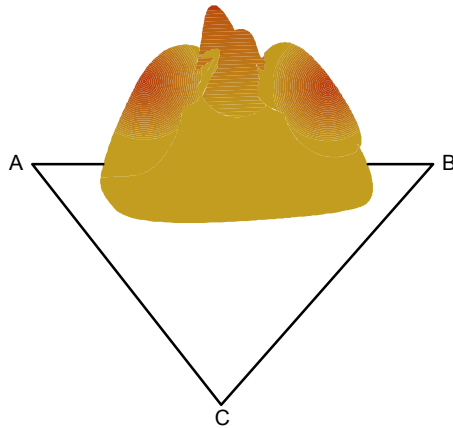


三角形的基本性質

三角形的內角與外角

這一章我們要學習三角形的基本性質，可不要小看三角形喔！它在測量方面的應用卻下陸上天，無遠弗屆：逢山開洞，要探知地貌，要問廣寒宮有多遠，都少不了它。

挖山洞時如果從山的兩頭一齊動手，最後會接通嗎？或者，從一頭挖過去，怎麼預知出來的那一頭就是想要的地方？視線讓一座山擋住了，腦筋如何急轉彎呢？



其實只要找一個參考點 C (如上圖)，接下來只要決定 $\angle A$ 與 $\angle B$ 就好了。還不只如此！想要測量 101 大樓的高度、月亮離我們多遠... 等，都需要利用三角形的性質。讓我們開始進入三角形的世界吧！

有關三角形角的名詞：

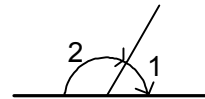
三角形的記法與讀法：

(1) 符號「 Δ 」代表三角形。

(2) 頂點為 A、B、C 的三角形，記為「 ΔABC 」，讀作「三角形 ABC」。

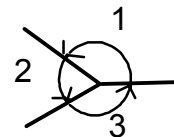
平角：角的兩邊成一直線的角，其度數為 180° 。

如下圖， $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 。



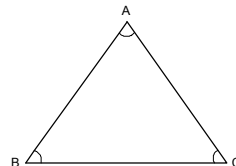
周角：繞著一點轉一圈所成的角，其度數為 360° 。

如下圖， $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$ 。



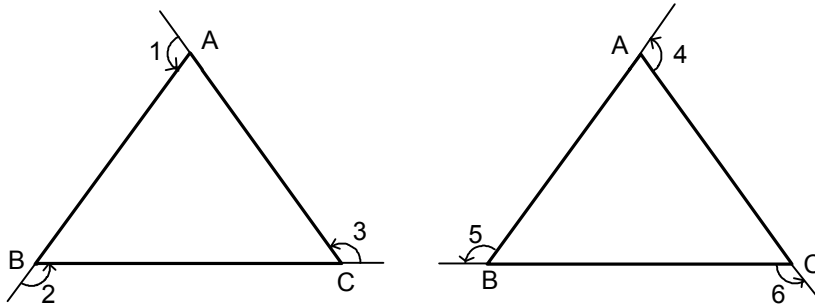
內角：三角形 A、B、C 中每個頂點兩邊所夾的角。

如下圖： $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 為 ΔABC 的三內角。



外角：三角形中一邊和另一邊延長線所形成的角。

如下圖， $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 都是 $\angle A$ 的外角、 $\angle 2$ 和 $\angle 5$ 都是 $\angle B$ 的外角、 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 是 $\angle C$ 的外角。



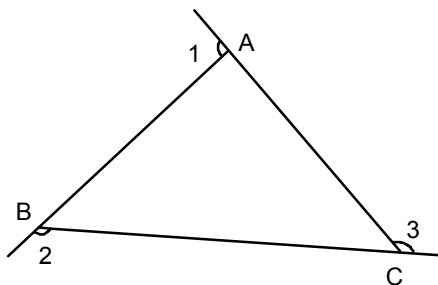
※ $\triangle ABC$ 中每個內角都有 2 個相等的外角。

※三角形的任何一內角與它的外角，在頂點的地方形成一個平角，

即 $\angle A + \angle 1 = 180^\circ$ 、 $\angle B + \angle 2 = 180^\circ$ 、 $\angle C + \angle 3 = 180^\circ$ 。

內對角：在 $\triangle ABC$ 中，與一外角頂點不同的內角稱為這個外角的內對角。

如下圖， $\angle B$ 與 $\angle C$ 為 $\angle 1$ 的內對角， $\angle A$ 與 $\angle C$ 為 $\angle 2$ 的內對角， $\angle A$ 與 $\angle B$ 為 $\angle 3$ 的內對角。



有關三角形外角與內角的定理：

三角形的內角和定理：三角形的三個內角的和等於 180°

三角形的外角和定理：三角形的三個外角和等於 360°

三角形的外角定理：三角形的任一外角等於它的兩個內對角之和。

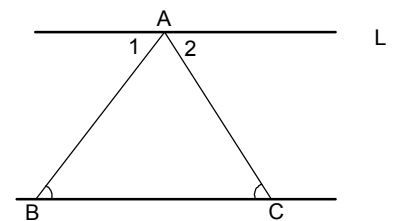
三角形的內角和定理：三角形的三個內角的和等於 180° ；

如右圖，即 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

【證明】 過 A 點作直線 L 平行 \overline{BC}

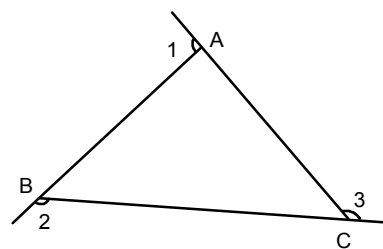
$\therefore \angle ABC = \angle 1$ ； $\angle ACB = \angle 2$ （內錯角相等）

