配方法解一元二次方程式

再前一節有提過，一元二次方程式為 $ax^2+bx+c=0$ 有以下幾種簡化的情況。

若 $c=0$，則 $x(ax+b)=0$，

若 $b=0$，則 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$，其中 $-\dfrac{c}{a}>0$，

若 $c\neq0$，$b\neq0$，則 $ax^2+bx+c=0$，

在範例 $6x^2-11x+4=0$ 中，可以分解成 $(2x-1)(3x-4)=0$，此一元二次方程式是可以分解為兩個一元一次式相乘。不過有些一元二次方程式無法分解為兩個一元一次式相乘。

如果考慮 $x^2-4x-1=0$，此一元二次方程式無法直接分解為兩個一元一次式相乘。因此，我們在這裡必須利用配方法來解此一元二次方程式。

配方法：

※配方法的步驟：

1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊。
2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方。
3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡。
4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解。

【範例】：利用配方法解 $ax^2+bx+c=0$，其中 a b c 均為常數，且 $a>0$。

解　：1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊：

$$ax^2+bx+c=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方：

$$\Rightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡：

$$\Rightarrow\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解：

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

所以一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為：

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 a b c 均為常數，且 $a>0$。

【範例】：利用配方法解 $x^2+8x+7=0$。

解　：1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊：

$x^2+8x+7=0 \Rightarrow x^2+8x=-7$

2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方：

$x^2+8x=-7 \Rightarrow x^2+8x+(\frac{8}{2})^2=-7+(\frac{8}{2})^2$

3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡：

$x^2+8x+(4)^2=-7+(4)^2 \Rightarrow (x+4)^2=9$

4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解：

$(x+4)^2=9 \Rightarrow x+4=\pm 3$

$\Rightarrow x=-7$ 或 -1　　　答：$x=-7$ 或 $x=-1$

【範例】：利用配方法解 $3x^2+12x-6=0$。

解　：1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊：

$3x^2+12x-6=0 \Rightarrow x^2+4x-2=0$

$\Rightarrow x^2+4x=2$

2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方：

$x^2+4x=2 \Rightarrow x^2+4x+(\frac{4}{2})^2=2+(\frac{4}{2})^2$

3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡：

$x^2+4x+(2)^2=2+(2)^2 \Rightarrow (x+2)^2=6$

4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解：

$(x+2)^2=6 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{6}$

$\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{6}$　　　答：$x=-2+\sqrt{6}$ 或 $-2-\sqrt{6}$。

※注意：找k使得x^2+bx+k為完全平方，是在配方法中最重要的一個動作。

【範例】：有一多項式為x^2+4x+c，求c，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because\ x^2+4x=(x^2+4x+4)-4$

$=(x+2)^2-4$

$\therefore\ x^2+4x+4=(x+2)^2$，則 $c=4$。

【範例】：有一多項式為$2x^2+4x+d$，求d，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because\ 2x^2+4x=2(x^2+2x)$

$=2(x^2+2x+1)-2\times1$

$=2(x+1)^2-2$

$\therefore\ 2x^2+4x+2=2(x+1)^2$，因此 $d=2$。

【範例】：有一多項式為$3x^2-2x+c$，求c，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because\ 3x^2-2x=3(x^2-\frac{2}{3}x)$

$=3[x^2-\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})]^2-3\times\frac{1}{9}$

$=3(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}$

$\therefore 3x^2-2x+\frac{1}{3}=3(x-\frac{1}{3})^2$，因此 $c=\frac{1}{3}$。

【範例】：有一多項式為$8x^2-x+a$，求a，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because\ 8x^2-x=8(x^2-\frac{1}{8}x)$

$=8[x^2-\frac{1}{8}x+(\frac{1}{16})^2]-8\times\frac{1}{256}$

$=8(x-\frac{1}{16})^2-\frac{1}{32}$

$\therefore\ 8x^2-x+\frac{1}{32}=8(x-\frac{1}{16})^2$，因此 $a=\frac{1}{32}$。

【範例】：有一多項式為$\frac{3}{2}x^2-4x+b$，求b，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because\ \frac{3}{2}x^2-4x=\frac{3}{2}(x^2-\frac{8}{3}x)$

