三角形的全等

如果兩個圖形的大小、形狀都相同時，就稱這兩個圖形全等，當然我們會用數學的語言來清楚表明什麼叫做大小、形狀都相同，在這一節我們將討論三角形有哪些全等性質？

三角形的全等

我們給定兩個三角形，△ABC 與△DEF:

對應頂點:疊合在一起的頂點，叫做這兩個三角形的對應頂點。

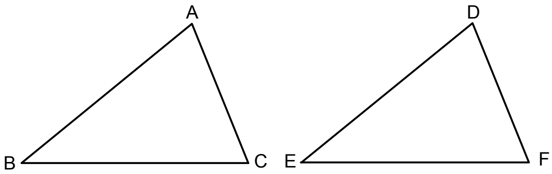
例如: A↔D、B↔E、C↔F。

對應邊:疊合在一起的邊，叫做這兩個三角形的對應邊。

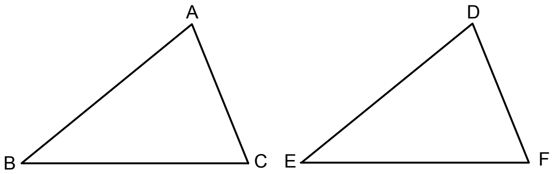
例如: $\overline{AB}$和$\overline{DE}$、$\overline{BC}$和$\overline{EF}$、$\overline{AC}$和$\overline{DF}$都是對應邊。

對應角: 疊合在一起的角，叫做這兩個三角形的對應角。

例如: ∠A 和∠D、∠B 和∠E、∠C 和∠F。



如下圖，若△ABC 與△DEF 疊合後，頂點 A 與 D、頂點 B 與 E、頂點 C 與 F，可以完全的重合，則我們稱$\triangle ABC$與$\triangle DEF$全等，記成$\triangle ABC \cong \triangle DEF$。



若△ABC≅△DEF，則這兩三角形並需同時滿足如下關係:

(1)**對應角相等**: ∠A=∠D、∠B=∠E、∠C=∠F

(2)**對應邊相等**: $\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{BC}=\overline{EF}$、$\overline{AC}=\overline{DF}$

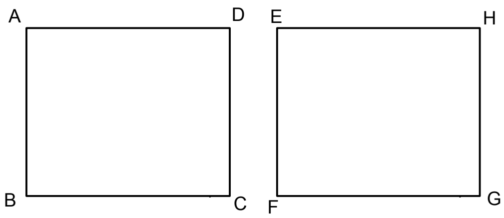
(3)**面積相等**: △ABC 之面積=△DEF 之面積

<u>Note</u>：若四邊形 ABCD≅四邊形 EFGH，則這兩四邊形並需同時滿足如下關係:

(1)對應角相等: ∠A=∠E、∠B=∠F、∠C=∠G、∠D=∠H

(2)對應邊相等: $\overline{AB}=\overline{EF}$、$\overline{BC}=\overline{FG}$、$\overline{CD}=\overline{GH}$、$\overline{AD}=\overline{EH}$

(3)面積相等: 四邊形 ABCD 之面積=四邊形 EFGH 之面積



三角形的全等性質

兩個三角形全等要滿足以下三種條件：

(1)對應角相等

(2)對應邊相等

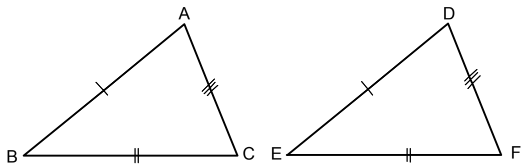
(3)面積相等，

那請問是否可用較少的條件即可判定兩個三角形為全等?事實以下為五個重要全等性質，將要告訴我們如何以較少的條件即可得三角形的全等性質。

1. SSS 全等性質（三個邊對應相等）
2. SAS 全等性質（兩邊一夾角對應相等）
3. ASA 全等性質（兩角一夾邊對應相等）
4. AAS 全等性質（兩角與一邊對應相等）
5. RHS 全等性質（兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等）

在這裡 S 表示邊、A 表示角、R 表示直角、 H 表示斜邊，接著我們一一來舉例說明。

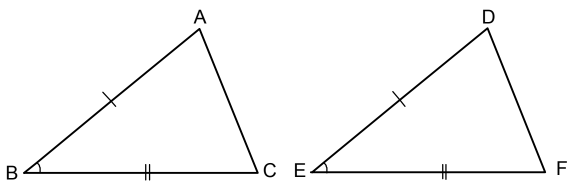
SSS 全等性質：在△ABC 與△DEF 中，若三個邊對應相等即 $\overline{AB}=\overline{DE}$ 、$\overline{BC}=\overline{EF}$ 、$\overline{AC}=\overline{DF}$ ，則△ABC≅△DEF。



圖一

SAS 全等性質：在△ABC 與△DEF 中，若兩個三角形的兩邊和它們的夾角對應相等即

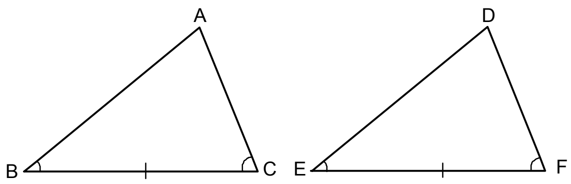
$\overline{AB}=\overline{DE}$ 、$\overline{BC}=\overline{EF}$ ，∠B=∠E，則$\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 。