$\therefore \triangle ABC$ 內角和 = $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC$
 $= \angle 2 + \angle 1 + \angle BAC = 180^\circ$



三角形的外角和定理：三角形的三個外角和等於 360° ；如右圖，即 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^{\circ}$

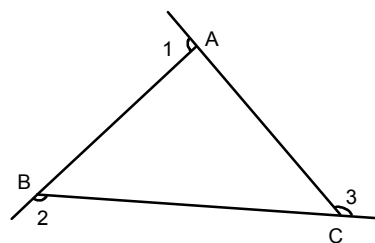
【證明】 $\because \angle 1 + \angle A = 180^{\circ}$
 $\angle 2 + \angle B = 180^{\circ}$
 $\angle 3 + \angle C = 180^{\circ}$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle A + \angle B + \angle C = 540^{\circ}$
 又 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^{\circ}$



三角形的外角定理：三角形的任一外角等於它的兩個內對角之和。

如下圖， $\angle 1 = \angle B + \angle C$ ； $\angle 2 = \angle A + \angle C$ ； $\angle 3 = \angle A + \angle B$

【證明】 $\because \angle 1$ 是 $\angle A$ 的外角 $\therefore \angle 1 + \angle A = 180^{\circ}$
 而 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle B + \angle C$ ，
 同理， $\angle 2 = \angle A + \angle C$ ， $\angle 3 = \angle A + \angle B$



【範例】 若三角形三內角 $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$ ，則試求出此三角形三內角各為幾度？

且為何種三角形？

【解說】 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$

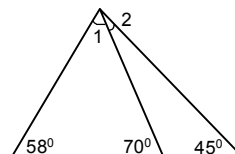
$$\therefore \angle A = 180 \times \frac{3}{3+4+5} = 45^{\circ} ; \angle B = 180 \times \frac{4}{3+4+5} = 60^{\circ}$$

$$\angle C = 180 \times \frac{5}{3+4+5} = 75^{\circ} \quad \therefore \triangle ABC \text{ 為銳角三角形}$$

【範例】 如右圖，求出 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的度數 = ?

【解說】 $\angle 1 = 180^{\circ} - 58^{\circ} - 70^{\circ} = 52^{\circ}$ (內角和定理)

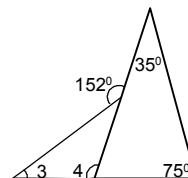
$$\angle 2 = 70^{\circ} - 45^{\circ} = 25^{\circ} \text{ (外角定理)}$$



【範例】 如右圖，求出 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 的度數 = ?

【解說】 $\angle 4 = 75^{\circ} + 35^{\circ} = 110^{\circ}$ (外角定理)

$$\angle 3 = 152^{\circ} - 110^{\circ} = 42^{\circ} \text{ (外角定理)}$$

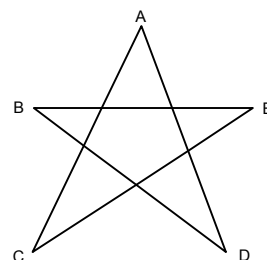
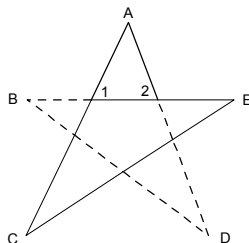


【範例】 如圖，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = ?$

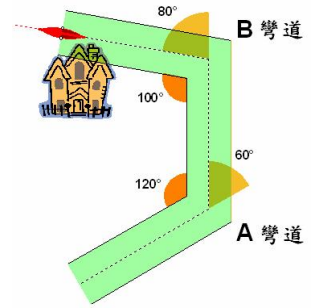
【證明】 由外角定理可知 $\angle 1 = \angle C + \angle E$ ； $\angle 2 = \angle B + \angle D$

且由三角形內角和可知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle A = 180^{\circ}$

$$\text{故 } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^{\circ}$$



【範例】 小明去威尼斯玩，為了想看古蹟，他必須坐船繞過 A、B 兩個彎才能到達，請問繞過兩彎後船身共轉了幾度呢？



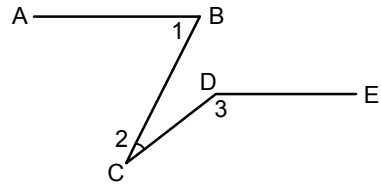
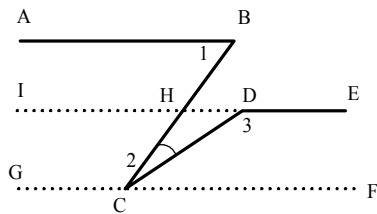
【解說】 由內角與外角和為 180° 的觀念可知：

⊖ 因為 A 彎道為 120° ， \therefore 所以船在過 A 彎道時轉了 60° 。

⊖ B 彎道為 100° ， \therefore 船在過 B 彎道時轉了 80° 。

因此，共轉了 $60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$ 。

【範例】 如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，則 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【解說】 利用三角形外角定理，可知

$$\begin{aligned} \angle 3 &= \angle 2 + \angle CHD = \angle 2 + \angle IHB \\ &= \angle 2 + 180^\circ - \angle 1 = 40^\circ + 180^\circ - 80^\circ = 140^\circ \end{aligned}$$