$=\frac{3}{2}[x^2-\frac{8}{3}x+(\frac{4}{3})^2]-\frac{3}{2}\times\frac{16}{9}$

$=\frac{3}{2}(x-\frac{4}{3})^2-\frac{8}{3}$

$\therefore\ \frac{3}{2}x^2-4x+\frac{8}{3}=\frac{3}{2}(x-\frac{4}{3})^2$，因此$b=\frac{8}{3}$。

【範例】：有一多項式為$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+a$，求$a$，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because$ $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}(x^2-2x)$

$$=\frac{1}{4}(x^2-2x+1)-\frac{1}{4}\times 1$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x-1)^2$，因此 $a=\frac{1}{4}$。

【範例】：有一多項式為$\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{5}x+a$，求$a$，使得此多項式為完全平方式。

解　：$\because$ $\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{5}x=\frac{8}{7}(x^2+\frac{7}{40}x)$

$$=\frac{8}{7}[x^2+\frac{7}{40}x+(\frac{7}{80})^2]-\frac{8}{7}\times\frac{49}{6400}$$

$$=\frac{8}{7}(x+\frac{7}{80})^2-\frac{7}{800}$$

$\therefore$ $\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{7}{800}=\frac{8}{7}(x+\frac{7}{80})^2$，因此 $a=\frac{7}{800}$。

【範例】：利用配方法解$x^2-4x-1=0$。

解　：$x^2-4x-1=0 \Rightarrow x^2-4x=1$

$\Rightarrow x^2-4x+(-2)^2=1+(-2)^2$

$\Rightarrow (x-2)^2=1+4=5$

$\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$

答：$x=2+\sqrt{5}$或$x=2-\sqrt{5}$

【範例】：利用配方法解$2x^2-12x+18=0$。

解　：$2x^2-12x+18=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0$

$\Rightarrow x^2-6x=-9$

$\Rightarrow x^2-6x+(-3)^2=-9+(-3)^2$

$\Rightarrow (x-3)^2=-9+9=0$

$\Rightarrow x-3=0$

$\Rightarrow x=3$ （重根）

答：$x=3$ （重根）

小 試 身 手

【例題一】

完成下列的表格。

(1) $x^2-6x+\underline{\quad 9 \quad}=(x-\underline{\quad 3 \quad})^2$

(2) $x^2+5x+\underline{\quad \frac{25}{4} \quad}=(x+\underline{\quad \frac{5}{2} \quad})^2$

(3) $x^2-\frac{2}{3}x+\underline{\quad \frac{1}{9} \quad}=(x-\underline{\quad \frac{1}{3.} \quad})^2$

【練習一】

完成下列的表格。

(1) $x^2+3x+\underline{\quad \frac{9}{4} \quad}=(x+\underline{\quad \frac{3}{2} \quad})^2$

(2) $x^2-2x+\underline{\quad 1 \quad}=(x+\underline{\quad 1 \quad})^2$

(3) $x^2+\frac{4}{5}x+\underline{\quad \frac{4}{25} \quad}=(x+\underline{\quad \frac{2}{5} \quad})^2$

【例題二】

利用配方法解下列各方程式的解。

(1) $x^2+10x-30=0$。

(2) $2x^2-6x-3=0$。

(3) $2x^2+4x-2=0$。

解：(1) $x^2+10x-30=0$

$\Rightarrow x^2+10x=30$

$\Rightarrow x^2+10x+5^2=30+5^2$

$\Rightarrow (x+5)^2=55$

$\Rightarrow x+5=\pm\sqrt{55}$

$\therefore x=-5\pm\sqrt{55}$

(2) $2x^2-6x-3=0$

$\Rightarrow x^2-3x=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x^2-3x+(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2=\frac{15}{4}$