圖二

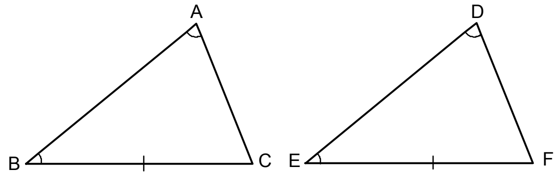
ASA 全等性質：在△ABC 與△DEF 中，若兩個三角形的兩角和它們所夾的邊對應相等即

∠B=∠E，$\overline{BC}=\overline{EF}$ ，∠C=∠F，則△ABC≅△DEF。



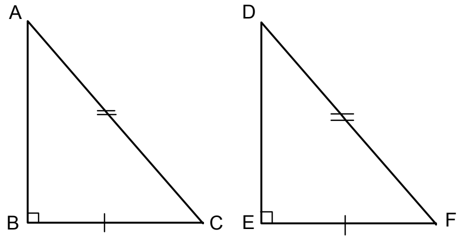
圖三

AAS 全等性質：在△ABC 與△DEF 中，若兩個三角形的兩個角和其中一個角的對邊對應相等即若∠B=∠E，$\overline{BC}=\overline{EF}$（或 $\overline{AC}=\overline{DF}$），∠A=∠D，則△ABC≅△DEF。



圖四

RHS 全等性質：在△ABC 與△DEF 中，若兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等即∠B=∠E，$\overline{BC}=\overline{EF}$（或 $\overline{AC}=\overline{DF}$），$\overline{AC}=\overline{DF}$，則△ABC≅△DEF。



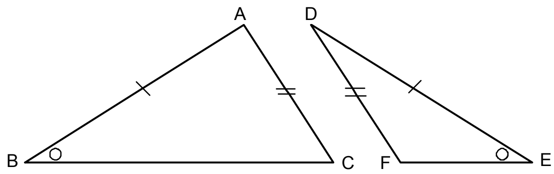
圖五

三角形的非全等性質

有 2 個性質常被誤以為全等性質，其實並沒有。這兩個性質為 SSA 與 AAA，我們由下列範例來說明這兩個三角形的非全等性質。

SSA **非**全等性質：兩三角形兩鄰邊和一鄰角相等，如圖六：

若∠B=∠E，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，則△ABC 與△DEF 不一定全等。



圖六

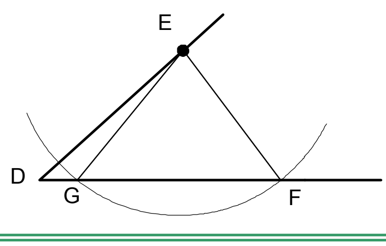
SSA 不全等作圖:

如下圖，(1)任意作一角∠D，並在其一邊上取一點 E。

(2)再以 E 點為圓心，適當的長 a 為半徑畫弧，交∠D 的另一邊於 F、G 兩點，其中半徑小於 $\overline{DE}$、大於 E 點到∠D 的另一邊的距離。

(3)連接 $\overline{EF}$ 和 $\overline{EG}$。

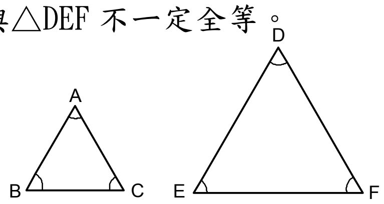
觀察下圖可以發現:在△DEF 和△DEG 中，$\overline{DE}=\overline{DE}$，∠D=∠D，$\overline{EF}=\overline{EG}$，但△ DEF 和△DEG 並不全等。



AAA **非**全等性質：兩三角形三內角相等，如圖七，△ABC與△DEF是兩個正三角形：

即∠A＝∠D＝60^0， ∠B＝∠E＝60^0，∠C＝∠F＝60^0，

則△ABC與△DEF不一定全等。



圖七

三角形的全等作圖：接下來我們要利用尺規作圖來驗證三角形的全等性質

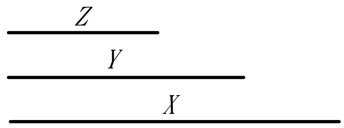
SSS全等作圖

SAS全等作圖

ASA全等作圖

AAS全等作圖

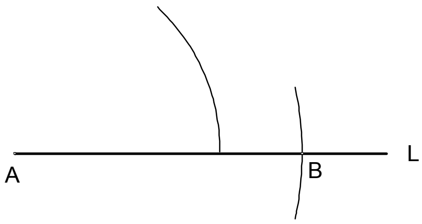
【SSS全等作圖】已知線段X、Y、Z(如下圖)，試用尺規作圖畫出以線段X、Y、Z為三邊長的三角形。



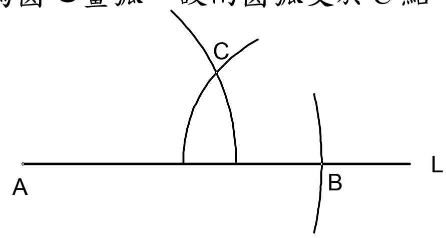
步驟一：畫直線L。

步驟二：設一端為A點，以x為半徑，A為圓心畫弧，交L於B點。

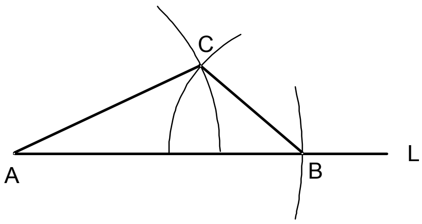
步驟三：以y為半徑，A為圓心畫弧。



步驟四：以z為半徑，B為圓心畫弧，設兩圓弧交於C點。

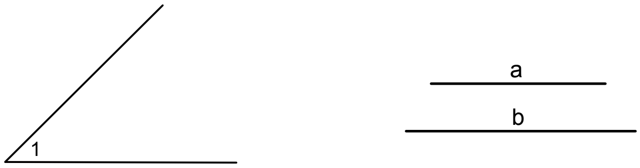


步驟五：連$\overline{AC}$、$\overline{CB}$，則△ABC中$\overline{AB}$＝x，$\overline{AC}$＝y，$\overline{AC}$＝z。

