

尺規作圖

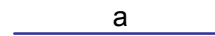
線與角的尺規作圖

平面幾何作圖中，有很大一部份是尺規作圖。所謂的『尺規作圖』，即是限制只能使用沒有記號的直尺和圓規，在紙上有限次作出曲線。為什麼作圖要有這樣的限制？首先，從希臘的學術風潮來看，古希臘人認為，歐幾裡得幾何的理論是最完美的，按照它的公理系統推證出來的結論才是最準確可靠的，直尺上的刻度是不可靠的。但是幾何離不開作圖，為了把不準確不可靠的程度降到最低，仿照它的公理，規定了作圖公法，選取了最少的工具和最簡單的功能，由此產生了尺規作圖法。

尺規作圖：在繪製幾何圖形時，只能使用直尺和圓規來作圖。（其中的直尺，就是沒有刻度、只能畫直線的尺），現在我們先來做以下有關線段及角的基本作圖。

【範例】 等線段作圖。

【已知】 已知一線段，長度為 a 。



【求作】 用直尺和圓規畫一線段，使它和 a 等長。

【作法】 (1) 畫一直線 L ，在 L 上任取一點 A 。

(2) 以 A 為圓心， a 為半徑畫弧，

交 L 於 B 點，則 \overline{AB} 即為所求。



【範例】 線段和的尺規作圖。

【已知】 已知兩線段，長度為 a 、 b 。

【求作】 利用直尺、圓規作出長為 $a+b$ 線段。



【作法】 步驟一：利用直尺先畫一線段 L 。



步驟二：設線段的一端為 A 。



步驟三：以線段 a 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。



步驟四：以線段 b 為半徑，以 B 點為圓心畫弧交線段 L 於 C 點。



步驟五： \overline{AC} 即為所求。

【範例】 線段差的尺規作圖。

【已知】 已知兩線段，長度為 a 、 b 。



【求作】 利用直尺、圓規作出長為 $a-b$ 線段。

【作法】 步驟一：利用直尺先劃一線段 L 。



步驟二：設線段的一端為 A 。



步驟三：以線段 a 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。



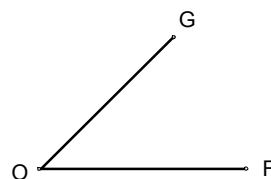
步驟四：以線段 b 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 C 點。



步驟五： \overline{CB} 即為所求。

【範例】 等角作圖。

【已知】 $\angle GOF$ 。

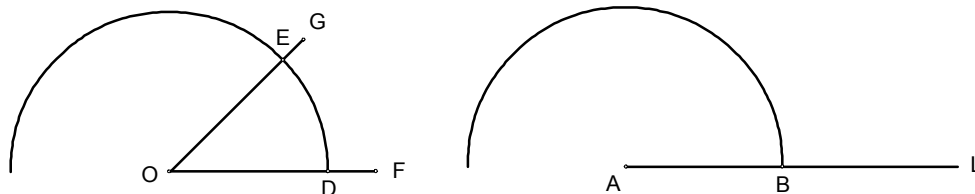


【求作】 一角 $\angle CAB$ ，使 $\angle CAB = \angle GOF$ 。

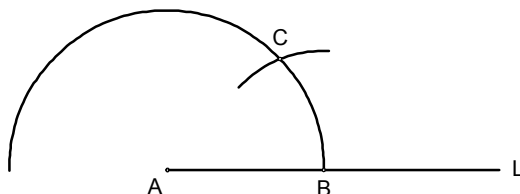
【作法】 步驟一：先用直尺劃一線段 L ，設線段的一端點為 A 。



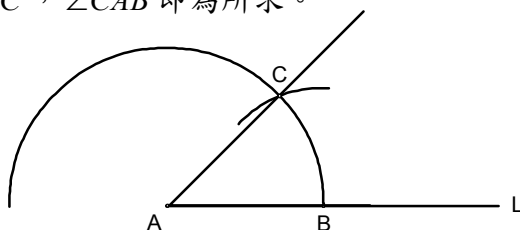
步驟二：以適當長為半徑，以 O 點為圓心畫弧，交 \overline{OF} 於 D 點，交 \overline{OG} 於 E 點。
以相同半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。



步驟三：以 \overline{ED} 為半徑， B 為圓心畫弧交半圓於 C 點。



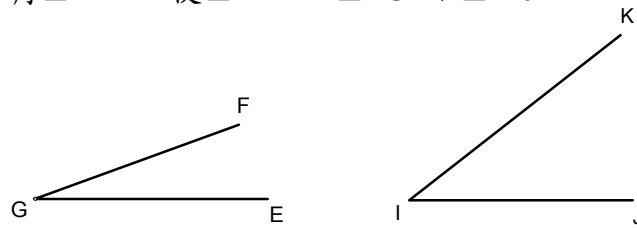
步驟四：連 \overline{AC} ， $\angle CAB$ 即為所求。



【範例】 兩角和的尺規作圖。

【已知】 $\angle FGE$ 、 $\angle KIJ$ 。

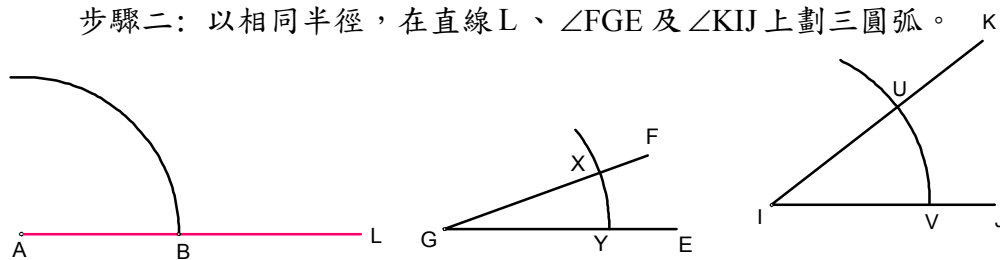
【求作】 一角 $\angle DAB$ ，使 $\angle DAB = \angle FGE + \angle KIJ$ 。



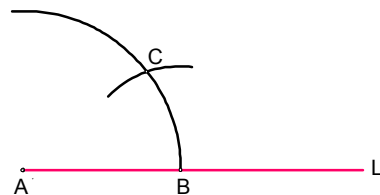
【作法】 步驟一：畫直線L，設端點為A。



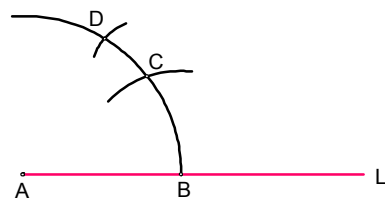
步驟二：以相同半徑，在直線L、 $\angle FGE$ 及 $\angle KIJ$ 上劃三圓弧。



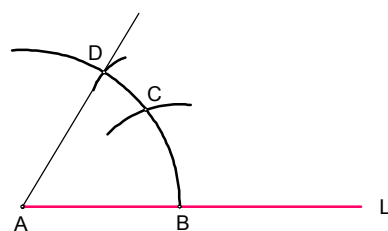
步驟三： \overline{UV} 為半徑，B為圓心畫弧，得交點為C。



步驟四： \overline{XY} 為半徑，C為圓心畫弧，得交點為D。



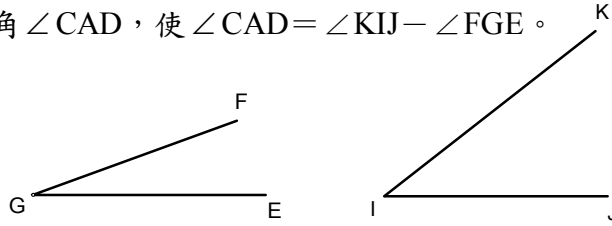
步驟五：連 \overline{AD} ， $\angle DAB$ 即為所求。



【範例】兩角差的尺規作圖。

【已知】 $\angle FGE$ 、 $\angle KIJ$ 。

【求作】一角 $\angle CAD$ ，使 $\angle CAD = \angle KIJ - \angle FGE$ 。



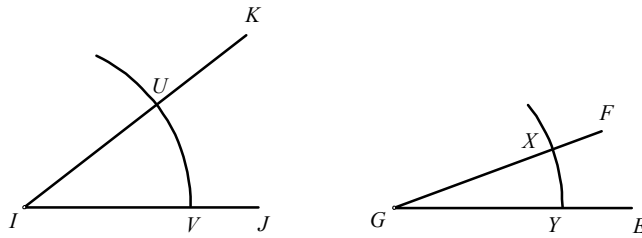
【作法】步驟一：畫直線 L 。



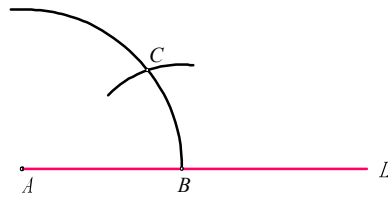
步驟二：設端點為 A 。



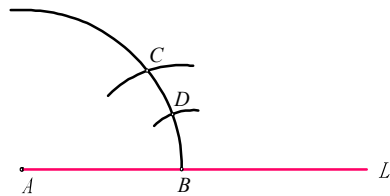
步驟三：同一半徑，劃三圓弧。



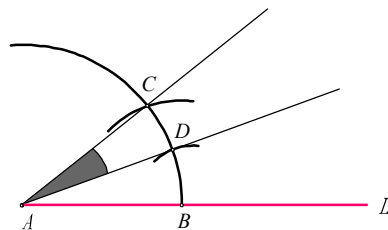
步驟四： \overline{UV} 為半徑， B 為圓心畫弧，得交點為 C 。