或是利用平行性質

$$\angle BCG = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

$$\angle DCF = 180^\circ - \angle 2 - \angle BCG = 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

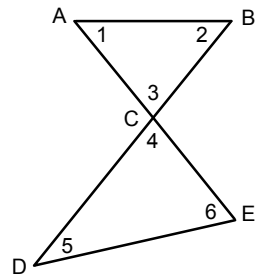
$$\angle 3 = 180^\circ - \angle DCF = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ。$$

有關外角定理的補充性質：

利用內角和及外角和定理，我們可以推得 2 個常用的「8 字型定理」及「箭頭定理」。

【8 字型定理】：如圖， \overline{AE} 、 \overline{BD} 交於 C，求證 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 6$

【證明】 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$
 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$ (對頂角相等)
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 6$



【箭頭定理】：如圖，證明 $\angle ADB = \angle D = \angle A + \angle B + \angle C$

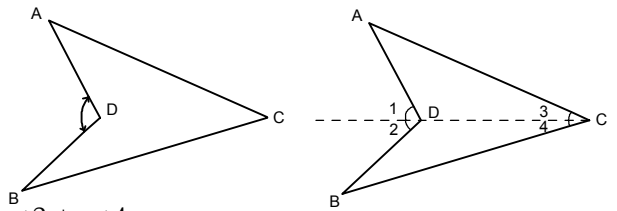
【證明】 (1) 做輔助線 \overline{CD} 。

(2) $\angle 1 = \angle A + \angle 3$ (外角定理)。

$\angle 2 = \angle B + \angle 4$ (外角定理)。

\therefore 可知： $\angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B + \angle 3 + \angle 4$

$\Rightarrow \angle D = \angle A + \angle B + \angle C$

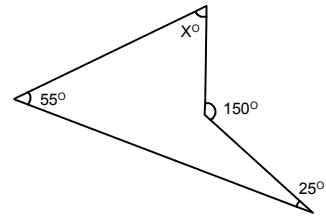


【範例】如右圖，求 $X = ?$

【解說】由箭頭定理可知：

$$150 = 55 + 25 + X$$

$$\therefore X = 70$$



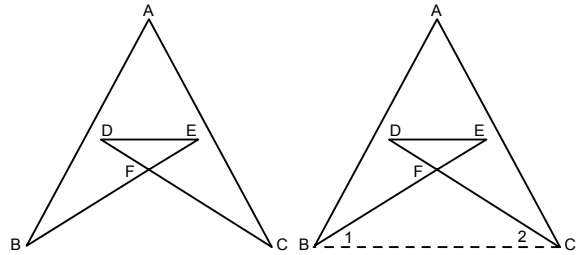
【範例】如右圖，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = ?$

【解說】連接 \overline{BC}

$$\angle D + \angle E = \angle 1 + \angle 2 \text{ (8 字型定理)}$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle 1 + \angle 2$$

$$= \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$$



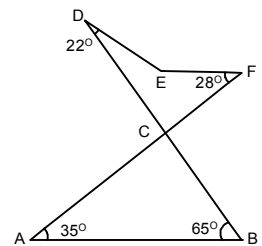
【範例】如圖，求 $\angle DEF = ?$

【解說】 $\angle ACB = 180^\circ - 35^\circ - 65^\circ = 80^\circ$ (三角形內角和 $= 180^\circ$)

又 $\angle DCF = \angle ACB = 80^\circ$ (對頂角相等)。

由箭頭定理可知：

$$\angle DEF = 22^\circ + 28^\circ + 80^\circ = 130^\circ$$

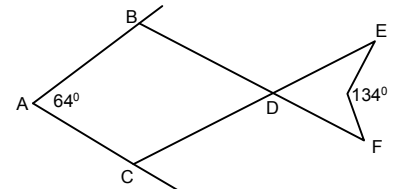


【範例】如下圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ，若 $\angle BAC = 64^\circ$ ，則 $\angle EDF =$ _____ 度，
 $\angle E + \angle F =$ _____ 度。

【解說】 $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

$$\Rightarrow ABCD \text{ 為平行四邊形} \Rightarrow \angle EDF = \angle BDC = \angle A = 64^\circ$$

$$\angle E + \angle F = \angle BAC - \angle EDF = 134^\circ - 64^\circ = 70^\circ$$



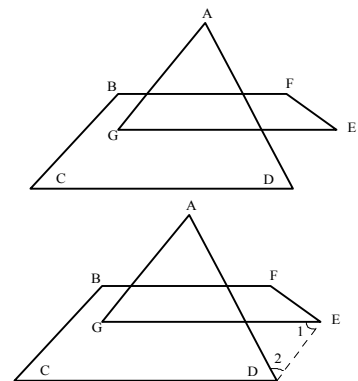
【範例】求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = ?$

【解說】作 \overline{DE} $\angle A + \angle G = \angle 1 + \angle 2$ 【8 字型定理】

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$$

$$= \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle 1 + \angle 2$$

$$= (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$$



【範例】如圖， $\angle A = \angle F = \angle G = (3x)^\circ$ ， $\angle B = \angle D = x^\circ$ ，則 $x = ?$