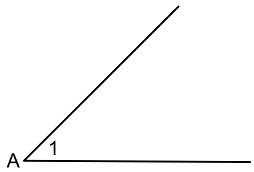


<u>Note</u>：我們發現不論任何人作出的三角形，經過旋轉、平移後都可以重疊在一起。

【SAS 全等作圖】已知三角形的一個夾角和兩個邊長，試用尺規作出符合條件的三角形。

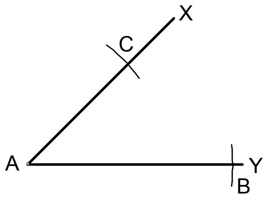


步驟一：作等角∠1。

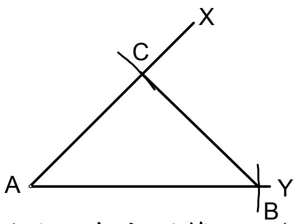


步驟二：在∠A 的一邊上取 Y，以 a 為半徑，A 為圓心畫弧，交 $\overline{AY}$ 於 B 使 $\overline{AB}$ ＝a。

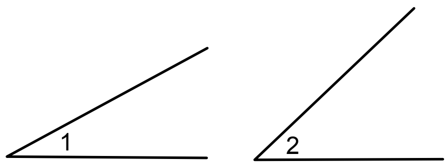
在∠A 的另一邊上取 X，以 b 為半徑，A 為圓心畫弧，交 $\overline{AX}$ 於 C 使 $\overline{AC}$ ＝b。

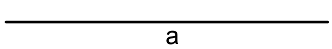


步驟三： 連接 $\overline{CB}$，則△ABC 中∠A＝∠1，$\overline{AB}$ ＝a，$\overline{AC}$ ＝b，則三角形即為所求。



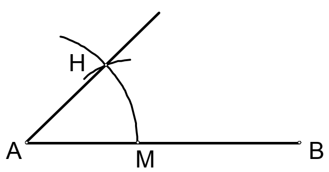
【ASA 全等作圖】已知三角形的兩角分別等於∠1、∠2 與一線段長度為 a，試用尺規作出符合條件的三角形。





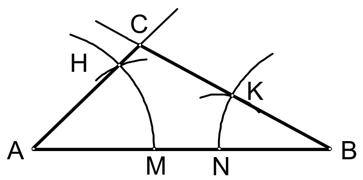
步驟一：作等線段 $\overline{AB}$，使 $\overline{AB}$ ＝a。

步驟二：以 A 為頂點，作∠A＝∠1

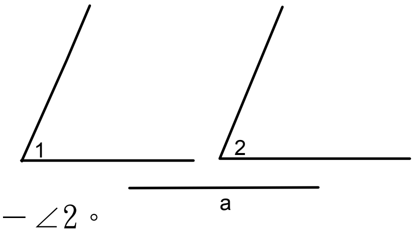


步驟三：再以 B 為頂點，作∠B＝∠2。設 $\overrightarrow{AH}$ 與 $\overrightarrow{BK}$ 的交點為 C，連接 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$，

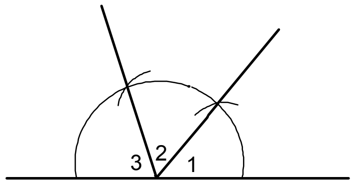
則△ABC 即為所求。



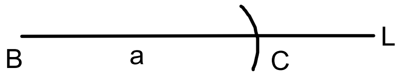
【AAS 全等作圖】已知三角形的兩角分別等於∠1、∠2 與一線段長度為 a，試用尺規作出符合條件的三角形。



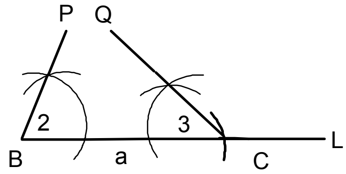
步驟一：作∠3＝180°－∠1－∠2。



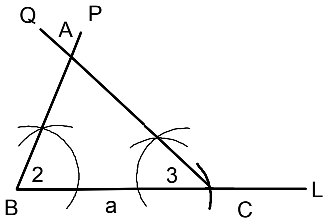
步驟二: 作一直線 L，並在 L 上取 ＝ a。



步驟三: 分別以 B、C 為頂點， $\overline{BC}$ 為一邊，在 L 的同側各作∠PBC＝∠2，∠QCB＝∠3。



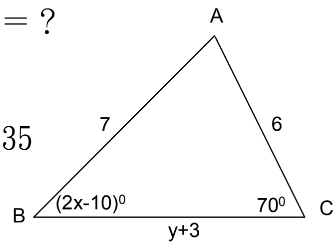
步驟四: 設 $\overline{BP}$ 和 $\overline{CQ}$ 交於 A，則△ABC 即為所求。