步驟五： \overline{XY} 為半徑， B 為圓心畫弧，得交點為 D 。



步驟六：連 \overline{AC} 、 \overline{AD} ， $\angle CAD$ 即為所求。





小試身手

【範例一】

【已知】兩線段長度分別為 a 、 b

【求作】一線段其長度為 $2a-b$



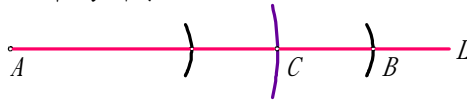
【作法】(1) 畫一線段 L 。

(2) 設線段的一端為 A 。

(3) 以線段 $2a$ 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。

(4) 以線段 b 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 C 點。

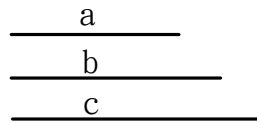
(5) \overline{CB} 即為所求。



【練習一】

【已知】三線段長度分別為 a 、 b 、 c

【求作】一線段其長度為 $a+b-c$



【作法】(1) 畫一線段 L 。

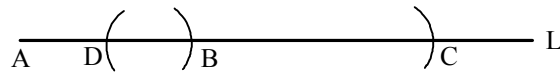
(2) 設線段的一端為 A 。

(3) 以線段 a 為半徑，以 A 點為圓心畫弧交線段 L 於 B 點。

(4) 以線段 b 為半徑，以 B 點為圓心畫弧交線段 L 於 C 點。

(5) 以線段 c 為半徑，以 C 點為圓心畫弧交線段 L 於 D 點。

(6) \overline{AD} 即為所求。



【範例二】

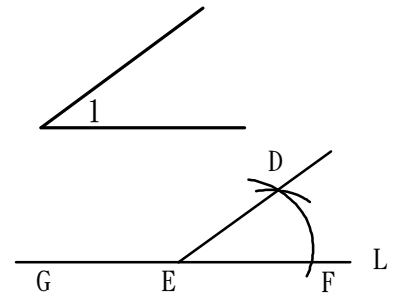
【已知】有一角為 $\angle 1$

【求作】某一角其角度 $= 180^\circ - \angle 1$

【作法】(1) 畫一直線 L ，在 L 上任取相異三點 G 、 E 、 F 。

(2) 作一角 $\angle DEF$ ，使 $\angle DEF = \angle 1$ 。

(3) 則 $\angle DEG$ 即為所求。



【練習二】

【已知】有兩角分別為 $\angle 1$ 、 $\angle 2$

【求作】某一角其角度 $= 2\angle 1 - \angle 2$

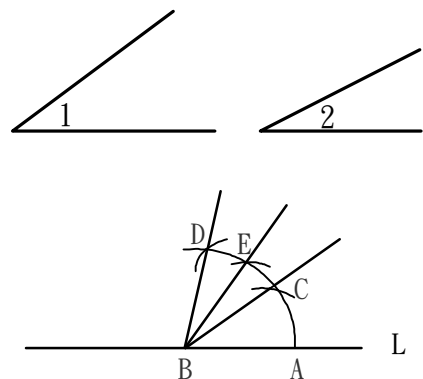
【作法】(1) 畫一直線 L ，在 L 上任取相異兩點 A 、 B 。

(2) 作一角 $\angle ABC = \angle 1$ 。

(3) 以 \overline{BC} 為一邊，作一角 $\angle DBC = \angle 1$ 。

(4) 以 \overline{BD} 為一邊，作一角 $\angle DBE = \angle 2$ 。

(5) 則 $\angle ABE$ 即為所求。



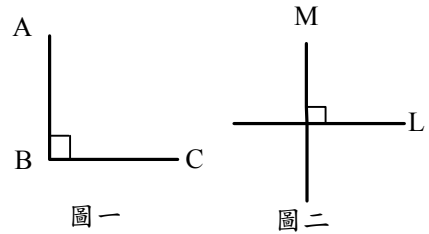
■ 垂直與平分及尺規作圖

在前面我們已經學會了線段與角的基本作圖，想想看，假如利用這些技巧，有辦法直接做出直角三角形、正方形或菱形嗎？所以我們將再進一步學習如何利用尺規作圖來作垂直及平分的技巧，在此之前我們先介紹一些基本名詞。

直角與垂直

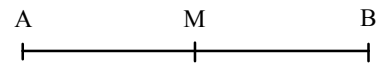
直角：當一個角的度數是 90° 時，叫做直角。

如圖一， $\angle ABC = 90^{\circ}$ 。

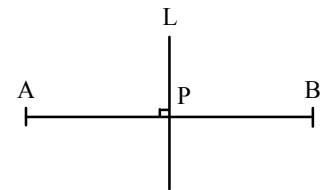


垂直：當兩條直線或線段相互成直角時，稱這兩條直線或線段互相垂直。如圖二，L 與 M 兩直線互相垂直以 $L \perp M$ 表示。

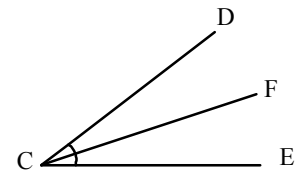
線段中點：若 M 是線段 \overline{AB} 上的一點，且 $\overline{AM} = \overline{MB}$ ，稱 M 點為線段 \overline{AB} 的中點。



中垂線：直線 L 垂直於線段 \overline{AB} ，且其交點 P 平分線段 \overline{AB} ，則直線 L 叫做線段 \overline{AB} 的垂直平分線或中垂線。



角平分線：直線 \overline{CF} 把 $\angle DCE$ 平分成為兩個相等的角，也就是 $\angle DCF = \angle FCE$ ，則我們說直線 \overline{CF} 是 $\angle DCE$ 的角平分線或分角線。



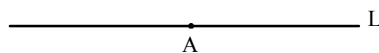
有關垂直、平分的尺規作圖：

在此我們要來做以下 5 個有關垂直與平分的尺規作圖

1. 過直線上一點作此直線的垂線。
2. 過直線外一點作此直線的垂線。
3. 給任一線段求作此線段中點(中垂線)。
4. 給任一角度求作此角的平分線。
5. 中垂線應用—將線段 \overline{AB} 分成四等分。

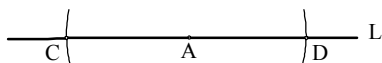
【範例】過直線上一點作此直線的垂線。

【已知】直線 L 和 L 上一點 A 。

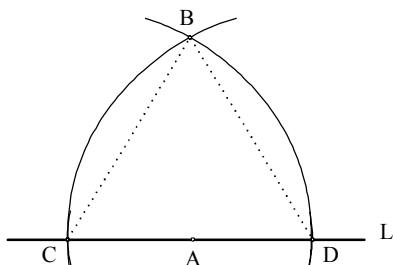


【求作】畫一直線通過 A ，且與 L 垂直。

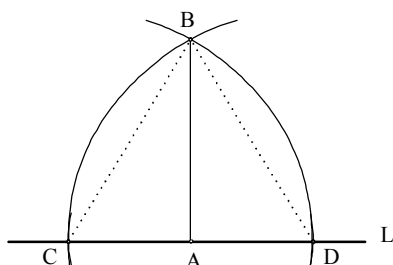
【作法】步驟一：以適當長為半徑， A 為圓心畫圓弧，交 L 於 C 、 D 兩點。



步驟二：以 \overline{CD} 為半徑， C 、 D 為圓心畫兩圓弧，設其交點為 B 。

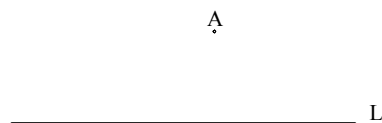


步驟三：連 \overline{AB} ，即為所求。



【範例】過直線外一點求作過此點與此直線垂直的直線。

【已知】直線 L 與 L 外一點 A 。

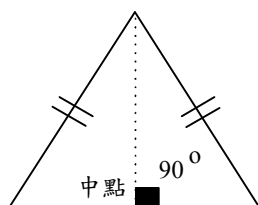


【求作】畫一直線，經過 A 點，且垂直於 L 。

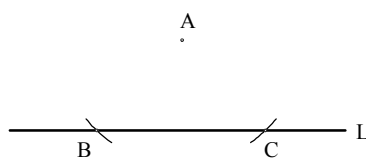
【作法一】

作圖原理：將等腰三角形對摺後，所得到的摺線其實是一條底邊的中垂線。

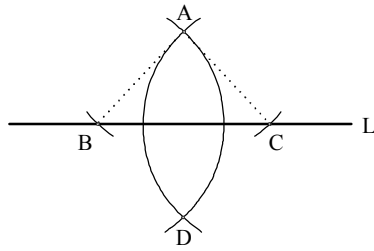
利用此概念，我們可作出過線上一點的垂直線。



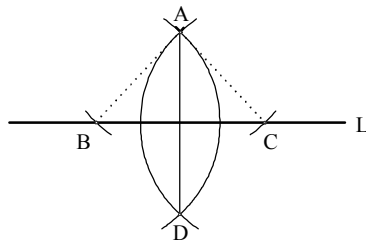
步驟一：取直線 L 外的任意點 A ，以 A 點為圓心，適當長為半徑，畫弧，交 L 於 B 、 C 兩點。



步驟二：以 \overline{BA} 為半徑，分別以 B、C 為圓心，畫弧，設兩弧交點為 D。

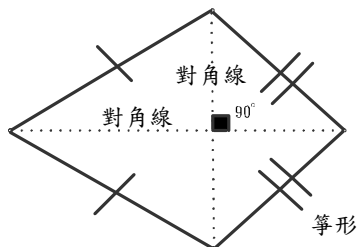


步驟三：連 \overline{AD} ，即為所求。

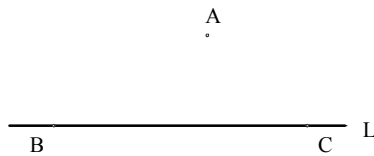


【作法二】

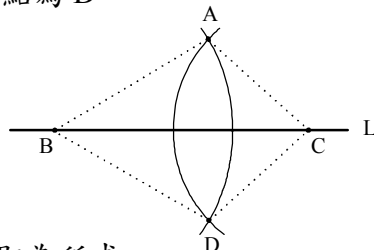
作圖原理：箏形的對角線相互垂直，利用這個概念可以完成，過線外一點垂線的尺規作圖。