$\Rightarrow x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

(3) $2x^2+4x-2=0$

$\Rightarrow x^2+2x=1$

$\Rightarrow x^2+2x+1^2=1+1^2$

$\Rightarrow (x+1)^2=2$

$\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$

【練習二】

利用配方法解下列各方程式的解。

(1) $-x^2+6x-3=0$。

(2) $x^2-2x-1=0$。

(3) $x^2-34x+288=0$。

解：(1) $-x^2+6x-3=0$

$\Rightarrow x^2-6x=-3$

$\Rightarrow x^2-6x+3^2=-3+3^2$

$\Rightarrow (x-3)^2=6$

$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=3\pm\sqrt{6}$

(2) $x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow x^2-2x=1$

$\Rightarrow x^2-2x+1^2=1+1^2$

$\Rightarrow (x-1)^2=2$

$\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

(3) $x^2-34x+288=0$

$\Rightarrow x^2-34x=-288$

$\Rightarrow x^2-34x+17^2=-288+17^2$

$\Rightarrow (x-17)^2=1$

$\Rightarrow x-17=\pm 1$

$\therefore x=18$ 或 16

【例題三】

利用配方法解下列各方程式的解。

(1) $x^2-6x+4=0$。

(2) $2x^2-3x-1=0$。

解：

(1) $x^2-6x+4=0$

$\Rightarrow x^2-6x=-4$

$\Rightarrow x^2-6x+3^2=-4+3^2$

$\Rightarrow (x-3)^2=5$

$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=3\pm\sqrt{5}$

(2) $2x^2-3x-1=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}+(\frac{3}{4})^2$

$\Rightarrow (x-\frac{3}{4})^2=\frac{17}{16}$

$\Rightarrow \Rightarrow x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

【練習三】

利用配方法解下列各方程式的解。

(1) $x^2+4x-12=0$。

(2) $4x^2+27x+18=0$。

解：

(1) $x^2+4x-12=0$

$\Rightarrow x^2+4x=12$

$\Rightarrow x^2+4x+2^2=12+2^2$

$\Rightarrow (x+2)^2=16$

$\Rightarrow x+2=\pm4$

$\therefore x=2$ 或 -6

(2) $4x^2+27x+18=0$

$\Rightarrow x^2+\frac{27}{4}x=-\frac{9}{2}$

$\Rightarrow x^2+\frac{27}{4}x+(\frac{27}{8})^2=-\frac{9}{2}+(\frac{27}{8})^2$

$\Rightarrow (x+\frac{27}{8})^2=\frac{441}{64}$

$\Rightarrow x+\frac{27}{8}=\pm\frac{21}{8}$ $\therefore$ $x=-\frac{3}{4}$ 或 -6

【例題四】

$4x^2-(2n-1)x+9$ 為完全平方式，求 n 之值。

解：$\because$ $4x^2-(2n-1)x+9$ 為完全平方式

$\therefore D=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow [-(2n-1)]^2-4\times4\times9=0$

$\Rightarrow (2n-1)^2=16\times9$

$\Rightarrow 2n-1=\pm4\times3=\pm12$

$\therefore 2n=13$ 或 -11

$\therefore n=\frac{13}{2}$ 或 $-\frac{11}{2}$

【練習四】

設 $2x^2-5x+1$ 加上一常數 k 後成為完全平方式，求 k 之值。

解：$\because$ $2x^2-5x+1+k$ 為完全平方式

$\therefore D=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (-5)^2-4\times2\times(1+k)=0$

$\Rightarrow 25-8(1+k)=0$

$\Rightarrow 1+k=\frac{25}{8}$ $\therefore k=\frac{17}{8}$

【例題五】

設$(x-m)(x-1)+1$為完全平方式，求m之值。

解：$\because$ $(x-m)(x-1)+1$為完全平方式

$\therefore$ $x^2-(m+1)x+(m+1)$為完全平方式

$\therefore$ $D=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow$ $[-(m+1)]^2-4\times1\times(m+1)=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)^2-4(m+1)=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m+1-4)=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m-3)=0$

$\therefore$ $m=-1$ 或 $m=3$

【練習五】

設$x^2-2mx+(2m+3)$為完全平方式，求m之值。

解：$\because$ $x^2-2mx+(2m+3)$為完全平方式

$\therefore$ $D=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow$ $(-2m)^2-4\times1\times(2m+3)=0$

$\Rightarrow$ $4m^2-4(2m+3)=0$

$\Rightarrow$ $m^2-2m-3=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m-3)=0$