全等三角形的應用

【範例】

若△ABC≅△DEF，∠C＝70^0，∠B＝$(2x-10)^0$，∠D＝$(x+15)^0$，$\overline{AB}$＝7，$\overline{AC}$＝6，$\overline{BC}$＝y＋3，$\overline{EF}$＝3y－1，試求：(1)x 之值＝？(2)△DEF 周長＝？



【解】(1)∵∠A＝∠D＝$(x+15)^0$

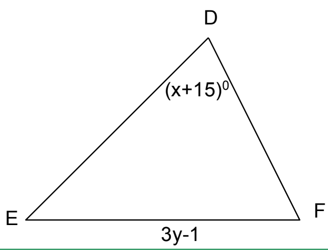
∴(x＋15)＋(2x－10)＋70＝180^0 ⇒3x＝105 ，∴x＝35

(2)∵$\overline{BC}=\overline{EF}$

∴y＋3＝3y－1，y＝2

∴$\overline{BC}$＝2＋3＝5

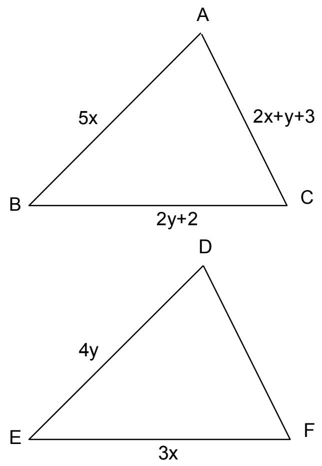
⇒△DEF 周長＝△ABC 周長＝7＋6＋5＝18



【範例】

若△ABC≅△DEF， $\overline{AB}=5x$，$\overline{AC}=2x+y+3$，$\overline{BC}=2y+2$，$\overline{DE}=4y$，$\overline{EF}=3x$，

試求：(1)x、y 之值＝？(2)$\overline{DF}$＝？



【解】∵△ABC≅△DEF　∴$\overline{AB}=\overline{DE}$　即 $5x=4y$ ……①

又$\overline{BC}=\overline{EF}$　　∴$2y+2=3x$ ……②

由②：$2y=3x-2$ 代入①

⇒$5x=2(3x-2)$

⇒$x=4$ ；　$y=5$

∴$\overline{DF}=\overline{AC}=2x+y+3=16$

【範例】如右圖，ABCD 與 CEFG 均為正方形，則:

(1)在△BCG 與△DCE 中，∵ABCD 與 CEFG 都是正方形

∴$\overline{BC}$＝_______　、$\overline{CG}$＝_______，

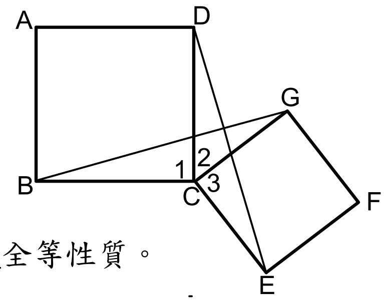
$\angle 1$＝_______＝90^0

(2)∵∠BCG＝∠1＋∠2＝_______＋∠2

∴∠BCG＝_______

(3)由(1)、(2)知，△BCG ≅ △DCE 是根據_______全等性質。

(4)∴∠CBG＝∠_______



【解】(1) $\overline{BC}=\overline{DC}$ 、$\overline{CG}=\overline{CE}$，$\angle 1=\angle 3=90^0$

(2) ∠BCG＝∠1＋∠2＝∠3＋∠2＝∠DCE

(3) 由$\overline{BC}=\overline{DC}$ 、$\overline{CG}=\overline{CE}$，∠BCG＝∠DCE

知△BCG ≅ △DCE(SAS)

(4)則∠CBG＝∠CDE

【範例】如右圖，將長方形 ABCD 沿$\overline{EF}$對摺，使 C 點與 A 點重合，則:

(1) $\overline{CD}$＝_______，∠C＝_______。

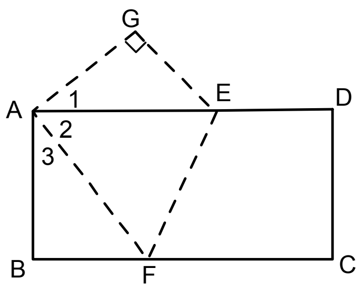
(2) $\overline{AB}=\overline{CD}$＝_______，∠B＝∠C＝_______。

(3) ∵∠1＋∠2＝_______＋∠2＝90^0

∴∠1＝_______。

(4) △ABF ≅ △AGE 是根據_______全等性質。

(5) $\overline{AF}$＝_______＝_______。



【解】(1)∵C→A，則 D→G

$\therefore \overline{CD}=\overline{AG}$，∠C=∠FAG

(2) $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AG}$，∠B=∠C=∠G

(3) ∵∠1+∠2=∠3+∠2

∴∠1=∠3

(4) 由(1)、(2)、(3)知△ABF ≅ △AGE(ASA)