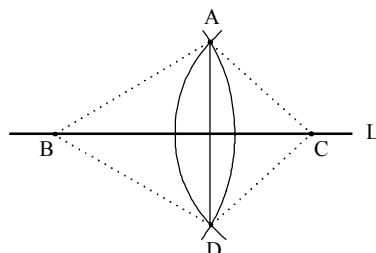
步驟一：在 L 上取 B、C 兩點(大約在 A 點的兩側)。



步驟二：以 \overline{BA} 為半徑、B 為圓心，畫弧，以 \overline{CA} 為半徑、C 為圓心，畫弧，設兩弧交點為 D。

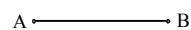


步驟三：連 \overline{AD} ，即為所求。



【範例】給任一線段求作此線段中點(中垂線)。

【已知】線段 \overline{AB} 。

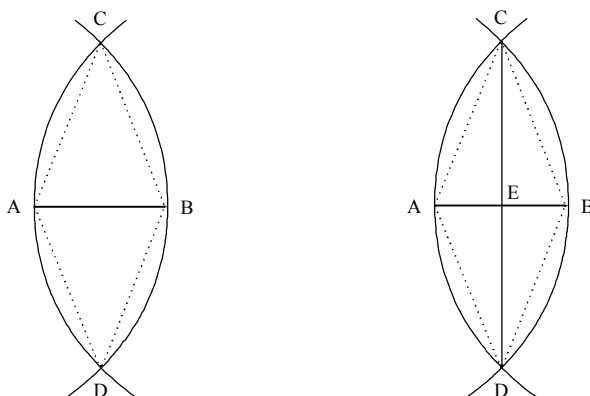


【求作】 AB 的中點。

【作法】步驟一：分別以 A 與 B 為圓心，取大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的長為半徑畫弧，

設此二弧相交於 C 、 D 兩點。

步驟二：連接 \overline{CD} ，則 \overline{CD} 與 \overline{AB} 的交點 E 即為所求的中點。



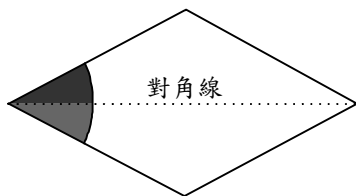
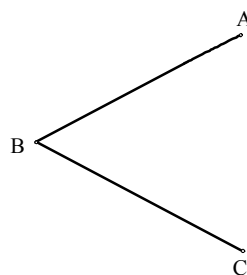
【範例】給一任意角度作此角的平分線。

【已知】某任意角 $\angle ABC$ 。

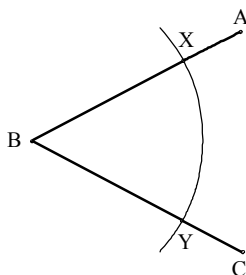
【求作】 $\angle ABC$ 的角平分線。

【作法】

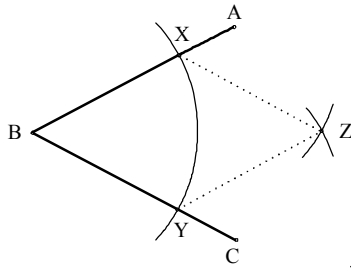
作圖原理：菱形的對角線可把自己等分成兩塊，因此，菱形的對角線也是角平分線。
所以，作角平分線也就是在作一個菱形的對角線。



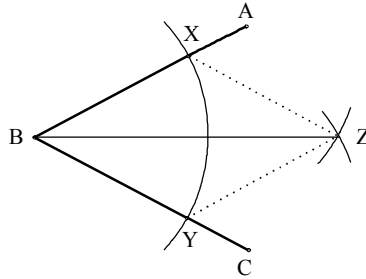
步驟一：以適當長為半徑， B 點為圓心畫弧交 \overline{BA} 、 \overline{BC} 於 X 、 Y 兩點。



步驟二：以相同的半徑， X 、 Y 為圓心畫兩個圓弧，設其交點為 Z 。



步驟三：連 \overline{BZ} ，即為 $\angle ABC$ 的角平分線。



【範例】 中垂線應用—將某一線段等分。

【已知】 某一線段 \overline{AB} 。

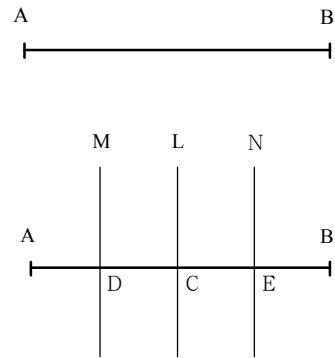
【求作】 將線段 \overline{AB} 分成四等分。

【作法】 步驟一：作 \overline{AB} 的中垂線 L ，交 \overline{AB} 於 C 點。

步驟二：作 \overline{AC} 的中垂線 M ，交 \overline{AB} 於 D 點。

步驟三：作 \overline{BC} 的中垂線 N ，交 \overline{AB} 於 E 點，

則 C 、 D 、 E 三點將 \overline{AB} 四等分。



【結論】 將一線段 2^n 等分，需作中垂線「 $2^n - 1$ 」次。

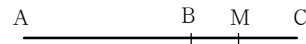
【範例】 如右圖， $\overline{AB} = 7$ 公分， $\overline{AC} = 11$ 公分，

又 M 為 \overline{BC} 中點，則 $\overline{AM} =$ _____ 公分。

【解答】 $\overline{BC} = 11 - 7 = 4$ 公分。

$\because M$ 為 \overline{BC} 中點 $\Rightarrow \overline{BM} = \overline{CM} = 2$ 公分。

$\therefore \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = 7 + 2 = 9$ 公分。





小試身手

【範例一】

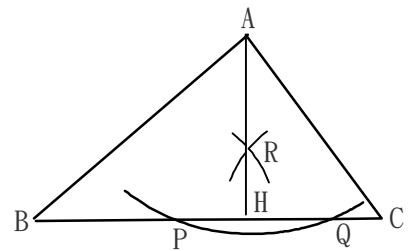
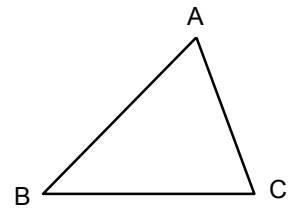
用尺規作圖在 $\triangle ABC$ 中過 A 點作 \overline{BC} 上的高。

【作法】

(1) 以 A 為圓心，適當長為半徑畫弧，交 \overline{BC} 於 P、Q 兩點。

(2) 分別以 P、Q 為圓心，大於 $\frac{1}{2} \overline{PQ}$ 的長為半徑畫弧，此兩弧的交點於 R。

(3) 作 \overline{AR} 交 \overline{BC} 於 H 點，則 \overline{AH} 即為所求。



【練習一】

用尺規作圖將 \overline{AB} 分成 1:7。

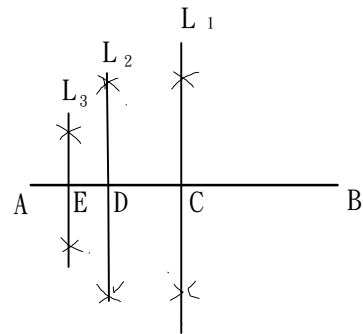
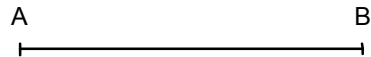
【作法】

(1) 作 \overline{AB} 之中垂線 L_1 交 \overline{AB} 於 C 點。

(2) 作 \overline{AC} 之中垂線 L_2 交 \overline{AC} 於 D 點。

(3) 作 \overline{AD} 之中垂線 L_3 交 \overline{AD} 於 E 點。

(4) 則 $\overline{AE} : \overline{EB} = 1:7$ 。



【範例二】

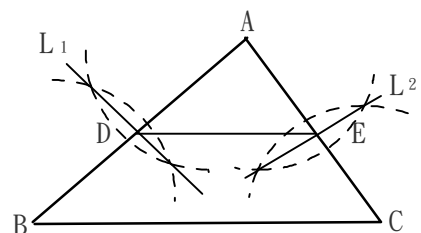
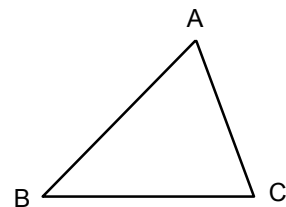
用尺規作圖作已知三角形兩邊中點的連線。

【作法】

(1) 作 \overline{AB} 之中垂線 L_1 交 \overline{AB} 於 D 點。

(2) 作 \overline{AC} 之中垂線 L_2 交 \overline{AC} 於 E 點。

(3) 連接 \overline{DE} ，則 \overline{DE} 即為所求。

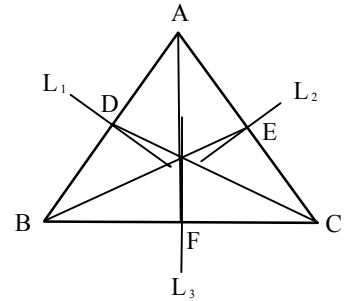
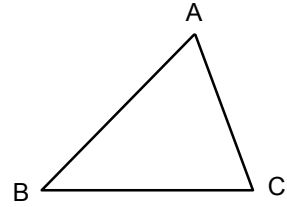


【練習二】

用尺規作圖作出三角形各頂點到對邊中點的連線。

【作法】

- (1) 作 \overline{AB} 之中垂線 L_1 交 \overline{AB} 於 D 點。
- (2) 作 \overline{AC} 之中垂線 L_2 交 \overline{AC} 於 E 點。
- (3) 作 \overline{BC} 之中垂線 L_3 交 \overline{BC} 於 F 點。
- (4) 連接 \overline{CD} 、 \overline{BE} 、 \overline{AF} 。
- (5) 則 \overline{CD} 、 \overline{BE} 、 \overline{AF} 即為所。

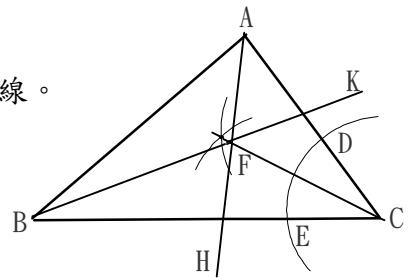
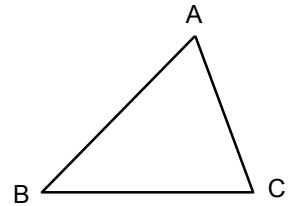