$\therefore$ $m=-1$ 或 $m=3$

【例題六】

利用配方法將$4x^2-8x+15$化為$4(x+p)^2+q$的形式，求p、q之值。

解：$\because$ $4x^2-8x+15=4(x^2-2x)+15$

$=4(x^2-2x+1)+11=4(x-1)^2+11$

$=4(x+p)^2+q$

$\therefore$ $p=-1$ ， $q=11$

【練習六】

設$4x^2-4x-17=4(x+p)^2+q$，求p、q之值。

解：$\because$ $4x^2-4x-17=4(x^2-x)-17$

$=4[x^2-x+(\frac{1}{2})^2]-18$

$=4(x-\frac{1}{2})^2-18$

$=4(x+p)^2+q$

$\therefore$ $p=-\frac{1}{2}$ ， $q=-18$

【例題七】

利用配方法將$3x^2-2x-21=0$化成$(x+p)^2=a$，求$p+a$之值。

解：$\because$ $3x^2-2x-21=0$

$\Rightarrow$ $x^2-\frac{2}{3}x=7$

$\Rightarrow$ $x^2-\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2=7+\frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ $(x-\frac{1}{3})^2=\frac{64}{9}$

$\therefore$ $p=-\frac{1}{3}$，$a=\frac{64}{9}$

$\therefore$ $p+a=-\frac{1}{3}+\frac{64}{9}=\frac{61}{9}$

【練習七】

將$(x-1)^2=(2x-1)^2-3$化成$(x+p)^2=a$，求$p+a$之值。

解：$\because$ $(x-1)^2=(2x-1)^2-3$

$\Rightarrow$ $x^2-2x+1=4x^2-4x+1-3$

$\Rightarrow$ $3x^2-2x=3$

$\Rightarrow$ $x^2-\frac{2}{3}x=1$

$\Rightarrow$ $x^2-\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2=1+\frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ $(x-\frac{1}{3})^2=\frac{10}{9}$

$\therefore$ $p=-\frac{1}{3}$，$a=\frac{10}{9}$

$\therefore$ $p+a=-\frac{1}{3}+\frac{10}{9}=\frac{7}{9}$

公式解解一元二次方程式

一元二次方程式：$ax^2+bx+c=0$（a、b、c 為實數，$a\neq 0$）的解法有三種。

1. 因式分解法：適用於能因式分解的一元二次方程式，即根為有理數的情況。
2. 配方法：適用於不能因式分解的一元二次方程式。
3. 公式法：適用於不能因式分解的一元二次方程式。

之前已經學過因式分解法和配方法，把配方法寫的更完整即是公式法，現在就來介紹公式法解一元二次方程式。

(1)<u>公式解</u>：

利用配方法導出一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，且 $a>0$ 的解為：

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1. 若 $b^2-4ac>0$，則此方程式的兩根為 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。

【範例】：用公式法解方程式：$x^2-6x-3=0$。

解：$\because$ $b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-3)=36+12=48>0$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36+12}}{2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{48}}{2}$$

$$=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\pm2\sqrt{3}$$

答：此方程式的兩根為 $3\pm2\sqrt{3}$ 。

【範例】：用公式法解方程式：$2x^2+3x-6=0$。

解：$\because$ $b^2-4ac=3^2-4\times2\times(-6)=9+48=57>0$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+48}}{4}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{4}$$

答：此方程式的兩根為 $\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{4}$ 。

【範例】：用公式法解方程式：$x^2-2x-15=0$。

解：$\because$ $b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-15)=4+60=64>0$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\times1}$$

$$=\frac{2\pm8}{2}=5\text{ 或 }-3$$

答：此方程式的兩根為 5 或 -3。

【範例】：用公式法解方程式：$-3x^2-2x+1=0$。

解　：$\because\ b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-3)\times1=4+12=16>0$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot1}}{2\times(-3)}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{16}}{-6}$$

$$=\frac{2\pm4}{-6}=\frac{2}{3}\text{ 或 }-1$$

答：此方程式的兩根為$\frac{2}{3}$或-1。

【範例】：用公式法解方程式：$-2x^2+3x+5=0$。

解　：$\because\ b^2-4ac=3^2-4\times(-2)\times5=9+40=49>0$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-2)\cdot5}}{2\times(-2)}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{-4}$$