【解說】 $\ominus \angle A + \angle B = \angle E + \angle D$ 【8 字型定理】

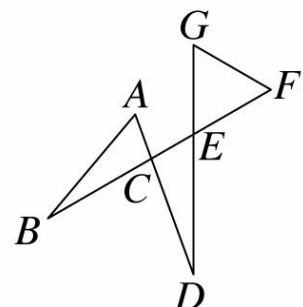
$$\therefore 3x^\circ + x^\circ = \angle E + x^\circ$$

$$\Rightarrow \angle E = 3x^\circ$$

$$\angle E + \angle G + \angle F = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x^\circ + 3x^\circ + 3x^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 9x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 20$$



【範例】ABCDE 為正五邊形，且正五邊形每一內角為 108° ，
F 為其內部一點，若 $\triangle FDC$ 為正三角形，求 $\angle EFB = ?$

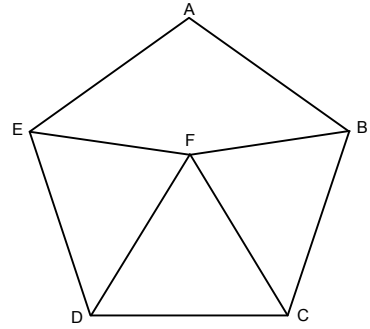
【解說】 $\angle EDF = 108^{\circ} - 60^{\circ}$ (正三角形內角為 60°)
 $= 48^{\circ}$

又 $\triangle DEF$ 為等腰三角形。

$$\therefore \angle EFD \text{ (底角)} = \frac{180^{\circ} - 48^{\circ}}{2} = 66^{\circ}$$

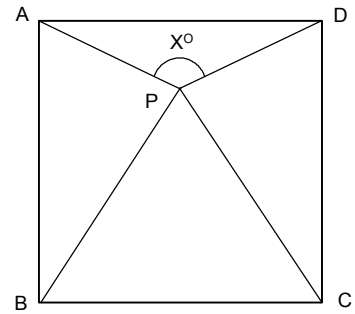
同理 $\angle BFC = 66^{\circ}$ 且 $\angle DFC = 60^{\circ}$

$$\therefore \angle EFB = 360^{\circ} - (66^{\circ} + 60^{\circ} + 66^{\circ}) \\ = 168^{\circ}$$



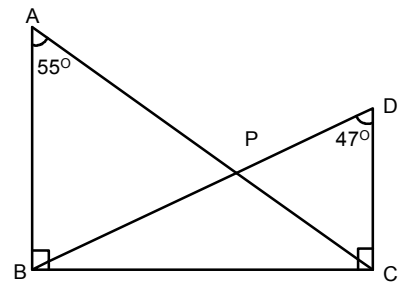
【範例】ABCD 為正方形， $\triangle PBC$ 為正三角形，求 $\angle APD = ?$

【解說】 \therefore 正三角形內角為 60°
 $\therefore \angle ABP = \angle DCP = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$
又 $\triangle APB$ 及 $\triangle DCP$ 為等腰三角形。
 \Rightarrow 兩底角 $= \frac{180^{\circ} - 30^{\circ}}{2} = 75^{\circ}$
 \therefore 對 P 點而言，一周角 $= 360^{\circ}$
 $\therefore X = 360^{\circ} - 60^{\circ} - 75^{\circ} - 75^{\circ} = 150^{\circ}$



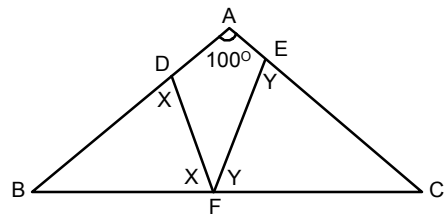
【範例】如右圖，求 $\angle BPC - \angle DPC = ?$

【解說】 \therefore 三角形內角和 $= 180^{\circ}$
 $\therefore \angle PCB = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 55^{\circ} = 35^{\circ}$
 $\angle PBC = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 47^{\circ} = 43^{\circ}$
由外角定理知：
 $\angle DPC = \angle PCB + \angle PBC = 35^{\circ} + 43^{\circ} = 78^{\circ}$
 $\therefore \angle BPC = 180^{\circ} - 78^{\circ} = 102^{\circ}$ (補角)。
 $\therefore \angle BPC - \angle DPC = 102^{\circ} - 78^{\circ} = 24^{\circ}$



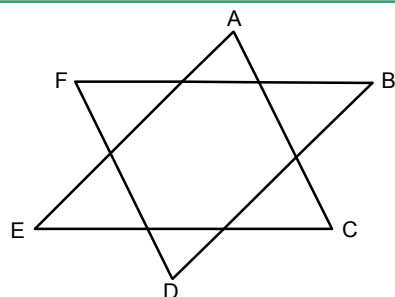
【範例】 $\triangle DBF$ 、 $\triangle CEF$ 均為等腰三角形， $\angle A = 100^{\circ}$ ，求 $\angle DFE = ?$

【解說】 \triangle 三角形內角和 $= 180^{\circ}$
 $\therefore \angle B + \angle C = 180^{\circ} - 100^{\circ} = 80^{\circ}$
 $\triangle DBF$ 、 $\triangle CEF$ 均為等腰三角形
又兩個三角形內角和 $= 360^{\circ}$
 $\therefore 2X + 2Y + \angle B + \angle C = 360^{\circ}$
 $2X + 2Y = 360^{\circ} - 80^{\circ} = 280^{\circ}$
 $X + Y = 140^{\circ}$
 $\therefore \angle DFE = 180^{\circ} - (X + Y)$
 $= 180^{\circ} - 140^{\circ} = 40^{\circ}$