【範例三】

用尺規作圖作出已知三角形三內角的平分線。

【作法】

- (1) 以 $\angle C$ 的頂點 C 為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle C$ 的兩邊於 D 、 E 兩點。
- (2) 分別以 D 、 E 為圓心，大於 $\frac{1}{2} \overline{DE}$ 的長為半徑畫弧，設此二弧相交於 F 。
- (3) 作 \overline{CF} ，則 \overline{CF} 即為 $\angle C$ 之角平分線。
- (4) 同理可作 \overline{AH} 為 $\angle A$ 之角平分線， \overline{BK} 為 $\angle B$ 之角平分線。

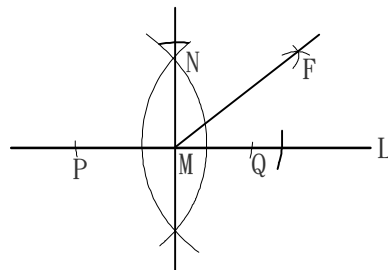


【練習三】

用尺規作圖作出一個 45 度的角。

【作法】

- (1) 畫一直線 L ，於 L 上取一點 M 。
- (2) 以 M 圓心，適當長為半徑畫弧，則此弧交 L 於 P 、 Q 兩點。
- (3) 分別以 P 、 Q 為圓心，大於 \overline{PQ} 一半的長為半徑，在上的同側畫弧，設此二弧交於 N 點。
- (4) 連接 M 、 N 兩點，則 $\angle NMQ = 90^\circ$ 。
- (5) 作 $\angle NMQ$ 之角平分線 \overline{MF} 。
- (6) 則 $\angle FMQ$ 即為所求。

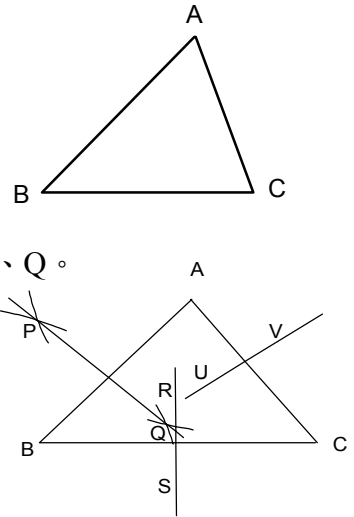


【範例四】

用尺規作圖作出已知三角形三邊的中垂線

【作法】

- (1) 畫一任意三角形 $\triangle ABC$ 。
- (2) 分別以A、B兩點為圓心大於 $\frac{1}{2} \overline{AB}$ 為半徑畫弧，兩弧相交於P、Q。
- (3) 連接 \overline{PQ} ，則 \overline{PQ} 即為 \overline{AB} 之中垂線。
- (4) 同理可作 \overline{RS} 即為 \overline{BC} 之中垂線。
- (5) 同理可作 \overline{UV} 即為 \overline{AC} 之中垂線。

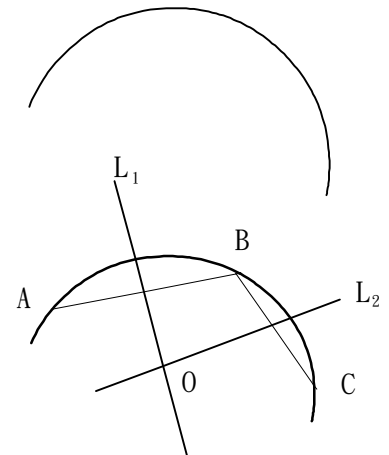


【練習四】

小名用圓規畫圓，不小心鉛筆斷了，只劃出右邊的圓弧，請你找出圓心並把圓畫出來。

【作法】

- (1) 於圓弧上任取相異三點A、B、C三點。
- (2) 連接 \overline{AB} 、 \overline{BC} ，並作 \overline{AB} 、 \overline{BC} 之中垂線 L_1 、 L_2 。
- (3) L_1 、 L_2 交於O點，以O點為圓心， \overline{OA} 為半徑畫圓則此圓即為所求。



【範例五】

如圖， $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ ，若直線OP平分角 $\angle AOC$ ，直線OQ平分角 $\angle BOC$ ，則 $\angle POQ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 設 $\angle POC = x^\circ$

$$\angle QOC = y^\circ$$

直線OP平分角 $\angle AOC$

直線OQ平分角 $\angle BOC$

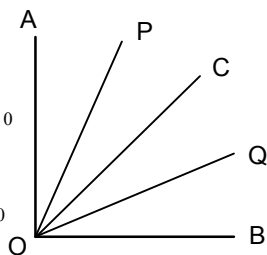
$$\therefore \angle POA = x^\circ$$

$$\angle QOB = y^\circ$$

$$\text{即 } 2x + 2y = 90^\circ$$

$$x + y = 45^\circ$$

$$\text{則 } \angle POQ = 45^\circ$$



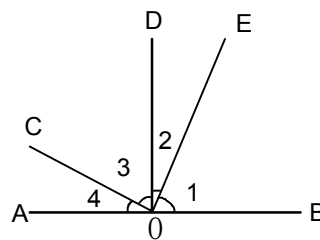
【練習五】

如圖， $\overline{DO} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{CO} \perp \overline{OE}$ ， $\angle 1 = 55^\circ$ ，則 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

【解】 $\angle 2 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

$$\angle 3 = 90^\circ - \angle 2 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$



■ 平行尺規作圖

在前面的作圖，都是有關垂直的作圖部分，但在幾何學中我們亦常用到平行的觀念及性質，所以我們接著來介紹如何畫平行線的尺規作圖。

平行尺規作圖：給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。

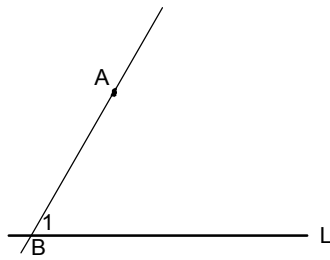
A .

【已知】直線 L 與線外一點 A 。

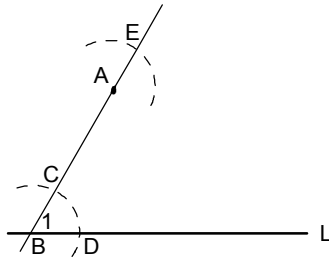
【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

【作法一】步驟一：過線外一點 A 隨意畫與 L 交錯之直線，

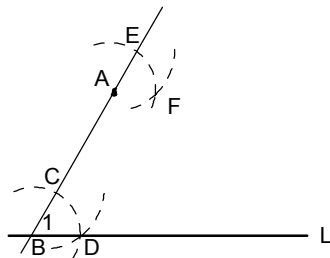
交直線 L 於 A 點，所設成的角為 $\angle 1$ 。



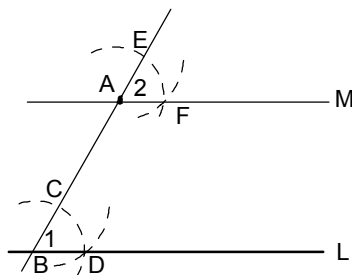
步驟二：分別以 A 、 B 為圓心，相同長度為半徑畫弧，交點分別為 C 、 D 、 E 。



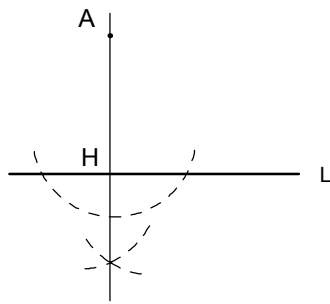
步驟三：以 E 為圓心， \overline{CD} 為半徑畫弧，交點為 F 點。



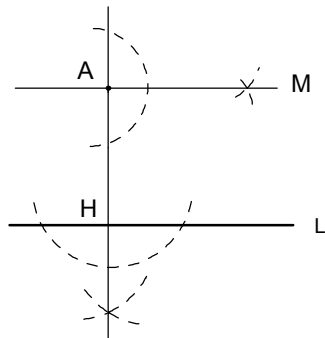
步驟四：連接 \overline{AF} 線段即為所求。



【作法二】 步驟一：過 A 點作 $AH \perp L$ 。



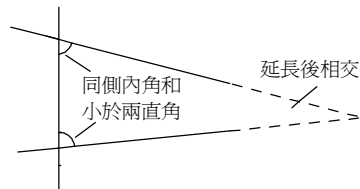
步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 AH ，則 $M \parallel L$ 。



■ 平行線性質與應用

古希臘的幾何，也就是歐幾里德的幾何是由公設所建立，其中公設五是很重要的，此公設又稱之為平行公設，是有關平行的幾何。

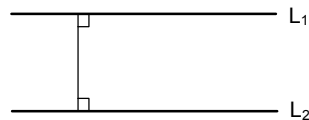
【公設五】若一直線和兩直線相交，且其中一側的同側內角和小於兩直角，則將此兩直線延長後，會交於同側內角和小於二直角的一側。



平行線的定義與性質

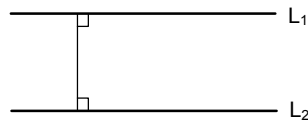
平行線的定義：

由【公設五】我們給定兩直線將平行的定義。在平面的兩條直線，若有一直線能同時垂直於這兩條直線，就說這兩條直線互相平行。且平行的兩條直線永不相交。如下圖，直線 L_1 與 L_2 平行，記作 $L_1 \parallel L_2$ ，讀作「 L_1 平行於 L_2 」。

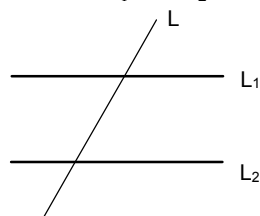


平行觀念：

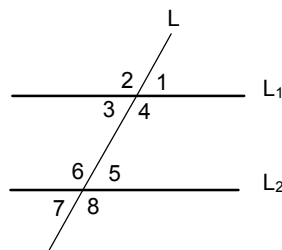
- (1) 兩平行線之間保持相同的距離，且無限延伸後沒有交點。
- (2) 一線段若垂直於平行線中的一條直線，必垂直於平行線中的另一條直線。



截線：在一平面上，直線 L 分別與直線 L_1 與 L_2 相交於不同兩點時，則 L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。如下圖， L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。