$$=\frac{-3\pm7}{-4}=\frac{5}{2}\text{ 或 }-1$$

答：此方程式的兩根為$\frac{5}{2}$或-1。

2. 若 $b^2-4ac=0$，則 $x=\frac{-b+0}{2a}=\frac{-b}{2a}$，則此方程式的兩根為重根。

【範例】：解方程式：$4x^2-4x+1=0$

解　：$b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$，則此方程式的兩根為重根。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{16-16}}{2\times4}$$

$$=\frac{4\pm0}{8}=\frac{1}{2}\text{。}$$

$\therefore$ 此方程式的兩根為$\frac{1}{2}$（重根）。

【範例】：解方程式：$x^2-14x+49=0$。

解　：$b^2-4ac=(-14)^2-4\times1\times49=196-196=0$，則此方程式的兩根為重根。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-14)\pm\sqrt{0}}{2\times1}$$

$$=\frac{14\pm0}{2}=7。$$

∴此方程式的兩根為 $\frac{1}{2}$（重根）。

3. 若 $b^2-4ac<0$，則此方程式無實數解。

【範例】：$x^2-x+3=0$

解　：$b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times3=1-12=-11<0$，則此方程式無實數解。

讓我們用配方法檢驗看看：

$$x^2-x+3=0 \Rightarrow x^2-x=-3$$

$$\Rightarrow x^2-x+(\frac{1}{2})^2=-3+(\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=-3+\frac{1}{4}=-2\frac{3}{4}$$

∵ $(x-\frac{1}{2})^2$ 的值一定為正數，

∴ 此方程式無實數解。

※注意：1. $x+1=0 \Rightarrow x=-1$，

若限定 $x\geq0$，則 $x+1=0$ 無實數解。

2. $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$，

若限定 x 為實數，則 $x^2+1=0$ 無實數解。

(2)<u>判別式與根的性質</u>：

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，其公式解為 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

若 $b^2-4ac>0$，則此方程式有實數解，且此方程式有兩個相異實根。

若 $b^2-4ac=0$，則此方程式有實數解，且此方程式有兩個相等實根(重根)。

若 $b^2-4ac<0$，則此方程式無實數解(無實根)。

因此，設 $a\neq0$，則方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式為 $D=b^2-4ac$。

1. 若 $D=b^2-4ac>0$，則此方程式有**兩相異實根**，也就是方程式的兩根不相等。

【範例】：解方程式：$x^2+10x-30=0$。

解　：∵ 判別式 $D=b^2-4ac=10^2-4\times1\times(-30)=100+120=220>0$

∴ 此方程式解為兩相異實根。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(10)\pm\sqrt{100+120}}{2\times1}$$
$$=\frac{-10\pm4\sqrt{55}}{2}$$
$$=-5\pm\sqrt{55}$$

∴此方程式有兩相異實根，$x=-5+\sqrt{55}$ 或 $-5-\sqrt{55}$。

2. 若 $D=b^2-4ac=0$，則此方程式有**兩相等實根**，也就是方程式的兩根相等。

【範例】：解方程式：$x^2-4x+4=0$。

解　：∵ 判別式 $D=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times4=16-16=0$

∴ 此方程式解為兩相等實根(重根)。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{16-16}}{2\times1}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}$$
$$=2$$

∴此方程式有兩相等實根，$x=2$(重根)。

3. 若 $D=b^2-4ac<0$，則原方程式**無實數解**(或無實根)。

【範例】：解方程式：$x^2+2x+6=0$。

解　：∵ 判別式 $D=b^2-4ac=2^2-4\times1\times6=4-24=-20<0$

∴ 此方程式無實數解。

$x^2+2x+6=0 \Rightarrow x^2+2x=-6$

$\Rightarrow x^2+2x+1=-6+1$

$\Rightarrow (x+1)^2=-5$ (負不合)

∴此方程式無實根(無解)。

※注意：一個一元二次方程式中，通常有兩個解，但不一定有實數解，但是如果對解有條件限制的時候，則方程式亦可能無解。

【**範例**】：方程式 $x^2+2=0$ 是否有解？

解　：$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$ 為**無實數解**，

$\because$ x^2 的值一定為正數，不能為負的。

$\therefore$ $x^2+2=0$ 無實數解。

【**範例**】：方程式 $(x+2)(x+5)=0$ 是否有解，其中 $x>0$？

解　：$\because x>0$，$\therefore (x+2)(x+5)>0$，因此，此方程式無解。

小 試 身 手

【例題一】

利用公式解求下列各式：

（1）$x^2-2x-15=0$。

（2）$2x^2-3x+2=0$。

（3）$-x^2+x-3=0$。

（4）$3x^2-5x+1=0$。

解：（1）$x^2-2x-15=0$

$\because b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-15)=64$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\times1}=\frac{2\pm8}{2}=5 \text{ 或 } -3$$

