 9x^2 - 4x = 0$

$$\Rightarrow x(9x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } \frac{4}{9}$$

(3)  $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x + 4) = 0$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } -4$$

### 【練習一】

解下列各方程式的解。

(1)  $16x^2 - 8x = 0$

(2)  $10x^2 = -6x$

(3)  $2x^2 + 8x = 0$

解：(1)  $16x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 8x(2x - 1) = 0$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } \frac{1}{2}$$

(2)  $10x^2 = -6x \Rightarrow 10x^2 + 6x = 0$

$$\Rightarrow 2x(5x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } -\frac{3}{5}$$

(3)  $2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(x + 4) = 0$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } -4$$

### 【例題二】

解下列各方程式的解。

(1)  $25x^2 - 4 = 0$

(2)  $3x^2 = 27$

(3)  $x^2 - 9 = 0$

解：(1)  $25x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (5x)^2 - 2^2 = 0$

$$\Rightarrow (5x + 2)(5x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{5} \text{ 或 } x = \frac{2}{5}$$

(2)  $3x^2 = 27 \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } x = 3$$

(3)  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } x = 3$$

### 【練習二】

解下列各方程式的解。

(1)  $4x^2 - 9 = 0$

(2)  $x^2 = 16$

(3)  $2x^2 - 8 = 0$

解：(1)  $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0$

$$\Rightarrow (2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = \frac{3}{2}$$

(2)  $x^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 或 } x = 4$$

(3)  $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } x = 2$$

**【例題三】**

解下列各方程式的解。

(1)  $5x(2x+5)-4(2x+5)=0$

(2)  $3x(x-3)-4(x-3)=0$

解：(1)  $5x(2x+5)-4(2x+5)=0$

$$\Rightarrow (2x+5)(5x-4)=0$$

$$\therefore x = -\frac{5}{2} \text{ 或 } x = \frac{4}{5}$$

(2)  $3x(x-3)-4(x-3)=0$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-4)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 或 } x = \frac{4}{3}$$

**【例題四】**

解下列各方程式的解。

(1)  $x^2+3x-4=0$

(2)  $2x^2-3x=5$

(3)  $6x^2+7x-3=0$

(4)  $12x^2-23x=24$

解：(1)  $x^2+3x-4=0$

$$\Rightarrow (x-1)(x+4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-4$$

(2)  $2x^2-3x=5$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-5=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+1)=0$$

$$\therefore x = \frac{5}{2} \text{ 或 } x = -1$$

(3)  $6x^2+7x-3=0 \Rightarrow (3x-1)(2x+3)=0$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 或 } x = -\frac{3}{2}$$

(4)  $12x^2-23x=24$

$$\Rightarrow 12x^2-23x-24=0$$

$$\Rightarrow (3x-8)(4x+3)=0$$

$$\therefore x = \frac{8}{3} \text{ 或 } x = -\frac{3}{4}$$

**【練習三】**

解下列各方程式的解。

(1)  $(x-5)^2=4(x-5)$

(2)  $(x+1)+4x(x+1)=0$

解：(1)  $(x-5)^2=4(x-5)$

$$\Rightarrow (x-5)^2-4(x-5)=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-5-4)=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-9)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 或 } x=9$$

(2)  $(x+1)+4x(x+1)=0$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1+4x)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(5x+1)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 或 } x = -\frac{1}{5}$$

**【練習四】**

解下列各方程式的解。

(1)  $3x^2+18x+27=0$

(2)  $2x^2-5x=-2$

(3)  $15x^2-x-2=0$

(4)  $3x^2-9x-14=0$

解：(1)  $3x^2+18x+27=0$

$$\Rightarrow x^2+6x+9=0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x+3)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 或 } x = -3 \text{ (重根)}$$

(2)  $2x^2-5x=-2$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-1)=0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}$$

(3)  $15x^2-x-2=0$

$$\Rightarrow (3x+1)(5x-2)=0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } x = \frac{2}{5}$$