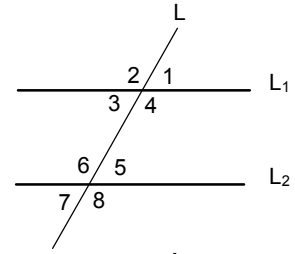


截角：直線 L 為 L_1 與 L_2 的截線，形成 8 個截角，如下圖。



(1)同位角相等：

$\angle 1$ 在 L_1 的右上方， $\angle 5$ 在 L_2 的右上方，位置相同都在右上方，故稱 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 為同位角，同理， $\angle 4$ 與 $\angle 8$ 、 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 都是同位角。在此我們可知：
 $\angle 1 = \angle 5$ ； $\angle 4 = \angle 8$ ； $\angle 2 = \angle 6$ ； $\angle 3 = \angle 7$ 。



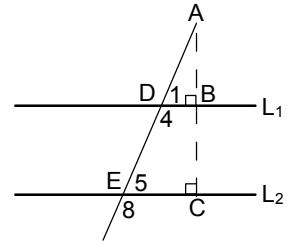
【證明】如右圖，做 \overline{AC} 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2 。

在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle AEC$ 中， $\angle B = \angle C$ 皆為直角，且 $\angle BAD = \angle CAE$ 。

在 $\triangle ADB$ 中， $\angle A + \angle B + \angle 1 = 180^\circ$ (三角形內角和 180°)。

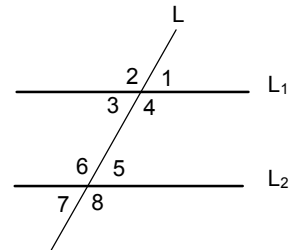
在 $\triangle AEC$ 中， $\angle A + \angle C + \angle 5 = 180^\circ$ (三角形內角和 180°)。

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$ ，故同位角相等。



(2)內錯角相等：

$\angle 5$ 與 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 與 $\angle 6$ ，都在 L_1 與 L_2 的內側，但交錯在 L 的兩邊，故稱為內錯角，在此我們可知 $\angle 3 = \angle 5$ ； $\angle 4 = \angle 6$ 。



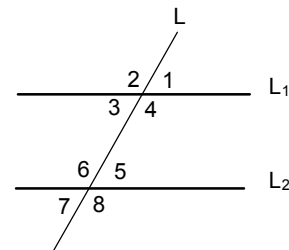
【證明】如右圖， $\because \angle 1 = \angle 3$ (對頂角相等)

又 $\odot \angle 1 = \angle 5$ (同位角相等)

$\therefore \angle 3 = \angle 5$ ，故內錯角相等。

(3)同側內角互補：

$\angle 5$ 與 $\angle 4$ 都在 L_1 與 L_2 的內側，且在 L 的同一側，故稱為同側內角；同理， $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也為同側內角。在此我們可知 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ ； $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ 。



【證明一】 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$

$\because \angle 1 = \angle 5$ (同位角相等)

$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

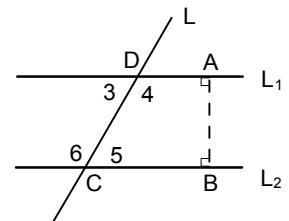
【證明二】如右圖，做 \overline{AB} 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2 。

\because 四邊形 $ABCD$ 內角和為 360°

$\therefore \angle A + \angle B + \angle 5 + \angle 4 = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ ，

故同側內角互補。



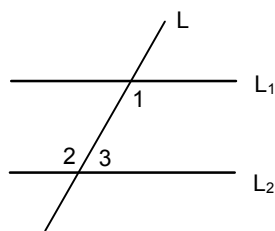
【範例】如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， L 是 L_1 與 L_2 的一條截線， $\angle 1 = 55^\circ$ ，求 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ？

【解說】 $\because L_1 \parallel L_2$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 55^\circ \text{ (內錯角相等)}$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

$$\angle 3 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

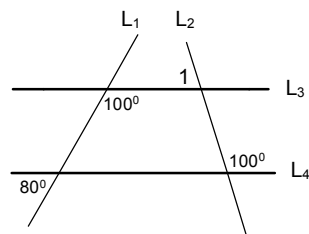


【範例】(1) 如附圖，直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 中，互相平行的有_____。

(2) 其中 $\angle 1 =$ _____。

【解說】(1) $L_3 \parallel L_4$ (\because 同側內角互補)

$$(2) \angle 1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$



【範例】設 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的兩邊互相平行，若 $\angle A = 65^\circ$ ，求 $\angle B =$ ？

【解說】

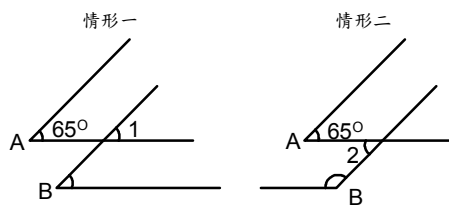
可能有兩種情形(如右圖)：

$$(1) \angle 1 = \angle A = 65^\circ \text{ (同位角相等)},$$

$$\angle B = \angle 1 = 65^\circ \text{ (同位角相等)}$$

$$(2) \angle 2 = \angle A = 65^\circ \text{ (內錯角相等)}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

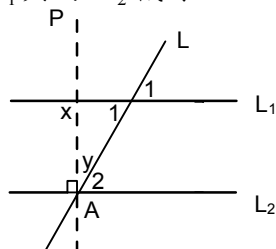


平行線的判別：

在前面我們知道， $L_1 \parallel L_2$ ， L 為 L_1 與 L_2 的截線，則有同位角相等、內錯角相等及同側內角互補的性質，那反過來假設 L_1 與 L_2 被一直線所截，則此三性質是否也可推得 $L_1 \parallel L_2$ ？

(1) 兩條直線被一直線所截，若截出的同位角相等，則此兩直線平行。

如下圖，若 L 為 L_1 與 L_2 截線，且 $\angle 1 = \angle 2$



【證明】過 A 點作直線 P ，使 $P \perp L_2$ 於 A 。

$$\Rightarrow \angle 2 + \angle y = 90^\circ \dots \textcircled{1}$$

$$\angle 1 + \angle y = 180^\circ - x \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \angle 1 - \angle 2 = 90^\circ - x$$

$$\because \angle 1 = \angle 2 \text{ (同位角相等)}。$$

$$\therefore x = 90^\circ, \text{ 故 } L_1 \parallel L_2。$$

(2) 兩條直線被一直線所截，若截出的內錯角相等，則此兩直線平行。

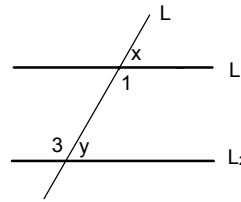
如下圖，若 L 為 L_1 與的 L_2 截線，且 $\angle 1 = \angle 3$

【證明】 $\angle x + \angle 1 = 180^\circ$

$$\angle 3 + \angle y = 180^\circ$$

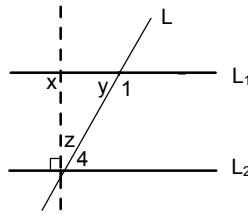
$$\Rightarrow \angle x = \angle y$$

By(1)故 $L_1 // L_2$ 。



(3) 兩條直線被一直線所截，若截出的同側內角互補，則此兩直線平行。

如下圖，若 L 為 L_1 與的 L_2 截線，且 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$



【證明】 $\angle y + \angle 1 = 180^\circ \dots \textcircled{1}$

$$\angle z + \angle 4 = 90^\circ \dots \textcircled{2}$$

$$\angle x = \angle y + \angle z \text{ (外角定理)} \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow (\angle y + \angle 1) + (\angle z + \angle 4) + \angle x = 180^\circ + 90^\circ + (\angle y + \angle z)$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 4 + \angle x = 270^\circ$$

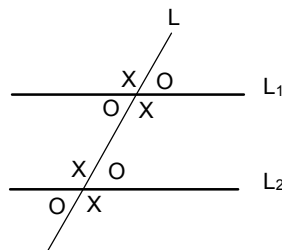
$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180$$

$$\therefore x = 90^\circ, \text{ 故 } L_1 // L_2 \text{。}$$

【結論】 若兩平行線被一直線所截，則(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補。

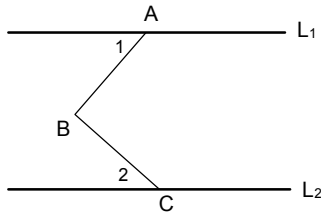
若兩條直線被一直線所截若(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，三者其中一個成立，則此兩直線平行。

若兩條平行線被截線所截時，形成的八個角，角度只有兩種，如圖所示。

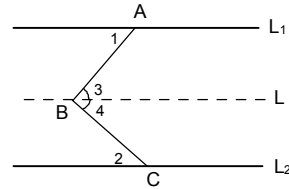


平行線性質的應用：對於平行線，除了常用平行線性質：(1)同位角相等；(2)內錯角相等；
(3)同側內角互補，我們將介紹幾個相關延伸性質。

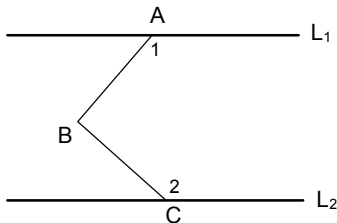
1. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$



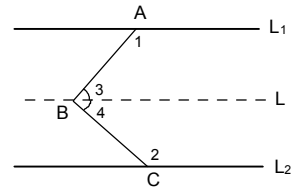
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1 ，
 $\because L_1 \parallel L_2 \therefore L \parallel L_2$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ (內錯角相等)
 故 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ 。



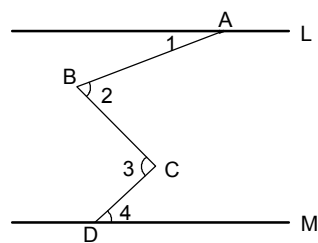
2. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^\circ$



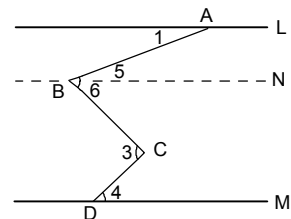
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1 ，
 $\because L_1 \parallel L_2 \therefore L \parallel L_2$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ，
 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (同側內角互補)
 故 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$



3. 如右圖，若 $L \parallel M$ ，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ 。