（2）$2x^2-3x+2=0$

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

（3）$-x^2+x-3=0$

$\because b^2-4ac=1^2-4\times(-1)\times(-3)$

$=-11<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

（4）$3x^2-5x+1=0$

$\because b^2-4ac=(-5)^2-4\times3\times1=13$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$$

【練習一】

利用公式解求下列各式：

（1）$6x^2-9x+1=0$。

（2）$4x^2-3x-8=0$。

（3）$x^2-x-5=0$。

（4）$4x^2-x-1=0$。

解：（1）$6x^2-9x+1=0$

$\because b^2-4ac=(-9)^2-4\times6\times1=57$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{57}}{2\times6}=\frac{9\pm\sqrt{57}}{12}$$

（2）$4x^2-3x-8=0$

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times4\times(-8)=137$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{137}}{2\times4}=\frac{3\pm\sqrt{137}}{8}$$

（3）$x^2-x-5=0$

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-5)=21$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{21}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

（4）$4x^2-x-1=0$

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times4\times(-1)=17$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{17}}{2\times4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

【例題二】

試判別下列各方程式的兩根何者為相異根、相等根或無解：

(1) $5x^2+3=7x$。

(2) $(x+3)(x-5)+18=0$。

(3) $3x^2-12x+12=0$。

(4) $x-2-3(x-1)^2=0$。

解：(1) $5x^2+3=7x \Rightarrow 5x^2-7x+3=0$

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times5\times3=-11<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

(2) $(x+3)(x-5)+18=0$

$\Rightarrow x^2-2x-15+18=0$

$\Rightarrow x^2-2x+3=0$

$\because b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

(3) $3x^2-12x+12=0$

$\because b^2-4ac=(-12)^2-4\times3\times12=0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相等根

(4) $x-2-3(x-1)^2=0$

$\Rightarrow x-2-3x^2+6x-3=0$

$\Rightarrow -3x^2+7x-5=0$

$\because b^2-4ac=7^2-4\times(-3)\times(-5)$

$=-11<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

【練習二】

試判別下列各方程式的兩根何者為相異根、相等根或無解：

(1) $2x^2+1=5x$。

(2) $(x+1)(x-6)-10=0$。

(3) $-x^2-x+7=0$。

(4) $4x-1-2(x+3)^2=0$。

解：(1) $2x^2+1=5x \Rightarrow 2x^2-5x+1=0$

$\because b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=17>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(2) $(x+1)(x-6)-10=0$

$\Rightarrow x^2-5x-6-10=0$

$\Rightarrow x^2-5x-16=0$

$\because b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-16)$

$=89>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(3) $-x^2-x+7=0$

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-1)\times7$

$=29>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(4) $4x-1-2(x+3)^2=0$

$\Rightarrow 4x-1-2x^2-12x-18=0$

$\Rightarrow -2x^2-8x-19=0$

$\Rightarrow 2x^2+8x+19=0$

$\because b^2-4ac=8^2-4\times2\times19=-88<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

【例題三】

試判別下列各方程式的兩根何者為相異根、相等根或無解：

(1) $21x^2-3-2x=0$。

(2) $x^2+x-1=0$。

(3) $x^2-7x+9=0$

(4) $2x^2-3x+5=0$。

解：

(5) $21x^2-3-2x=0$

$\Rightarrow 21x^2-2x-3=0$

$\because b^2-4ac=(-2)^2-4\times21\times(-3)$

$=256>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(6) $x^2+x-1=0$

$\because b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(7) $x^2-7x+9=0$

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times9=13>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(8) $2x^2-3x+5=0$

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times5=-31<0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為無解