(4)  $3x^2-19x-14=0$

$$\Rightarrow (x-7)(3x+2)=0$$

$$\therefore x = 7 \text{ 或 } x = -\frac{2}{3}$$

**【例題五】**

解下列各方程式：

(1)  $3x^2 - 4x - 1 = -9x - 3$ 。

(2)  $(x+5)(x+3) = 8$ 。

(3)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 1 = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：(1) } 3x^2 - 4x - 1 &= -9x - 3 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(3x+2) = 0 \\ &\therefore x = -1 \text{ 或 } x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } (x+5)(x+3) &= 8 \\ &\Rightarrow x^2 + 8x + 15 - 8 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \\ &\therefore x = -1 \text{ 或 } x = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) } \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 1 &= 0 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 7x - 6 = 0 \\ &\Rightarrow (x+3)(3x-2) = 0 \\ &\therefore x = -3 \text{ 或 } x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**【例題六】**

解下列各一元二次方程式：

(1)  $(12x-5)^2 - (11x-4)^2 = 0$ 。

(2)  $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 110$ 。

(3)  $7(x-1)^2 + 10(x-1)(x+4) - 8(x+4)^2 = 0$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{(1) } (12x-5)^2 - (11x-4)^2 &= 0 \\ &\Rightarrow [(12x-5)+(11x-4)][(12x-5)-(11x-4)] = 0 \\ &\Rightarrow (23x-9)(x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{9}{23} \text{ 或 } x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 &= 110 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 110 \\ &\Rightarrow 3x^2 + 2 = 110 \Rightarrow 3x^2 = 108 \\ &\Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-6) = 0 \\ &\therefore x = -6 \text{ 或 } x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) } 7(x-1)^2 + 10(x-1)(x+4) - 8(x+4)^2 &= 0 \\ &\Rightarrow [(x-1)+2(x+4)][7(x-1)-4(x+4)] = 0 \\ &\Rightarrow (3x+7)(3x-23) = 0 \\ &\therefore x = -\frac{7}{3} \text{ 或 } x = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

**【練習五】**

解下列各方程式：

(1)  $2x^2 = 5x$ 。

(2)  $(x-3)(x-4) = 20$ 。

(3)  $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：(1) } 2x^2 = 5x &\Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \\ &\Rightarrow x(2x-5) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = \frac{5}{2}$$

(2)  $(x-3)(x-4) = 20$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-8) = 0$

$\therefore x = -1 \text{ 或 } x = 8$

(3)  $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}x)$

$\Rightarrow 6x^2 + 3x = 2 - x$

$\Rightarrow 6x^2 + 4x - 2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0$

$\therefore x = -1 \text{ 或 } x = \frac{1}{3}$

**【練習六】**

解下列各一元二次方程式：

(1)  $(7x-3)^2 - (5x-9)^2 = 0$ 。

(2)  $x^2 - (x-2)^2 = (x-4)^2$ 。

(3)  $5(x+2)^2 - 7(x+2)(x-3) - 6(x-3)^2 = 0$ 。

解：

$$\begin{aligned} \text{(1) } (7x-3)^2 - (5x-9)^2 &= 0 \\ &\Rightarrow [(7x-3)+(5x-9)][(7x-3)-(5x-9)] = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (12x-12)(2x+6) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 或 } x = -3$

(2)  $x^2 - (x-2)^2 = (x-4)^2$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + 4x - 4 = x^2 - 8x + 16$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-10) = 0$

$\therefore x = 2 \text{ 或 } x = 10$

(3)  $5(x+2)^2 - 7(x+2)(x-3) - 6(x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow [(x+2)-2(x-3)][5(x+2)+3(x-3)] = 0$

$\Rightarrow (-x+8)(8x+1) = 0$

$\therefore x = 8 \text{ 或 } x = -\frac{1}{8}$

## 【例題七】

解下列各一元二次方程式：

(1)  $(2x^2-x)^2 + 4(x-2x^2) + 3 = 0$ 。

(2)  $(x^2+3x-3)(x^2+3x-5) - 35 = 0$ 。

(3)  $(2x^2+3x)^2 - 8(2x^2+3x) - 9 = 0$ 。

解：(1)  $(2x^2-x)^2 + 4(x-2x^2) + 3 = 0$

$$\Rightarrow (2x^2-x)^2 - 4(2x^2-x) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x^2-x-1)(2x^2-x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x+1)(x+1)(2x-3) = 0$$