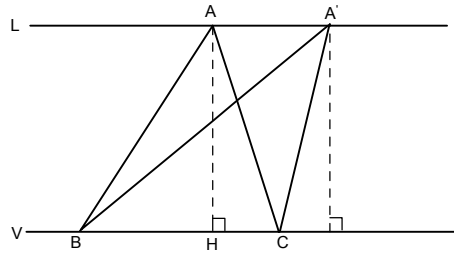


【證明】過 B 點作 N 平行 L，
 $\because L \parallel M \therefore N \parallel M$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$ ，
 $\angle 3 = \angle 4 + \angle 6$
 故 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 4$



4. 平行線上的三角形面積（同底等高的概念）

當 A 點在 L 上移動時... $\triangle ABC$ 的形狀會隨之改變，但是 $\triangle ABC$ 的面積是不變的。

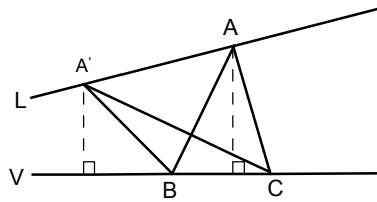


說明： $\triangle ABC$ 的底永遠是 \overline{BC} （同底）

$\triangle ABC$ 的高 \overline{AH} 是定值（等高）（ \overline{AH} 即為平行線 L、V 的距離）

那假設 L 與 V 不平行的話，如下圖：

當 A 點在 L 上移動時... $\triangle ABC$ 的形狀會隨之改變，則 $\triangle ABC$ 的面積會隨著高度不同而改變。



說明： $\triangle ABC$ 的底永遠是 \overline{BC} （同底）

$\triangle ABC$ 的高會隨著 L、V 之間的距離不同而改變，所以面積也會跟著改變。

$\triangle ABC$ 面積 $>$ $\triangle A'BC$ 面積

5. 利用平行線性質證明三角形內角和 = 180°

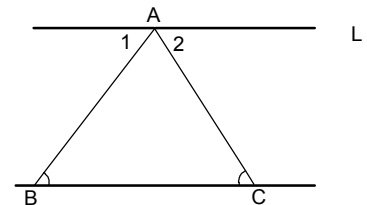
如圖，試證明 $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

【證明】過 A 點作直線 L 平行 \overline{BC}

$\therefore \angle ABC = \angle 1$ ； $\angle ACB = \angle 2$ （內錯角相等）

$\therefore \triangle ABC$ 內角和 = $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC$

= $\angle 2 + \angle 1 + \angle BAC = 180^\circ$



6. 利用平行線性質證明外角定理

如圖，試證明 $\angle 1 = \angle ABC + \angle BAC$

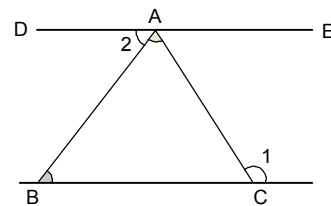
【證明】過 A 點作直線 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \angle ABC = \angle 2$ （內錯角相等）

$\therefore \angle 1 = \angle DAC$

= $\angle 2 + \angle BAC$

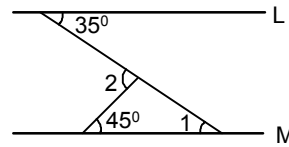
= $\angle ABC + \angle BAC$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1 = ?$ $\angle 2 = ?$

【解說】 $\angle 1 = 35^\circ$ （內錯角相等）

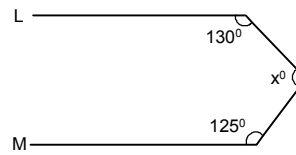
$$\angle 2 = 35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $x = ?$

【解說】 $130^\circ + x + 125^\circ = 360^\circ$

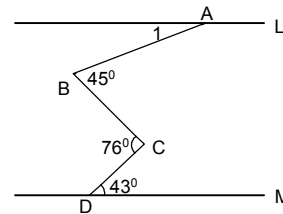
$$\therefore x = 105^\circ$$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1 = ?$

【解說】 $\angle 1 + 76^\circ = 45^\circ + 43^\circ$

$$\therefore \angle 1 = 12^\circ$$



【範例】如附圖，長方形 $ABCD$ 中，沿 \overline{AC} 摺疊， D 點落在 D' 點上，若 $\angle DAC = 25^\circ$ ，則：

(1) $\angle ACD = ?$ (2) $\angle AEB = ?$ (3) $\angle ECD = ?$

【解說】(1) $\triangle ADC$ 中， $\angle DAC = 25^\circ$ ， $\angle D = 90^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ = \angle ACD'$$

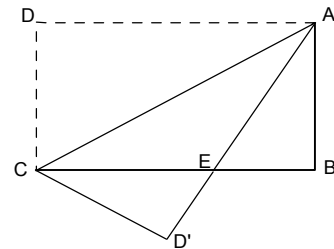
(2) $\therefore \angle DAC = \angle D'AC = 25^\circ$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAC + \angle D'AC = 50^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB = 50^\circ \text{（內錯角相等）}$$

(3) $\therefore \angle ACE = \angle DAC = 25^\circ$ （內錯角相等）

$$\therefore \angle ECD' = \angle ACD' - \angle ACE = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$$



【範例】如附圖， $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ，且正五邊形 $EFGHI$ 的頂點 H 、 F 分別在 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{CD} 上，又 $\angle GFD$ 的度數是 $\angle EFC$ 的 3 倍，求：(1) $\angle GFD = ?$

(2) $\angle AHI = ?$

【解說】(1) 正五邊形一內角 $= \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$

$$\text{設 } \angle EFC = x^\circ \quad \therefore \angle GFD = 3x^\circ$$

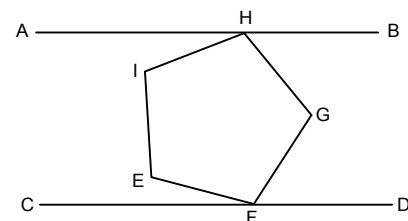
$$\Rightarrow x^\circ + 108^\circ + 3x^\circ = 180^\circ, \quad x^\circ = 18^\circ$$

$$\text{故 } \angle GFD = 18^\circ \times 3 = 54^\circ$$

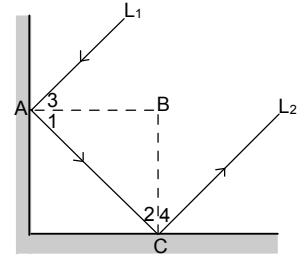
(2) $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \therefore \angle HGF = \angle BHG + \angle GFD$

$$\therefore 108^\circ = \angle BHG + 54^\circ, \quad \angle BHG = 54^\circ$$

$$\therefore \angle AHI = 180^\circ - 54^\circ - 108^\circ = 18^\circ$$



【範例】如附圖，有一條光線 L_1 經過兩個互相垂直的平面鏡反射後，反射光線為 L_2 ，那麼 L_1 和 L_2 是否平行？為什麼？



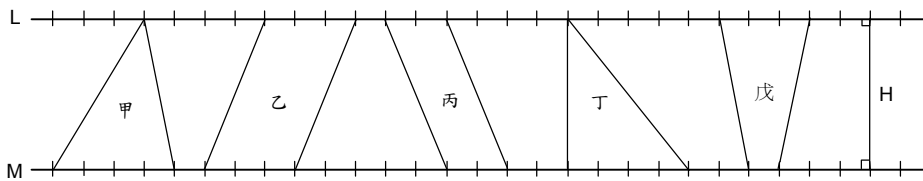
【解說】 $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，

又 $\angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ，

所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ （同側內角互補）

，故 $L_1 \parallel L_2$ 。

【範例】若 $L \parallel M$ ，選出面積相同的圖形



【解說】 甲面積：甲 = $\frac{1}{2} \times 4 \times H = 2H$ 乙面積：乙 = $3H$

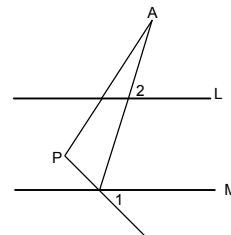
丙面積：丙 = $2H$

丁面積：丁 = $\frac{1}{2} \times 4 \times H = 2H$

戊面積：戊 = $\frac{1}{2} \times (3+1) \times H = 2H$

【範例】如圖，已知 $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = 40^\circ$ 、 $\angle 2 = 70^\circ$ 、 $\angle A = 25^\circ$ ，則 $\angle P =$ _____ 度。

【解說】 $\angle P = \angle 1 + \angle 2 - \angle A$
 $= 110^\circ - 25^\circ$
 $= 85^\circ$



【範例】如圖，已知 $L \parallel M$ ，請問：

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 等於 _____ 度。

【解說】 作 L_1 、 L_2 、 L_3 平行 L

$\because L \parallel L_1 \quad \therefore \angle 1 = \angle a$ （同位角相等）

$\because L_1 \parallel L_2 \quad \therefore \angle a + \angle 2 = \angle b$ （同位角相等）

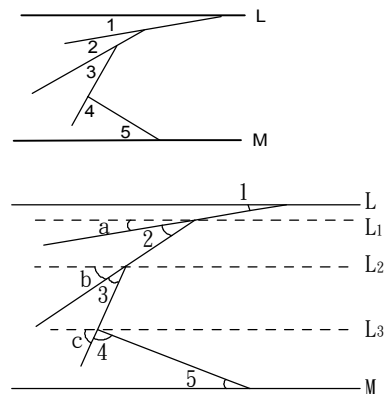
$\because L_2 \parallel L_3 \quad \therefore \angle b + \angle 3 = \angle c$ （同位角相等）

則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= \angle a + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= \angle b + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$= \angle c + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$



【範例】如附圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ，
 $\angle 2 = 40^\circ$ ，則 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

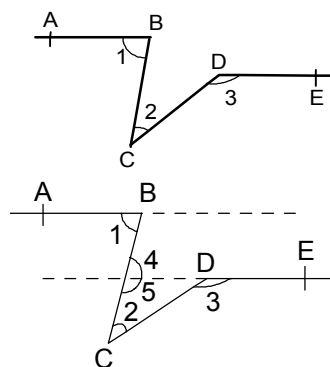
【解說】作 \overrightarrow{AB} 與 \overleftarrow{ED}