【練習三】

試判別下列各方程式的兩根何者為相異根、相等根或無解：

(1) $5x^2-6-3x=0$。

(2) $x^2+7x-2=0$。

(3) $x^2-4x+4=0$

(4) $-2x^2+x+5=0$。

解：

(5) $5x^2-6-3x=0=0$

$\Rightarrow 5x^2-3x-6=0$

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times5\times(-6)$

$=129>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(6) $x^2+7x-2=0$

$\because b^2-4ac=7^2-4\times1\times(-2)=57>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

(7) $x^2-4x+4=0$

$\because b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times4=0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相等根

(8) $-2x^2+x+5=0$

$\because b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times5=41>0$

$\therefore$ 則此方程式的兩根為相異根

【例題四】

由 $3x^2-8x+m=0$ 可推得 $x-\frac{4}{3}=\pm\frac{\sqrt{28}}{3}$，求 m 之值。

解：$\because x-\frac{4}{3}=\pm\frac{\sqrt{28}}{3}$

$\Rightarrow (x-\frac{4}{3})^2=\frac{28}{9}$

$\Rightarrow x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}=\frac{28}{9}$

$\Rightarrow x^2-\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow 3x^2-8x-4=0$

$\therefore m=-4$

【練習四】

設 a 為整數，且 $\frac{-4+\sqrt{31}}{5}$ 為 $ax^2+8x-3=0$ 之一根，求 a 之值。

解：$\because \frac{-4+\sqrt{31}}{5}$ 為 $ax^2+8x-3=0$ 之一根，

$\therefore x=\frac{-4+\sqrt{31}}{5}$

$\Rightarrow 5x+4=\sqrt{31}$

$\Rightarrow (5x+4)^2=31$

$\Rightarrow 25x^2+40x+16=31$

$\Rightarrow 25x^2+40x-15=0$

$\Rightarrow 5x^2+8x-3=0$

$\therefore a=5$

【例題五】

設 $x>0$，若 $x^2-x-1=0$，

求(1) x 之值　(2) $2x^2-4x-1$ 之值。

解：(1) $\because\ b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$

$\therefore\ x^2-x-1=0$ 的兩根為

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\because\ x>0$　　$\therefore\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $2x^2-4x-1=2(x^2-x-1)-2x+1$

$=0-2\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1=-\sqrt{5}$

【練習五】

設 b 是 $x^2-4x-1=0$ 之一根，$b<0$，

求(1) b 之值　(2) b^2-3b-3 之值。

解：(1) $\because\ b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-1)=20$

$\therefore\ x^2-x-1=0$ 的兩根為

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$$

$=2\pm\sqrt{5}$

$\because\ b<0$　　$\therefore\ b=2-\sqrt{5}$

(2) $b^2-3b-3=(b^2-4b-1)+b-2$

$=0+2-\sqrt{5}-2=-\sqrt{5}$

【例題六】

若 $x^2-2x-1=0$ 的兩根為 a、b，

則 $|a|+|b|=$？

解：$\because\ b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$

$\therefore\ x^2-2x-1=0$ 的兩根為

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$\therefore$ 若 $a=1+\sqrt{2}$、$b=1-\sqrt{2}$

則 $|a|+|b|=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$

【練習六】

若 $x^2-4x=-2$ 的兩根為 a、b，

則 $|a|+|b|=$？

解：$\because\ b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times2=8$

$\therefore\ x^2-4x+2=0$ 的兩根為

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

$\therefore$ 若 $a=2+\sqrt{2}$、$b=2-\sqrt{2}$

則 $|a|+|b|=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$

【例題七】

設 $x^2+(k+2)x+(2k+1)=0$ 兩根相等，

求 k 之值。

解：$\because\ x^2+(k+2)x+(2k+1)=0$ 兩根相等

$\therefore\ b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (k+2)^2-4(2k+1)=0$