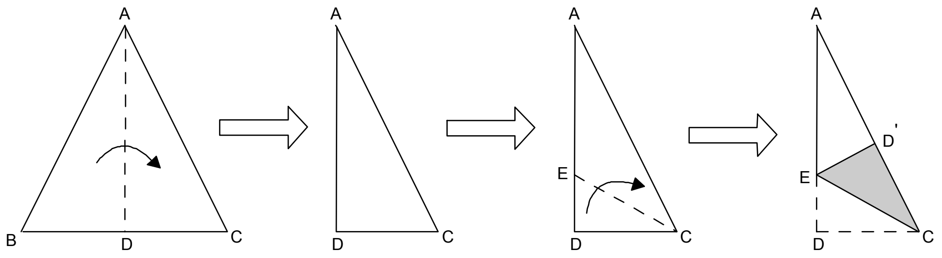
(5) $\overline{AF}=\overline{AE}=\overline{CF}$

【範例】如圖(一)，ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$:

(1)將 $\overline{AB}$ 向 $\overline{AC}$ 方向摺過去，使得 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 重合，出現摺線 $\overline{AD}$，如圖(二)

(2)將 $\overline{CD}$ 向 $\overline{AC}$ 方向摺過去，如圖(三)，使得 $\overline{CD}$ 完全疊合在 $\overline{AC}$ 上，出現摺線

$\overline{CE}$，如圖(四)，則ΔAEC 的面積為何?



圖(一)　圖(二)　圖(三)　圖(四)

【解】Θ ΔEDC≅ΔED'C (SAS)

∴設 $\overline{DE}=x$, 則 $\overline{D'E}=x$，$\overline{CD}=5$，$\overline{AD'}=8$，$\overline{AE}=12-x$

在ΔAD'E 中，

Θ ∠AD'E=90^0

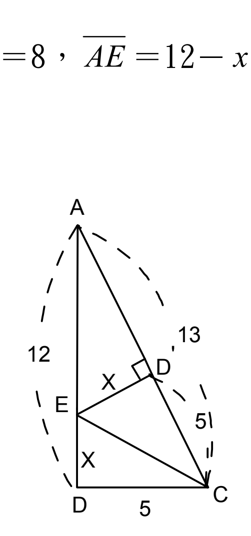
$\therefore \overline{AE}^2=\overline{AD'}^2+\overline{D'E}^2$

$(12-x)^2=8^2+x^2$

$\Rightarrow 144-24x+x^2=64+x^2$

$\Rightarrow 24x=80 \quad \therefore x=\frac{80}{24}=\frac{10}{3}$

$\therefore$ΔAEC 面積$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times 13=\frac{65}{3}$

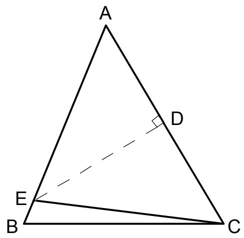


【**範例**】如下圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，以 $\overline{DE}$ 為軸對摺。使 A 和 C 重合。若 $\overline{AB}=18$，

$\overline{BE}=3$，則:

(1) ΔAEC 周長為?

(2) ΔACE 面積為?



【**解**】(1) Θ ΔAED≅ΔCED(SAS)

$\therefore \overline{AE}=\overline{CE}=18-3=15$

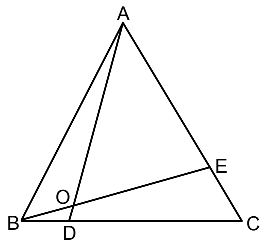
$\Rightarrow$周長$=18+2\times 15=48$

(2) Θ $\overline{DE}=\sqrt{15^2-(\frac{18}{2})^2}=12$

$\therefore$面積$=\frac{1}{2}\times 18\times 12=108$

【**範例**】如下圖，ΔABC 是正三角形;已知 $\overline{BD}=\overline{CE}$，根據哪一個性質可以知道

ΔABD≅ΔBCE?



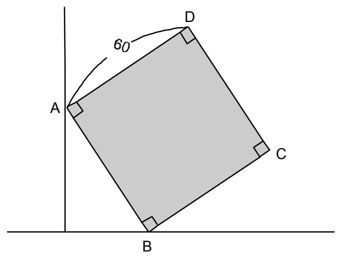
【**解**】Θ ΔABC 是正三角形

$\therefore$可知 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle$ABD$=\angle$BCE

又因題目已知 $\overline{BD}=\overline{CE}$

$\therefore$我們可以根據 SAS 知道ΔABD≅ΔBCE

【**範例**】如下圖，邊長 60 公分的正方形，協靠在垂直的牆上，且 B 點距牆角 36 公分，則 D 點離地面之高度為幾公分?



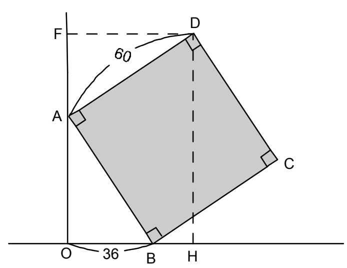
【**解**】Θ ΔAOB≅ΔDFA(AAS)

$\therefore \overline{DF}=\overline{AO}$

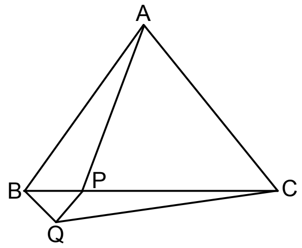
$=\sqrt{60^2-36^2}=48$

$\overline{AF}=\overline{BO}=36$

$\therefore \overline{DH}=\overline{OF}=48+36=84$(公分)



【範例】如下圖，ΔABC 與ΔBPQ 均為正三角形，若∠APB＝98^0，則∠PQC 為幾度?