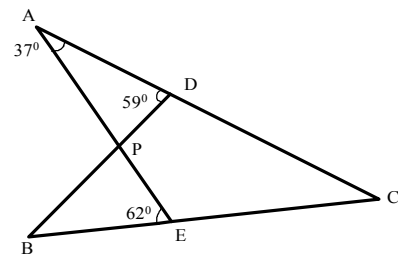
【範例】如右圖，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ ？

【解說】 $\angle B + \angle D + \angle F = 180^\circ$
 $\angle A + \angle C + \angle E = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360^\circ$



【範例】如圖，求 $\angle B$ 與 $\angle C$ 。

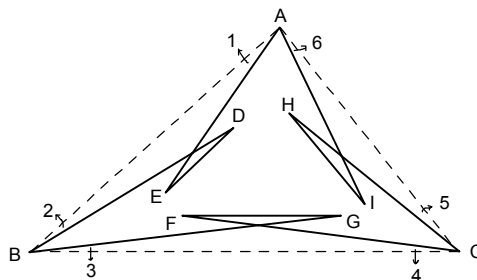
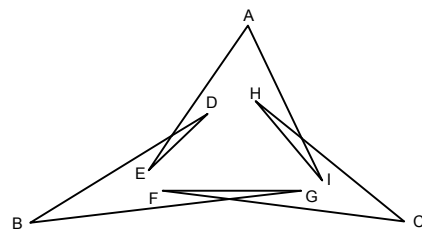
【解說】 $\angle A + \angle ADB = \angle B + \angle AEB$ 【8字型定理】
 $\Rightarrow 37^\circ + 59^\circ = \angle B + 62^\circ$
 $\Rightarrow 37^\circ + 59^\circ - 62^\circ = \angle B \Rightarrow \angle B = 34^\circ$
 $\angle APB = \angle A + \angle ADB = 37^\circ + 59^\circ = 96^\circ$
 $\angle APB = \angle A + \angle B + \angle C$ 【箭頭定理】
 $\Rightarrow \angle C = \angle APB - \angle A - \angle B = 96^\circ - 37^\circ - 34^\circ = 25^\circ$



【範例】求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I = ?$

【解說】連接 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC}

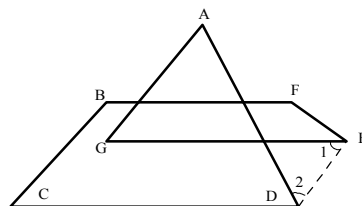
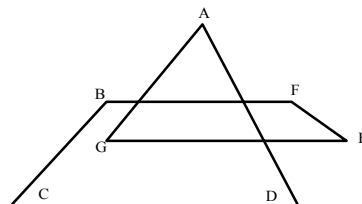
$\angle D + \angle E = \angle 1 + \angle 2$ 【8字型定理】
 $\angle G + \angle F = \angle 3 + \angle 4$ 【8字型定理】
 $\angle H + \angle I = \angle 5 + \angle 6$ 【8字型定理】
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I$
 $= \angle A + \angle B + \angle C + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$



【範例】求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = ?$

【解說】作 \overline{DE} $\angle A + \angle G = \angle 1 + \angle 2$ 【8字型定理】

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$
 $= \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle 1 + \angle 2$
 $= (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$



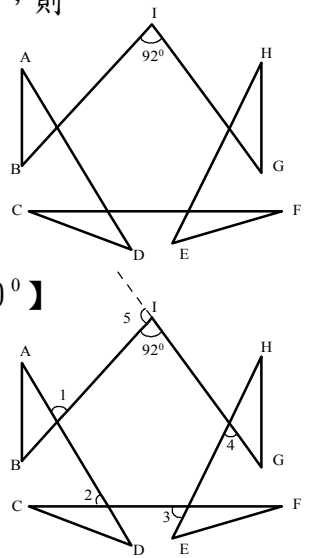
【範例】三原利用摺紙，摺出一個蛙形圖案，如圖所示，若 $\angle I = 92^\circ$ ，則 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H =$ _____ 度。

【解說】延長 \overline{IG} 得 I 的外角 $\angle 5$ ，

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H \\ = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 \quad \text{【三角形的外角定理】} \end{aligned}$$

又 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$ 【 n 邊形外角和為 360° 】

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H \\ = 360^\circ - (180^\circ - 92^\circ) = 272^\circ \end{aligned}$$



三角形內外角平分線性質

當我們進一步延伸內角和及外角定理，對於三角形內、外角平分線可以得到以下 3 個常見性質。

【三角形內角平分線性質】

任一 $\triangle ABC$ ，若 $\angle B$ 平分線與 $\angle C$ 平分線相交於 $\triangle ABC$ 內的一點 I ，

則有 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$ 。

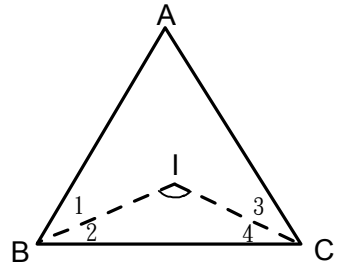
【證明】 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - \angle A$

Q $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle 3 = \angle 4$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$$

由箭頭定理知：

$$\angle BIC = \angle A + \angle 1 + \angle 3 = \angle A + \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$$



【三角形外角平分線性質】

任一 $\triangle ABC$ ，若 $\angle B$ 的外平分線與 $\angle C$ 的外平分線相交於 $\triangle ABC$ 外的一點 P ，