$$\therefore x=1, x=-\frac{1}{2}, x=-1 \text{ 或 } x=\frac{3}{2}$$

(2)  $(x^2+3x-3)(x^2+3x-5) - 35 = 0$

$$\Rightarrow (x^2+3x)^2 - 8(x^2+3x) + 15 - 35 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+3x)^2 - 8(x^2+3x) - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+3x-10)(x^2+3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+5)(x+1)(x+2) = 0$$

$$\therefore x=2, x=-5, x=-1 \text{ 或 } x=-2$$

(3)  $(2x^2+3x)^2 - 8(2x^2+3x) - 9 = 0$

$$\Rightarrow (2x^2+3x-9)(2x^2+3x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(x+3)(x+1)(2x+1) = 0$$

$$\therefore x=\frac{3}{2}, x=-3, x=1 \text{ 或 } x=-\frac{1}{2}$$

## 【例題八】

(1) 解  $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

(2)  $(x-2)^2 - 3|x-2| - 10 = 0$

解：(1) 解  $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

$$\Rightarrow (|x| - 2)(|x| + 3) = 0$$

$$\Rightarrow |x| = 2 \text{ 或 } |x| = -3 \text{ (不合)}$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } -2$$

(2)  $(x-2)^2 - 3|x-2| - 10 = 0$

$$\Rightarrow |x-2|^2 - 3|x-2| - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (|x-2| - 5)(|x-2| + 2) = 0$$

$$\Rightarrow |x-2| = 5 \text{ 或 } |x-2| = -2 \text{ (不合)}$$

$$\therefore x-2=5 \text{ 或 } -5 \quad \therefore x=7 \text{ 或 } -3$$

## 【練習七】

解下列各一元二次方程式：

(1)  $(x+2)^2 - 3(x+2) + 2 = 0$ 。

(2)  $(2x^2-3x)^2 - 8(2x^2-3x) - 9 = 0$

(3)  $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0$ 。

解：(1)  $(x+2)^2 - 3(x+2) + 2 = 0$

$$\Rightarrow (x+2-1)(x+2-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1) \times x = 0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 或 } x=0$$

(2)  $(2x^2-3x)^2 - 8(2x^2-3x) - 9 = 0$

$$\Rightarrow (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x-1)(x-3)(2x+3) = 0$$

$$\therefore x=1, x=\frac{1}{2}, x=3 \text{ 或 } x=-\frac{3}{2}$$

(3)  $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0$

$$\Rightarrow (x^2+5x-6)(x^2+5x+4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+6)(x+1)(x+4) = 0$$

$$\therefore x=1, x=-6, x=-1 \text{ 或 } x=-4$$

## 【練習八】

(1) 解  $x^2 + |x| - 12 = 0$

(2)  $2(2x+1)^2 - 4|2x+1| - 48 = 0$

解：(1) 解  $|x|^2 + |x| - 12 = 0$

$$\Rightarrow (|x| - 3)(|x| + 4) = 0$$

$$\Rightarrow |x| = 3 \text{ 或 } |x| = -4 \text{ (不合)}$$

$$\therefore x=3 \text{ 或 } -3$$

(2)  $2(2x+1)^2 - 4|2x+1| - 48 = 0$

$$\Rightarrow |2x+1|^2 - 2|2x+1| - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (|2x+1| - 6)(|2x+1| + 4) = 0$$

$$\Rightarrow |2x+1| = 6 \text{ 或 } |2x+1| = -4 \text{ (不合)}$$

$$\therefore 2x+1=6 \text{ 或 } -6 \quad \therefore x=\frac{5}{2} \text{ 或 } -\frac{7}{2}$$

## 【例題九】

- (1) 求以 3, 5 為二根之一元二次方程式。  
 (2) 設  $x^2+px+q=0$  之二根為 3, -2, 求  $p$ 、 $q$  之值。

解：(1)  $\because 3+5=8, 3 \times 5=15$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2-8x+15=0$

- (2)  $\because -p=3+(-2)=1,$   
 $q=3 \times (-2)=-6$   
 $\therefore p=-1, q=-6$