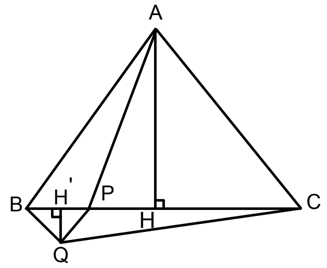
【解】$\because \overline{BC}=\overline{AB}$，$\overline{BP}=\overline{BQ}$，∠ABP＝∠QBP

∴ΔABP≅ΔCBQ(SAS)

∴∠BQC＝∠APB＝98^0

∴∠PQC＝$98^0-60^0=38^0$

【範例】承上題，若$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BQ}$＝2 公分，則ΔPQC 面積 :ΔAPC 面積 :ΔBPQ 面積＝?



【解】ΔPQC 面積:ΔAPC 面積

$=\overline{QH'}:\overline{AH}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2 \ : \ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6$

＝2:6＝1:3

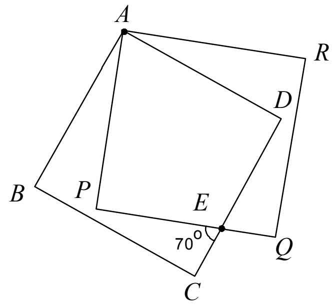
ΔPQC 面積:ΔBPQ 面積

$=\overline{PC}:\overline{BP}$(同高)

＝(6－2) : 2＝2 : 1

∴ΔPQC 面積 :ΔAPC 面積 :ΔBPQ 面積＝2 : 6 : 1

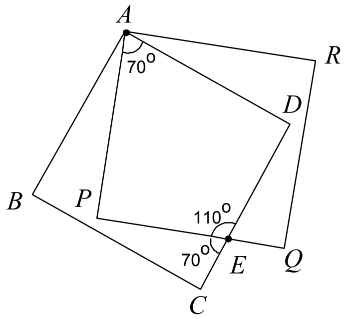
【範例】如圖，四邊形 ABCD、APQR 為兩個全等的正方形，$\overline{CD}$與$\overline{PQ}$相交於 E 點。若∠PEC＝70^0，求∠PAD 與∠BAP 的度數。



【解】$\because \angle PED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ 且 $\angle P = \angle D = 90^\circ$