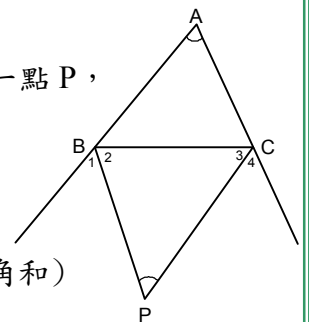
則有 $\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$

【證明】 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ (角平分線)

$\therefore \angle A + (180^\circ - 2\angle 2) + (180^\circ - 2\angle 3) = 180^\circ$ (三角形內角和)

$$\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = \frac{\angle A + 180^\circ}{2}$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$



【三角形內、外角平分線性質】

在 $\triangle ABC$ 中，內角 $\angle B$ 的平分線與 $\angle C$ 的外角平分線相交於一點 E ，則有 $\angle BEC = \frac{1}{2} \angle A$

【證明】由外角定理知：

$$\angle 3 + \angle 4 = (\angle 1 + \angle 2) + \angle A$$

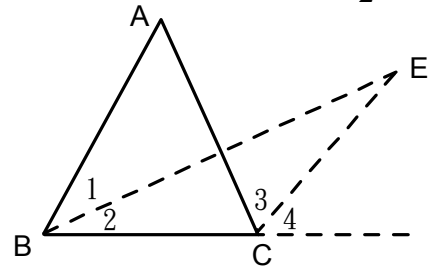
$$Q \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore 2\angle 4 = 2\angle 2 + \angle A$$

$$\Rightarrow \angle 4 - \angle 2 = \frac{1}{2} \angle A$$

由外角定理知： $\angle 4 = \angle 2 + \angle BEC$

$$\therefore \angle BEC = \angle 4 - \angle 2 = \frac{1}{2} \angle A$$



【範例】已知， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle 3 = \angle 4$ ，求 $\angle BIC = ?$

【解說】 $\because \angle A = 60^\circ$

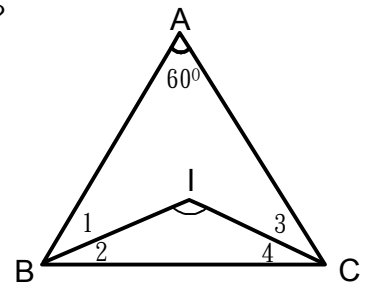
$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$Q \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

由箭頭定理知：

$$\angle BIC = \angle A + \angle 1 + \angle 3 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$



【範例】如圖， $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle 3 = \angle 4$ ，求 $\angle P = ?$

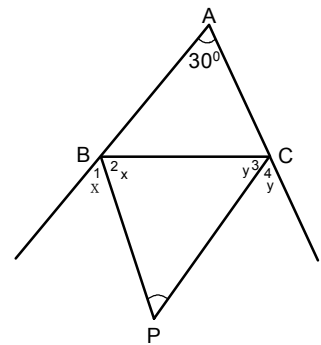
【解說】Q 三角形內角和 $= 180^\circ$

$$30^\circ + (180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 210^\circ = 2x + 2y$$

$$\Rightarrow x + y = 105^\circ$$

$$\angle P = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$





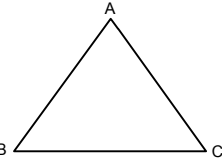
小試身手

【範例一】

- (1) $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 2\angle C$ 且 $\angle B = 30^\circ$ ，
求 $2\angle A + \angle C =$ _____ 度。
- (2) $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A + \angle B = 108^\circ$ ，
 $\angle C = 3\angle A$ ，求 $\angle B =$ _____ 度。

解答：

- (1) $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$
 $\angle A + \angle C = 180^\circ - 30^\circ$
 $\angle A + \angle C = 150^\circ \dots (1)$
 $\angle A = 2\angle C \dots (2)$
 (2) 代入 (1) $\Rightarrow 3\angle C = 150^\circ$
 $\Rightarrow \angle C = 50^\circ \Rightarrow \angle A = 2\angle C = 100^\circ$
 $\Rightarrow 2\angle A + \angle C = 2 \times 100^\circ + 50^\circ = 250^\circ$
- (2) $\angle C = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \Rightarrow \angle A = 72^\circ \div 3$
 $\Rightarrow \angle A = 24^\circ$
 $\angle B = 180^\circ - 24^\circ - 72^\circ = 84^\circ$

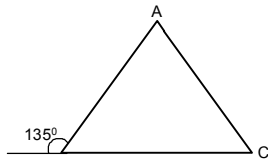


【範例二】

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle B$ 的外角是 135° ，且 $\angle C$ 比 $\angle B$ 大 25° ，求 $\angle A =$ _____ 度。

解答：

- $\angle A + \angle C = 135^\circ \Rightarrow \angle B = 45^\circ$
 $\angle C = \angle B + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ$

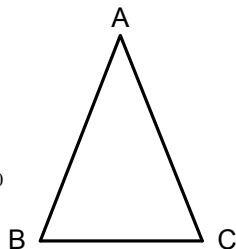


【範例三】

一等腰三角形一底角的度數等於其頂角度數的 4 倍，求頂角度數。

解答：

- 設頂角度數為 X°
 $X^\circ + 4X^\circ + 4X^\circ = 180^\circ$
 $9X^\circ = 180^\circ \Rightarrow X^\circ = 20^\circ$