$\Rightarrow k^2+4k+4-8k-4=0$

$\Rightarrow k^2-4k=0$

$\Rightarrow k(k-4)=0$　$\therefore\ k=0$ 或 $k=4$

【練習七】

設 $ax^2+ax+2=0$ 兩根相等，求 a 之值。

解：$\because\ ax^2+ax+2=0$ 兩根相等

$\therefore\ b^2-4ac=0$

$\Rightarrow a^2-4\times a\times2=0$

$\Rightarrow a^2-8a=0$

$\Rightarrow a(a-8)=0$　$\therefore\ a=0$ 或 $a=8$

【例題八】

二次方程式$(3-m)x^2+x+2=0$中，

(1) 若無實數解且m為正整數，求m之值。

(2) 若有實數解，求m之範圍。

解：(1) $\because$ 無實數解

$\therefore\ b^2-4ac<0$

$\Rightarrow 1^2-4\times(3-m)\times 2<0$

$\Rightarrow 1-8\times(3-m)<0$

$\Rightarrow 3-m>\dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow m<\dfrac{23}{8}=2\dfrac{7}{8}$

$\because$ m為正整數， $\therefore\ m=1$ 或 2

(2) $\because$ 有實數解，$\therefore\ m\geqq\dfrac{23}{8}$ 但 $m\neq 3$

【練習八】

二次方程式$(k+2)x^2-2x+1=0$中，

(1) 若無實數解，求k之範圍。

(2) 若有實數解，求k的最大整數值。

解：(1) $\because$ 無實數解

$\therefore\ b^2-4ac<0$

$\Rightarrow (-2)^2-4\times(k+2)\times 1<0$

$\Rightarrow 4-4\times(k+2)<0$

$\Rightarrow k+2>1 \quad \Rightarrow k>-1$

(2) $\because$ 有實數解，$\therefore\ k\leqq -1$

$\therefore$ k的最大整數值為-1

【例題九】

(1) 設$ab\neq 0$，若二次方程式
$x^2+(a-2b)x+b^2=0$有等根，求$a:b$。

(2) 設a、b、c表$\triangle ABC$之三邊長，
若$(a+b)x^2+2cx+(a-b)=0$有等根，
則求出a、b、c的關係式及$\triangle ABC$為何種三角形？

解：(1) $\because$ 有等根 $\therefore\ b^2-4ac=0$

$\therefore\ (a-2b)^2-4b^2=0$

$\Rightarrow a^2-4ab+4b^2-4b^2=0$

$\Rightarrow a^2-4ab=0$

$\Rightarrow a(a-4b)=0$

$\therefore\ a=0$(不合)或$a=4b$

$\therefore\ a:b=4b:b=4:1$

(2) $\because$ 有等根 $\therefore\ b^2-4ac=0$

$\therefore\ (2c)^2-4\times(a+b)\times(a-b)=0$

$\Rightarrow 4c^2-4(a^2-b^2)=0$

$\Rightarrow a^2=b^2+c^2$

$\therefore$ $\triangle ABC$為直角三角形

【練習九】

設l、m、n表$\triangle ABC$之三邊長，

試判別$nx^2+(l+m)x-1=0$兩根的性質。

解：

$\because\ b^2-4ac=(l+m)^2-4\times n\times(-1)$

$=(l+m)^2+4n>0$

$\therefore$ 兩根的性質為相異根

【例題十】

設 a、b、$c\neq 0$，且 x 的二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 兩根相等，

試證： $a:b=b:c$。

證明： $\because$ 兩根相等

$\therefore (2b)^2-4\times ac=0$

$\Rightarrow b^2=ac$

$\therefore a:b=b:c$

【練習十】

設二次方程式$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 兩根相等，

試證：（1）$a+c=2b$。

（2）求此相等的兩根。

證明：

（1）$\because$兩根相等，$\therefore$判別式 $D=0$。

$D=(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (c-a)^2-4(ab-b^2-ac+bc)=0$

$\Leftrightarrow c^2-2ac+a^2-4ab+4b^2+4ac-4bc=0$

$\Leftrightarrow c^2+2ac+a^2-4ab-4bc+4b^2=0$

$\Leftrightarrow (a+c)^2-4b(a+c)+4b^2=0$

$\Leftrightarrow (a+c-2b)^2=0$

$\Leftrightarrow a+c=2b$

（2）$x=\dfrac{-(c-a)}{2\cdot(b-c)}$

$=\dfrac{a-c}{2\cdot(b-c)}$　　（$a=2b-c$）

$=\dfrac{2b-c-c}{2\cdot(b-c)}$

$=\dfrac{2\cdot(b-c)}{2\cdot(b-c)}=1$

此相等的兩根為 1，1