$\therefore \angle PAD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

$\therefore \angle BAP = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

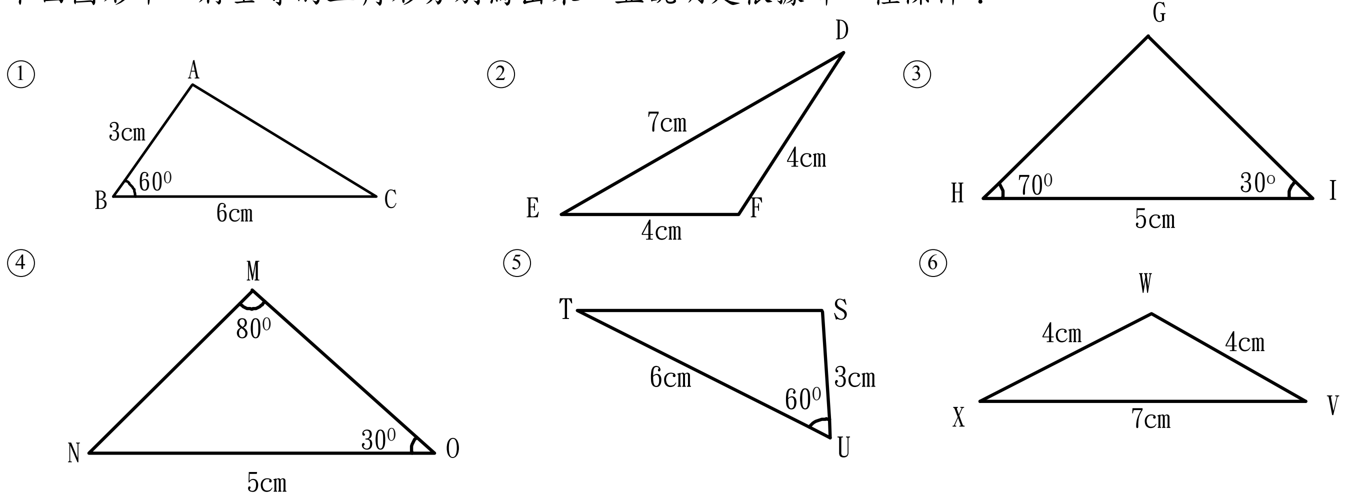


Note: ∠PAD＝∠CEP

小 試 身 手

【範例一】

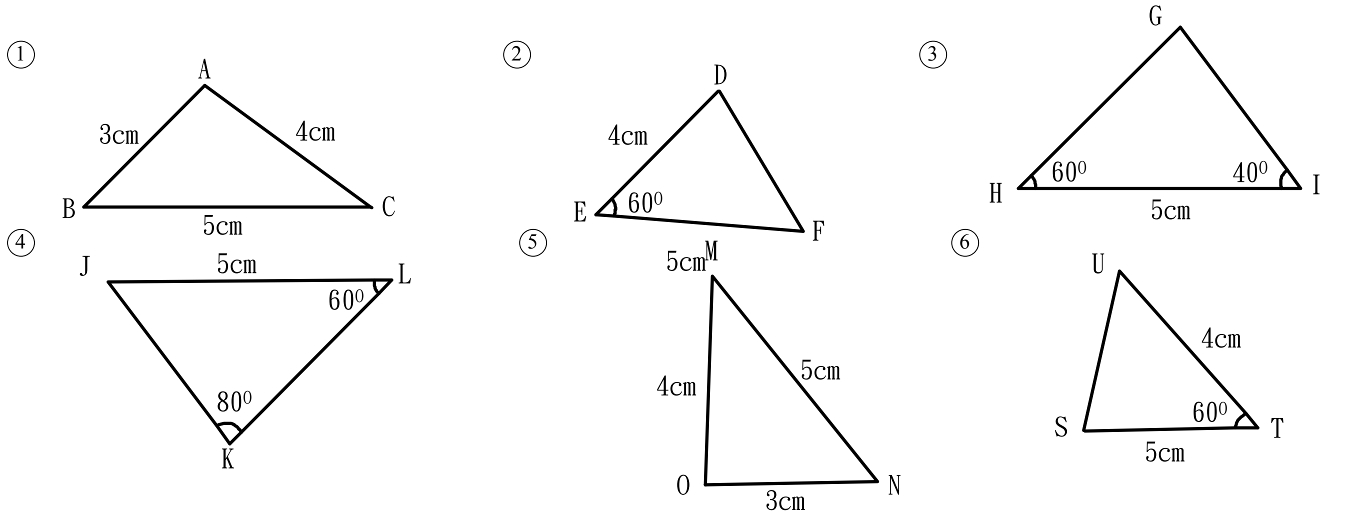
下面圖形中，將全等的三角形分別寫出來，並說明是根據哪一種條件？



解答：②⑥全等，根據 SSS； ④全等，根據 AAS；①⑤全等，根據 SAS；③全等，根據 ASA

【練習一】

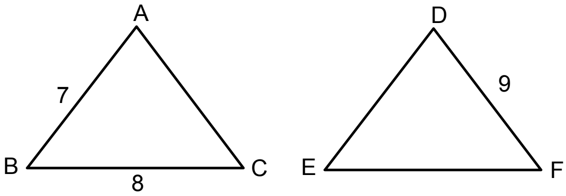
下面圖形中，將全等的三角形分別寫出來，並說明是根據哪一種條件？



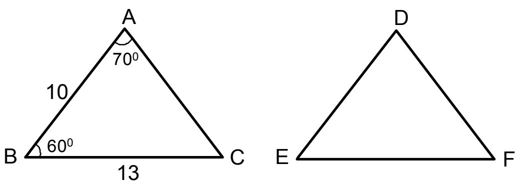
解答：①⑤全等，根據 SSS
③全等，根據 ASA
④全等，根據 AAS
②⑥全等，根據 SAS

【範例二】

(1) 若△ABC≅△DEF， $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{DF}=9$， 則：(1) $\overline{DE}$ (2)△DEF 之周長



(2) 若△ABC 與△DEF 中， 若 $\overline{AB}=\overline{EF}$，$\overline{BC}=\overline{FD}$，$\overline{CA}=\overline{DE}$，且∠A＝$70^{0}$，∠B＝$60^{0}$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=13$，則：①△ABC≅ ________，根據 _______ 性質②∠F＝___ ③ $\overline{EF}=$ _____



解答:(1) $\overline{DE}=\overline{AB}=7$

△DEF 之周長＝△ABC 之周長

＝7＋8＋9＝24

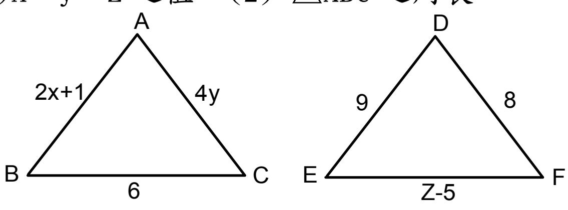
(2) ①△EFD；SSS ②∠F＝∠B＝60^{0}

③ $\overline{EF}=10$

【範例三】

若△ABC≅△DEF， $\overline{AB}=2x+1$，$\overline{AC}=4y$，$\overline{BC}=6$，$\overline{DE}=9$，$\overline{EF}=z-5$，$\overline{DF}=8$；試求：

(1)x、y、z 之值。(2) △ABC 之周長。



解答:

(1) ∵△ABC≅△DEF

∴$\overline{AB}=\overline{DE}$；$\overline{BC}=\overline{EF}$；$\overline{AC}=\overline{DF}$

即 2x＋1＝9⇒2x＝8⇒x＝4

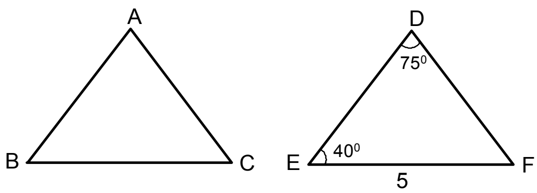
4y＝8⇒y＝2

z－5＝6⇒z＝11

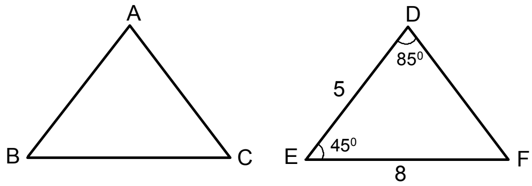
(2) △ABC 之周長＝ △DEF 之周長＝6＋9＋8＝23

【練習二】

(1) 若△ABC≅△DEF， ∠E＝40^{0}，∠D＝75^{0}，$\overline{EF}=5$，則：(1) $\overline{BC}=$_____(2) ∠B＝_____