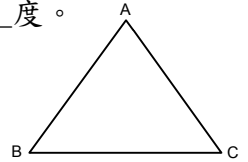


【練習一】

- (1) $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 4\angle B$ ，且 $\angle A = 4\angle C$ ，
求 $\angle A =$ _____ 度。
- (2) $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = \frac{5}{6}\angle B$ ，且 $\angle C$ 比 $\angle B$ 小 7° ，求 $\angle A =$ _____ 度。

解答：

- (1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 $\Rightarrow 4\angle B + \angle B + \angle B = 180^\circ$
 $\Rightarrow 6\angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle A = 4\angle B = 120^\circ$
- (2) 設 $\angle B = X^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 $\frac{5}{6}X + X + X + 7 = 180^\circ$
 $\frac{17}{6}X = 180^\circ \Rightarrow X = 66$
 $\angle A = \frac{5}{6}X = 55^\circ$

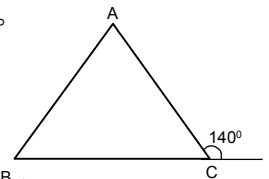


【練習二】

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle C$ 的外角是 140° ，且 $\angle A - \angle B = 10^\circ$ ，求 $\angle B =$ _____ 度。

解答：

- $\angle A + \angle B = 140^\circ \dots (1)$
 $\angle A - \angle B = 10^\circ \dots (2)$
 (1) - (2) $\Rightarrow 2\angle B = 130^\circ$
 $\Rightarrow \angle B = 65^\circ$



【練習三】

一等腰三角形有兩個內角度數比為 $4:1$ ，求其頂角度數。

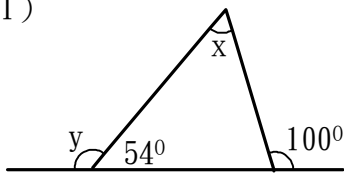
解答：

- 若頂角度數為 X° 、底角的度數 $4X^\circ$
 $X^\circ + 4X^\circ + 4X^\circ = 180^\circ$
 $9X^\circ = 180^\circ \Rightarrow X^\circ = 20^\circ$
 若頂角度數為 $4X^\circ$ 、底角的度數 X°
 $X^\circ + X^\circ + 4X^\circ = 180^\circ$
 $6X^\circ = 180^\circ \Rightarrow X^\circ = 30^\circ$
 $4X^\circ = 120^\circ$ 答：頂角度數為 20° 、 120°

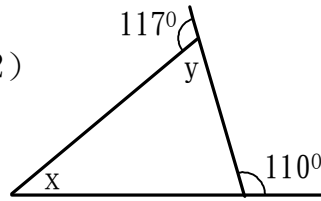
【範例四】

求下列各圖中 x 與 y 之值：

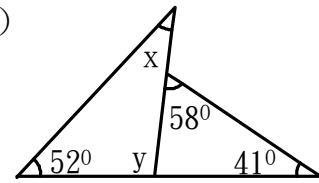
(1)



(2)



(3)



解答：

$$(1) X = 100^\circ - 54^\circ = 46^\circ$$

$$Y = 46^\circ + (180^\circ - 100^\circ) = 126^\circ$$

$$(2) Y = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$$

$$X = 110^\circ - 63^\circ = 47^\circ$$

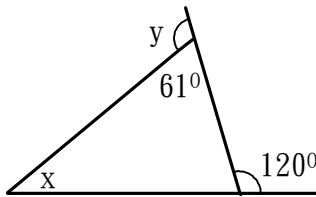
$$(3) Y = 58^\circ + 41^\circ = 99^\circ$$

$$X = 180^\circ - 52^\circ - 99^\circ = 29^\circ$$

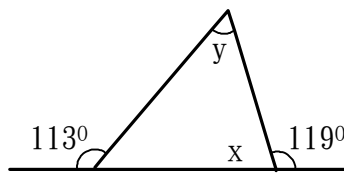
【練習四】

求下列各圖中 x 與 y 之值：

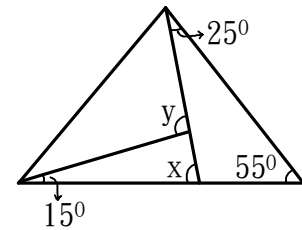
(1)



(2)



(3)



解答：

$$(1) X = 120^\circ - 61^\circ = 59^\circ$$

$$Y = 59^\circ + (180^\circ - 120^\circ) = 119^\circ$$

$$(2) X = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$$

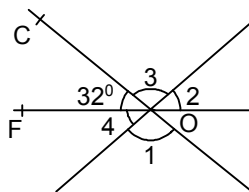
$$Y = 113^\circ - 61^\circ = 52^\circ$$

$$(3) X = 55^\circ + 25^\circ = 80^\circ$$

$$Y = 15^\circ + 80^\circ = 95^\circ$$

【範例五】

已知 $\angle COF = 32^\circ$ ， $\angle 1 = 3\angle 2$ ，求 $\angle 3$ 、 $\angle 4$



解答：

$$\angle 1 = \angle 3 \text{ (對頂角相等)}$$

$$\angle 2 = \angle 4 \text{ (對頂角相等)}$$

$$\angle 3 + \angle 2 + \angle COF = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\angle 2 + \angle 2 + 32^\circ = 180^\circ$$