## 【例題十】

設 1 為  $x^2+ax+2=0$  之一根，且  $a$ 、 $b$  是  $x^2+5x+c=0$  之兩根，求  $3a+2b+c$  之值。

解：將  $x=1$  代入  $x^2+ax+2=0$   
 則  $1+a+2=0 \quad \therefore a=-3$   
 又  $-3+b=-5, -3 \times b=c$   
 $\therefore b=-2, -3 \times (-2)=c=6$   
 $\therefore 3a+2b+c=-9-4+6=-7$

## 【練習九】

- (1) 求以 -3, -5 為二根之一元二次方程式。  
 (2) 設  $x^2+bx+c=0$  之二根為 -3, 5, 求以  $b$ 、 $c$  為二根為之一元二次方程式。

解：(1)  $\because (-3)+(-5)=-8,$   
 $(-3) \times (-5)=15$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2+8x+15=0$

- (2)  $\because -b=(-3)+5=2,$   
 $c=(-3) \times 5=-15$   
 $\therefore b=-2, c=-15$

## 【練習十】

設 2 為  $x^2-4x+p=0$  之一根，且  $p$  為  $qx^2+(p-2)x+2p=0$  之一根，求(1)  $p$ 、 $q$  之值。

(2) 以  $p$ 、 $q$  為二根為之一元二次方程式。

解：(1) 將  $x=2$  代入  $x^2-4x+p=0$   
 則  $4-8+p=0 \quad \therefore p=4$   
 又將  $x=4, p=4$   
 代入  $qx^2+(p-2)x+2p=0$   
 $\therefore 16q+8+8=0, q=-1$   
 $\therefore b=-2, -3 \times (-2)=c=6$   
 $\therefore 3a+2b+c=-9-4+6=-7$   
 (2)  $\because 4+(-1)=3, 4 \times (-1)=-4$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2-3x-4=0$

**【例題十一】**

甲、乙兩生同解一個  $x^2$  項係數是 1 的二次方程式，甲將一次項  $x$  的係數看錯，解得兩根為 2 與 7，乙將常數項看錯，解得兩根為 1、-10，若此外無其他的錯誤，求正確的方程式及兩根。

解：  $\because 2+7=9, 2 \times 7=14$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2-9x+14=0$   
 又  $\because 1+(-10)=-9, 1 \times (-10)=-10$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2+9x-10=0$   
 $\therefore$  甲將一次項  $x$  的係數看錯，  
 乙將常數項看錯  
 $\therefore$  正確的方程式為  $x^2+9x+14=0$   
 $\therefore x=-2$  或  $-7$ ，即兩根為  $-2$ 、 $-7$

**【例題十二】**

設  $x$ 、 $y$  均不為零，且  $2x^2-xy-3y^2=0$ ，  
 求  $x:y$  的比值。

解：  $\because 2x^2-xy-3y^2=0$   
 $\Rightarrow (x+y)(2x-3y)=0$   
 $\therefore x=-y$  或  $x=\frac{3}{2}y$   
 $\therefore x:y$  的比值  $=-1$  或  $\frac{3}{2}$

**【練習十一】**

甲、乙兩生同解一個  $x^2$  項係數是 1 的二次方程式，甲將一次項  $x$  的係數看錯，解得兩根為 3 與 -6，乙將常數項看錯，解得兩根為 3、4，若此外無其他的錯誤，求正確的方程式及兩根。

解：  $\because 3+(-6)=-3, 3 \times (-6)=-18$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2+3x-18=0$   
 又  $\because 3+4=7, 3 \times 4=12$   
 $\therefore$  一元二次方程式為  $x^2-7x+12=0$   
 $\therefore$  甲將一次項  $x$  的係數看錯，  
 乙將常數項看錯  
 $\therefore$  正確的方程式為  $x^2-7x-18=0$   
 $\therefore x=-2$  或  $9$ ，即兩根為  $-2$ 、 $9$

**【練習十二】**

設  $x$ 、 $y$  均不為零，且  $4x^2-8xy-5y^2=0$ ，  
 求  $x:y$  的比值。

解：  $\because 4x^2-8xy-5y^2=0$   
 $\Rightarrow (2x-y)(2x-5y)=0$   
 $\therefore x=\frac{1}{2}y$  或  $x=\frac{5}{2}y$   
 $\therefore x:y$  的比值  $=\frac{1}{2}$  或  $\frac{5}{2}$