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\therefore \angle 1 = \angle 4 = 80^\circ$ (內錯角相等)

$\therefore \angle 5 = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$\angle 3 = \angle 2 + \angle 5 = 40^\circ + 100^\circ = 140^\circ$

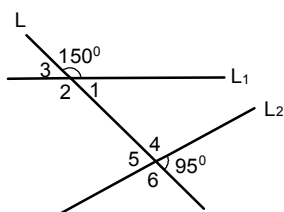


小 試 身 手

【範例一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，求：

- $\angle 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ 度， $\angle 1$ 的內錯角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 2 = \underline{\hspace{1cm}}$ 度， $\angle 3$ 的同位角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。



解答：

$$\angle 1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

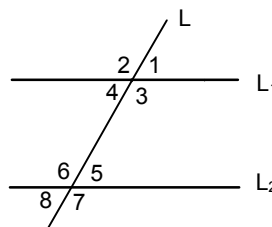
$$\angle 1 \text{ 的內錯角是 } \angle 5 = 95^\circ$$

$$\angle 2 = 150^\circ, \angle 3 \text{ 的同位角是 } \angle 5 = 95^\circ$$

【練習一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，設 $\angle 1 = 50^\circ$ 求：

- $\angle 3$ 的內錯角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
 $\angle 3$ 的同側內角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 5$ 的同位角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 4$ 的鄰角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 6$ 的對頂角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。



解答：

$$\angle 3 \text{ 的內錯角是 } \angle 6 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle 3 \text{ 的同側內角是 } \angle 5 = 50^\circ$$

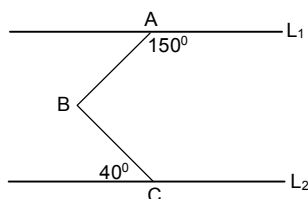
$$\angle 5 \text{ 的同位角是 } \angle 1 = 50^\circ$$

$$\angle 4 \text{ 的鄰角是 } \angle 2 \text{ 或 } \angle 3 = 130^\circ$$

$$\angle 6 \text{ 的對頂角是 } \angle 7 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

【範例二】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，求 $\angle ABC = ?$

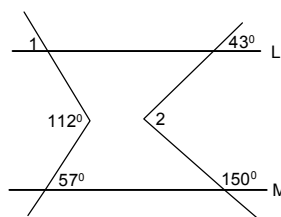


解答：

$$\angle ABC = 180^\circ - 150^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

【練習二】

如圖，已知 $L \parallel M$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 = ?$

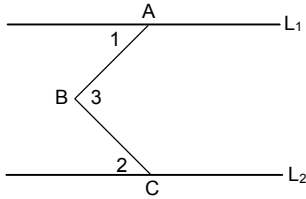


解答：

$$\angle 1 = 112^\circ - 57^\circ = 55^\circ$$

【範例三】

如圖， $L \parallel M$ ， $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$ ，且
 $\angle 3 = 99^\circ$ ，則 $\angle 1 = ?$

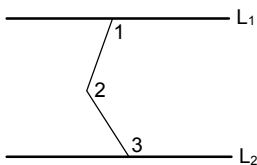


解答：

- (1) $\angle ABC = 180^\circ - 150^\circ + 40^\circ = 70^\circ$
 (2) 設 $\angle 1 = 4x^\circ$ ， $\angle 2 = 5x^\circ$
 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 4x^\circ + 5x^\circ = 99^\circ$
 $\Rightarrow x = 11$
 $\Rightarrow \angle 1 = 4x^\circ = 44^\circ$

【範例四】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，若 $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 150^\circ$ ，
 則 $\angle 3 = ?$

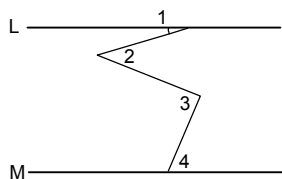


解答：

$$\begin{aligned} \because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 &= 360^\circ \\ \Rightarrow \angle 3 &= 360^\circ - \angle 1 - \angle 2 \\ &= 360^\circ - 100^\circ - 150^\circ = 110^\circ \end{aligned}$$

【範例五】

如圖， $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = 12^\circ$ 、 $\angle 2 = 33^\circ$ 、
 $\angle 3 = 95^\circ$ ，則 $\angle 4 = ?$

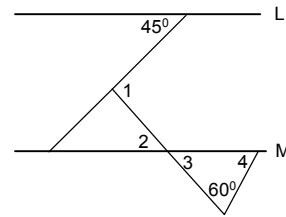


解答：

$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 3 &= \angle 2 + \angle 4 \\ \Rightarrow 12^\circ + 95^\circ &= 33^\circ + \angle 4 \\ \Rightarrow \angle 4 &= 107^\circ - 33^\circ = 74^\circ \end{aligned}$$

【練習三】

如圖，已知 $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = (7x+1)^\circ$ ，
 $\angle 2 = (3x+8)^\circ$ ，則 $\angle 1 + \angle 4 = ?$

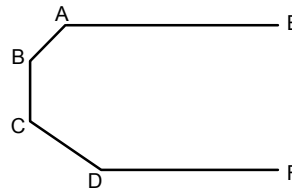


解答：

- (1) $\angle 1 = 112^\circ - 57^\circ = 55^\circ$
 $\angle 2 = 180^\circ - 150^\circ + 43^\circ = 73^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 = 55^\circ + 73^\circ = 128^\circ$
 (2) $\angle 1 = \angle 2 + 45^\circ$
 $\Rightarrow 7x + 1 = 3x + 8 + 45$
 $\therefore x = 13$
 $\therefore \angle 1 = 92^\circ$ ， $\angle 2 = 47^\circ = \angle 3$
 $\therefore \angle 4 = 73^\circ$
 $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 165^\circ$

【練習四】

如圖， $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$ ， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$

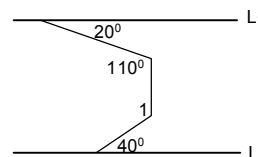


解答：

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

【練習五】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，求 $\angle 1$ 的度數。

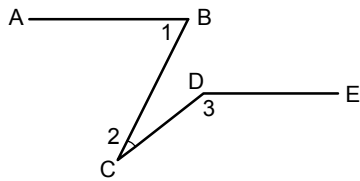


解答：作 $L_3 \parallel L_1 \parallel L_4 \parallel L_2$ ，

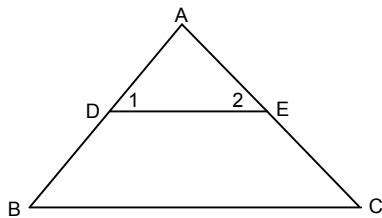
$$\begin{aligned} \text{所以 } \angle 2 &= 20^\circ, \\ \angle 3 &= 110^\circ - 20^\circ = 90^\circ, \\ \angle 4 &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \\ \angle 5 &= 40^\circ, \\ \therefore \angle 1 &= \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ \end{aligned}$$

【範例六】

- (1) 如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，則 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- (2) 如圖， $\angle 1 = \angle A$ ，且 $10\angle 1 = 5\angle B = 2\angle C$ 則 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



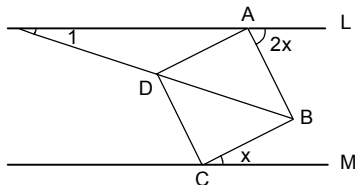
解答：

$$\begin{aligned} (1) \because \angle 3 &= \angle 2 + (180^\circ - \angle 1) \\ &= 40^\circ + 100^\circ \\ &= 140^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 10\angle 1 &= 5\angle B = 2\angle C \\ \Rightarrow 10\angle A &= 5\angle B = 2\angle C \\ \Rightarrow \angle A : \angle B : \angle C &= 1:2:5 \\ \because \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B &= \frac{2}{8} \times 180^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

【範例七】

如圖， $L \parallel M$ ， $ABCD$ 為正方形，求 $\angle 1$ 。

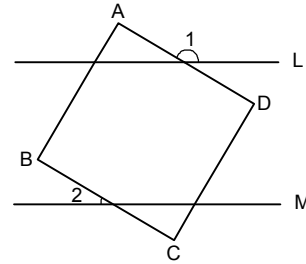


解答：

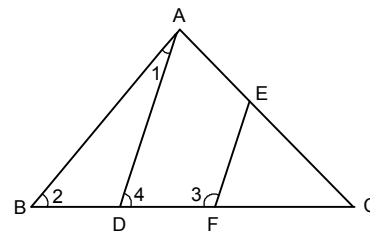
$$\begin{aligned} \angle ABC &= x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 30 \\ \angle ADB &= 45^\circ = \angle 1 + (180^\circ - 90^\circ - 2 \times 30^\circ) \\ \Rightarrow \angle 1 &= 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \end{aligned}$$

【練習六】

- (1) 如圖，已知 $L \parallel M$ ，四邊形 $ABCD$ 為正方形，若 $\angle 1 = 150^\circ$ ，則 $\angle 2 = ?$



- (2) 如圖， $\angle 1 = 15^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$ ，則當 $\angle 3 = ?$ 時 $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ 。



解答：

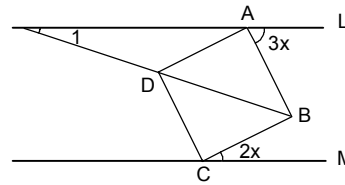
$$\begin{aligned} (1) \angle 1 &= \angle 4 + \angle A = \angle 4 + 90^\circ \\ \Rightarrow \angle 4 &= \angle 1 - 90^\circ \\ &= 150^\circ - 90^\circ \\ &= 60^\circ = \angle 3 \\ \angle 2 &= \angle ABC - \angle 3 \\ &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{aligned}$$

- (2) 若 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \because \angle 4 &= \angle 1 + \angle 2 = 15^\circ + 50^\circ = 65^\circ \\ \angle 3 &= 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \end{aligned}$$