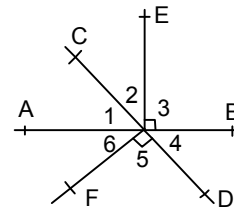
$$\Rightarrow 4\angle 2 = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 2 = 37^\circ; \angle 4 = 37^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 3 = \angle 1 = 3\angle 2 = 3 \times 37^\circ = 111^\circ$$

【練習五】

如圖， $\angle 3 = \angle 5 = 90^\circ$ ， $\angle 6 = 50^\circ$ ，求 $\angle 2 = ?$



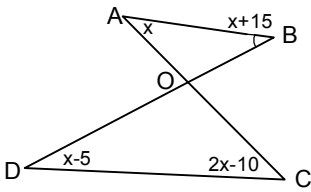
解答：

$$\because \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 6 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 2 = \angle 6 = 50^\circ$$

【範例六】

如圖，求 x 與 $\angle AOB$ 。

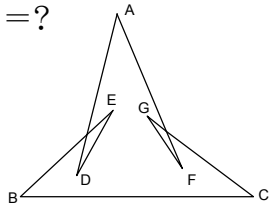


解答：

$$\begin{aligned} \text{Q } \angle A + \angle B + \angle AOB &= 180^\circ \\ \angle C + \angle D + \angle DOC &= 180^\circ \\ \text{又Q } \angle AOB &= \angle DOC (\text{對頂角}) \\ \Rightarrow \angle A + \angle B &= \angle C + \angle D \\ \Rightarrow x + x + 15^\circ &= x - 5^\circ + 2x - 10^\circ \\ \Rightarrow x &= 30^\circ \\ \Rightarrow \angle AOB &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ \Rightarrow \angle AOB &= 180^\circ - x^\circ - (x^\circ + 15^\circ) \\ \Rightarrow \angle AOB &= 180^\circ - 30^\circ - (30^\circ + 15^\circ) \\ \Rightarrow \angle AOB &= 105^\circ \end{aligned}$$

【範例七】

求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ = ?



解答：

連接 \overline{AB} ，連接 \overline{AC}

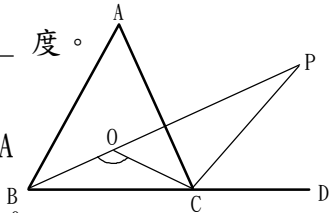
$$\begin{aligned} \angle D + \angle E &= \angle 1 + \angle 2, \angle G + \angle F = \angle 3 + \angle 4 \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G \\ &= \angle A + \angle B + \angle C + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

【範例八】

$\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 與 $\angle C$ 的平分線之夾角為 115° ，則 $\angle B$ 的內角平分線與 $\angle C$ 的外角平分線之夾角為 _____ 度。

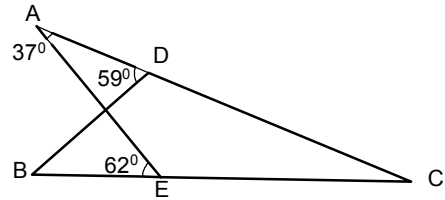
解答：

$$\begin{aligned} \text{Q } \angle BOC &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \angle A &= \angle BOC - 90^\circ \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \angle A &= 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ \Rightarrow \angle P = \frac{1}{2} \angle A \\ &= 25^\circ \end{aligned}$$



【練習六】

如圖，求 $\angle B$ 與 $\angle C$ 。

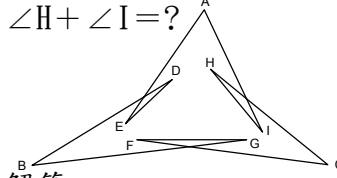


解答：

$$\begin{aligned} \text{Q } \angle A + \angle ADB &= \angle B + \angle AEB \\ \Rightarrow 37^\circ + 59^\circ &= \angle B + 62^\circ \\ \Rightarrow 37^\circ + 59^\circ - 62^\circ &= \angle B \\ \Rightarrow \angle B &= 34^\circ \\ \angle APB &= \angle A + \angle ADB = 37^\circ + 59^\circ = 96^\circ \\ \angle APB &= \angle A + \angle B + \angle C \\ \Rightarrow \angle C &= \angle APB - \angle A - \angle B \\ &= 96^\circ - 37^\circ - 34^\circ \\ &= 25^\circ \end{aligned}$$

【練習七】

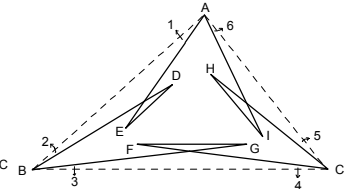
求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I$ = ?



解答：

連接 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC}

$$\begin{aligned} \angle D + \angle E &= \angle 1 + \angle 2, \angle G + \angle F = \angle 3 + \angle 4 \\ \angle H + \angle I &= \angle 5 + \angle 6 \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H \\ + \angle I &= \angle A + \angle B + \angle C + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 \\ + \angle 5 + \angle 6 &= 180^\circ \end{aligned}$$



【練習八】

如圖， $\overline{AD} \perp \overline{AE}$ ， $\angle DCB$ 的平分線與 $\angle EBC$ 的平分線交於 P ，則 $\angle P =$ _____ 度。

解答：

$$\begin{aligned} \text{三角形內角和} &= 180^\circ \\ \therefore \angle P + \angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ \\ \angle P &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 \\ \angle P &= 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \angle 3}{2} \right) - \left(\frac{180^\circ - \angle 4}{2} \right) \\ \angle P &= \left(\frac{\angle 3 + \angle 4}{2} \right) = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \end{aligned}$$