(2) 若△ABC 與△DEF 中， 若∠A＝∠D，∠B＝∠F，$\overline{AB}=\overline{DF}$，且∠D＝$85^{0}$，∠E＝$45^{0}$，$\overline{DE}=5$，$\overline{EF}=8$，則：①△ABC≅ ________，根據 ______ 性質②∠B＝___ ③ $\overline{AC}=$____



解答： (1) ∵△ABC≅△DEF

∴$\overline{BC}=\overline{EF}=5$

∠B＝∠E＝40^{0}

(2) △ABC≅△DFE（根據 ASA 性質）

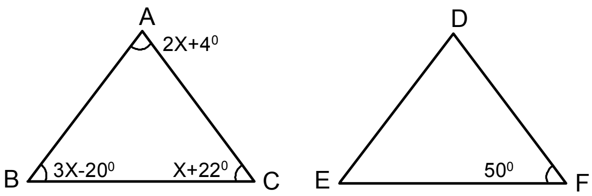
∠B＝∠F＝180^{0}－∠D－∠E

＝180^{0}－85^{0}－45^{0}

＝50^{0} $\overline{AC}=5$

【練習三】

若△ABC≅△DEF，∠A＝（2x＋4）^{0}，∠B＝（3x－14）^{0}，∠C＝（x＋22）^{0}，∠F＝50^{0}，則∠A＝________



解答:

∵△ABC≅△DEF

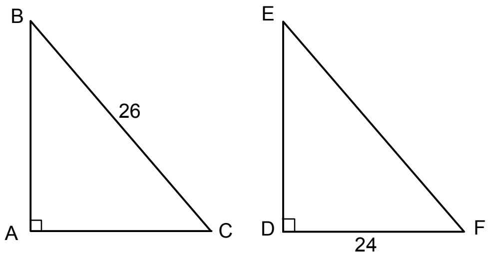
∴∠C＝∠F＝50^{0}＝（x＋22）^{0} ⇒ x＝28

⇒∠A＝（2x＋4）^{0}＝（2×28＋4）^{0}

＝60^{0}

【範例四】

若△ABC與△DEF，$\angle A=\angle D=90^0$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=26$ 公分，若△ABC 的面積為 120 平方公分，而 $\overline{DF}=24$ 公分，試求：(1) $\overline{AB}$ (2) △DEF 之周長。



解答:

(1)△ABC 與△DEF 中

$\because \angle A=\angle D=90^0$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$

根據 SAS 性質 ⇒ △ABC≅△DEF

△ABC 之面積 $=120=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times 24\times\overline{AB}$

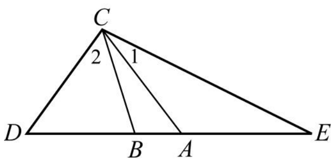
$\Rightarrow \overline{AB}=10$

(2) △ABC 之周長＝△DEF 之周長。

$=10+24+26=60$（公分）

【範例五】

如附圖，△CDE 中，$\overline{BC}=\overline{BD}$，$\overline{AE}=\overline{AC}$，若 $\angle BCA=20^\circ$，且 $\angle D$: $\angle E=5:3$，求 $\angle 1=$？



解答: $\because \overline{BC}=\overline{BD}$ $\therefore \angle 2=\angle D$，又 $\overline{AE}=\overline{AC}$

$\therefore \angle 1=\angle E$ $\because \angle D:\angle E=5:3$

$\therefore$ 設 $\angle D=5k^\circ$、$\angle E=3k^\circ$

$\therefore \angle 2=5k^\circ$、$\angle 1=3k^\circ$

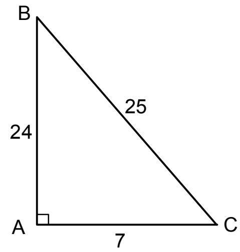
又△CDE 的三內角和為 180°

$\therefore 5k+(5k+20+3k)+3k=180$

$16k=160$，$k=10$ $\therefore \angle 1=30^\circ$

【練習四】

△ABC 為直角三角形，其邊長為 7、24、25，若△ABC≅△DEF，求：(1) △DEF 之周長 (2) △DEF 之面積。



解答:

(1) ∵△ABC≅△DEF

∴△DEF 之周長＝△ABC 之周長

$=7+24+25$

$=56$

(2) ∵△ABC≅△DEF

∴△DEF 之面積＝△ABC 之面積

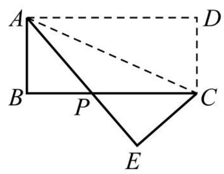
$=\frac{1}{2}\times 7\times 24=84$

【練習五】

如附圖，沿著長方形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 摺疊，D 點落在 E 點上，若 $\angle ACD=66^\circ$，求：

(1) $\angle ECP=$？

(2) 當 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=9$ 時，$\overline{AP}=$？



解答:

(1) ∵△ACD≅△ACE ∴$\angle ACE=\angle ACD=66^\circ$

又 $\angle ACB=90^\circ-66^\circ=24^\circ$ ∴ $\angle ECP=66^\circ-24^\circ=42^\circ$

(2) 設 $\overline{AP}=x$ ∵△ABP≅△CEP

$\therefore \overline{CP}=\overline{AP}=x$ $\therefore \overline{BP}=9-x$

直角△ABP 中，$3^2+(9-x)^2=x^2$，

$9+81-18x+x^2=x^2$

$18x=90$，$x=5$