【練習七】

如圖， $L \parallel M$ ， $ABCD$ 為正方形，求 $\angle 1$

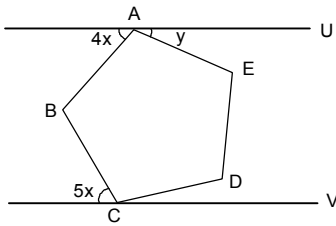


解答：

$$\begin{aligned} \angle ABC &= 3x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 18 \\ \angle ADB &= 45^\circ = \angle 1 + (180^\circ - 90^\circ - 3 \times 18^\circ) \\ \angle 1 &= 45^\circ - 36^\circ = 9^\circ \end{aligned}$$

【範例八】

如圖， $U \parallel V$ ， $ABCDE$ 為正五邊形，求 y°



解答：

$$\angle ABC = \frac{(5-2)}{5} \times 180^\circ = 108^\circ = 4x^\circ + 5x^\circ$$

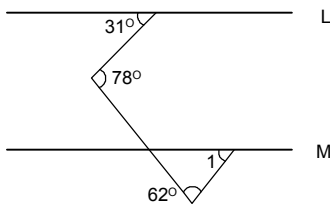
$$\Rightarrow x = 12$$

$$4x + y + 108^\circ = 180^\circ$$

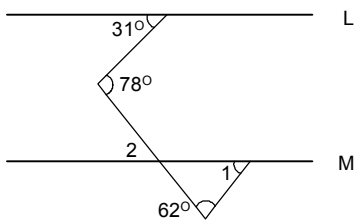
$$y = 180^\circ - 108^\circ - 48^\circ = 24^\circ$$

【範例九】

如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1$ 。



解答：



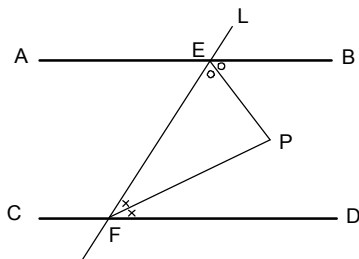
$$\angle 2 = 78^\circ - 31^\circ = 47^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 1 + 62^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle 2 - 62^\circ = 71^\circ$$

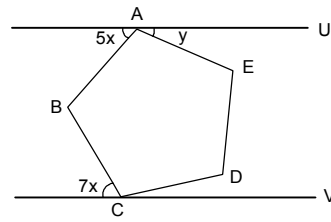
【範例十】

如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， L 為截線， \overline{EP} 平分 $\angle BEF$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，試說明 \overline{EP} 與 \overline{FP} 之間的關係。



【練習八】

如圖， $U \parallel V$ ， $ABCDE$ 為正五邊形，求 y°



解答：

$$\angle ABC = \frac{(5-2)}{5} \times 180^\circ = 108^\circ = 7x^\circ + 5x^\circ$$

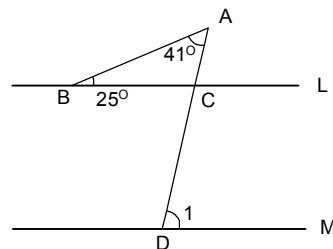
$$\Rightarrow x = 9$$

$$5x + y + 108^\circ = 180^\circ$$

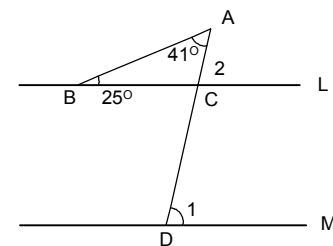
$$y = 180^\circ - 108^\circ - 45^\circ = 27^\circ$$

【練習九】

如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1$ 。



解答：



$$\angle 1 = \angle 2 = 25^\circ + 41^\circ = 66^\circ$$

【練習十】

如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， L 為截線， \overline{EP} 平分 $\angle BEF$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，且 $\angle BEF = 120^\circ$ ，試問：(1) $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 各多少度？

$$(2) \angle 1 + \angle 3 = ?$$

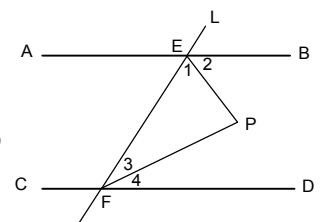
解答：

$$\angle 1 = \angle 2 = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

$$\angle EFD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 60^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$$



■ 古希臘三大幾何作圖問題

古希臘三大幾何作圖問題

在數學的歷史上有三個問題始終以可驚的力量堅定了兩千多年。初等幾何學到現在至少已有了三千年的歷史，在這期間努力於初等幾何學之發展的學者們曾經遇到過很多的難題，而始終絞著學者腦汁的卻就是這三個問題：

「立方倍積」，「化圓為方」和「三等分角」，而這三個問題，也就被合稱為「古希臘三大幾何問題」。

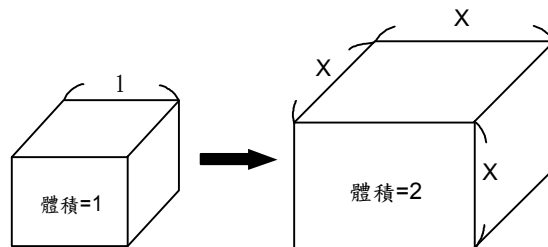
- (1) 立方倍積問題：求作一個正立方體，使其體積為邊長為 1 的正立方體的 2 倍。
- (2) 方圓問題：求作一個正方形，使其面積和半徑為 1 的圓面積相等。
- (3) 三等分角問題：三等分任意已知角。

有關立方倍積問題：

關於立方倍積的問題有一個神話流傳：當年希臘提洛斯 (Delos) 島上瘟疫流行，居民恐懼也向島上的守護神阿波羅 (Apollo) 祈禱，神廟裡的預言修女告訴他們神的指示：“把神殿前的正立方形祭壇加到二倍，瘟疫就可以停止。”由此可見這神是很喜歡數學的。居民得到了這個指示後非常高興，立刻動工做了一個新祭壇，使每一稜的長度都是舊祭壇稜長的二倍，但是瘟疫不但沒停止，反而更形猖獗，使他們都又驚奇又懼怕。

結果被一個學者指出了錯誤：「稜二倍起來體積就成了八倍，神所要的是二倍而不是八倍。」大家都覺得這個說法很對，於是改在神前並擺了與舊祭壇同形狀同大小的兩個祭壇，可是瘟疫仍不見消滅。人們困擾地再去問神，這次神回答說：「你們所做的祭壇體積確是原來的二倍，但形狀卻並不是正方體了，我所希望的是體積二倍，而形狀仍是正方體。」居民們恍然大悟，就去找當時大學者柏拉圖請教。

由柏拉圖和他的弟子們熱心研究，但不曾得到解決，並且耗費了後代許多數學家們的腦汁。而由於這一個傳說，立方倍積問題也就被稱為提洛斯問題。

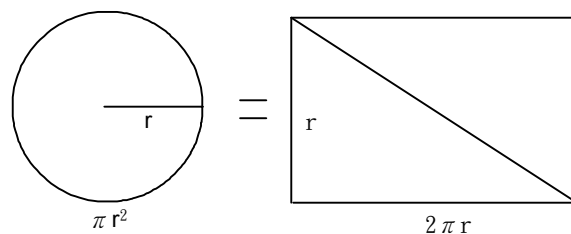


而此問題即是解 $2=X^3$ 的代數問題。那請問 $X=2^{1/3}$ 的長度是否可以用圓規直尺所畫出呢？

說明：設原立方體的邊長為 1，要作出的立方體邊長為 x ，則 x 要滿足 $x^3=2$ ，這個方程式沒有有理根，當然就沒有尺規作圖的 x 了。

有關化圓為方問題：

方圓的問題與提洛斯問題是同時代的，由希臘人開始研究。有名的阿基米得把這問題化成下述的形式：已知一圓的半徑是 r ，圓周就是 $2\pi r$ ，面積是 πr^2 。由此若能作一個直角三角形，其夾直角的兩邊長分別為已知圓的周長 $2\pi r$ 及半徑 r ，則這三角形的面積就是 $\frac{1}{2} \times (2\pi r) \times r = \pi r^2$ 與已知圓的面積相等。由這個直角三角形不難作出同面積的正方形來。但是如何作這直角三角形的邊 πr 長度。即如何作一線段使其長等於一已知圓的周長，這問題阿基米德可就解不出了。



有關三等分角問題：

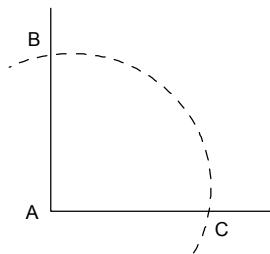
西元前五、六百年間希臘的數學家們就已經想到了二等分任意角的方法，二等分一個已知角既是這麼容易，很自然地會把問題略變一下：三等分怎麼樣呢？這樣，這一個問題就這麼非常自然地出現了。對於特別角 45° 、 90° 、 135° 、 180° 等角可以三等分，但是任意的角並不可以三等分，接著我們來看看如何將 90° 角三等分。

【範例】 將 90° 角三等分。

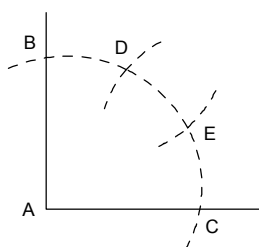
【已知】 某一角 $\angle A = 90^\circ$ 。

【求作】 兩直線將 $\angle A$ 三等分。

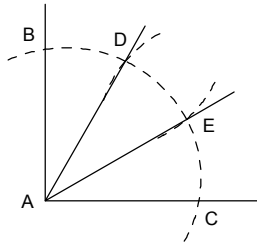
【作法】 步驟一：以 A 為圓心，適當長為半徑化弧，交角的兩邊於 B、C 兩點。



步驟二：分別以 B、C 為圓心， \overline{AB} 為半徑化弧，交 \overline{BC} 於 D、E 兩點。



步驟三：連接 \overline{AD} 、 \overline{AE} ，則 \overline{AD} 、 \overline{AE} 將 $\angle A$ 三等分。



注：1837年法國數學家凡齊爾(1814-1848)首次運用了代數的方法嚴格證明了這個問題是尺規作圖不可能的，至此這個才算獲得解決。但由於對他的研究，使人們發現了一些特殊的曲線，如圓錐曲線、蚌線、蔓葉線等，促進了圓錐曲線理論的建立和發展。人們還發現，只要不受尺規作圖工具的約束，倍立方體的問題是可以解決的。